УДК 621.391

АНАЛИЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕЛИРОВАННЫХ НЕГУАССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Палагин
Доктор технических наук, доцент*
E-mail: palahin@yahoo.com
А. В. Ивченко
Ассистент*
E-mail: ivchenko@transco.in.ua
*Кафедра радиотехники
Черкасский государственный технологический университет
бул. Шевченко, 460, г. Черкассы, Украина, 18006

У статті розглядається одне з можливих рішень задачі з оцінки параметрів негаусівських випадкових величин при їх моментно-кумулянтному описі при корелятивній вибірці. Наведено аналіз алгоритму адаптованого методу максимізації полінома для знаходження оцінок скалярного параметра статистично залежних негаусівских випадкових величин

Ключові слова: оцінка параметрів, вибірка, негаусівська випадкова величина, кореляція, метод максимізації полінома

В статье рассматривается одно из возможных решений задачи по оценке параметров негауссовских случайных величин при их моментно-кумулянтном описании при коррелированной выборке. Приведен анализ алгоритма адаптированного метода максимизации полинома для нахождения оценок скалярного параметра статистически зависимых негауссовских случайных величин

Ключевые слова: оценка параметров, выборка, негауссовская случайная величина, корреляция, метод максимизации полинома

1. Введение

В теории статистического анализа многомерных случайных величин одной из важных задач является корреляционный анализ, позволяющий определять наличие и характер взаимосвязи данных, проводить оценки их параметров. Данной проблеме посвящено много работ [1 – 8], где в основном делается предположение, что исследуемые случайные величины распределены по нормальному закону. На практике не всегда выполняется условие нормализации случайных величин [9], поэтому возникает необходимость расширения математического аппарата по обработке данных при негауссовых помехах. Применение классических подходов к решению данной задачи при использовании многомерных плотностей распределения вызывает ряд трудностей, связанных с необходимостью оперирования априорной информацией о случайных величинах, а также алгоритмической реализацией методов обработки. Одним из подходов к решению данной задачи является использование нового метода максимизации полинома [10] (метода Кунченко), где использование моментно-кумулянтного описания случайных негауссовых величин позволяет получать более простые и точные оценки по сравнению с известными результатами. Однако использование данного метода не позволяет оценивать параметры негауссовых случайных величин, которые являются статистически зависимыми.

На основе адаптации метода максимизации полинома [11] для оценивания негауссовых статистически зависимых случайных величин при использовании совместных моментов и кумулянтов синтезированы полиномиальные алгоритмы [12], позволяющие получать более точные оценки параметров негауссовых помех по сравнению и известными результатами. Актуальным является исследование адекватности используемых моментно-кумулянтных моделей при анализе статистически зависимых негауссовых случайных величин.

2. Анализ исследований и публикаций

Реальный объект, параметры которого необходимо измерить, имеет свои индивидуальные свойства и связан с другими объектам. Для упрощения экспериментальных измерений и теоретических обобщений свойства объекта, как правило, идеализируются. Выбор модели измеряемой величины определяется как сутью исследуемого объекта, так и необходимой точностью измерения. Как одна из характеристик модели выборки из исследуемой случайной величины - корреляционные связи между дискретными значениями. Этой характеристикой довольно часто пренебрегают в связи с усложнением самой модели и, соответственно, усложнением алгоритма обработки величин, представленных такими моделями.

В то же время, повышение точности связано с учетом в алгоритмах обработки всех свойств процесса, например учета наличия статистических связей между выборочными значениями [1]. Большинство классических методов оценки оперируют статистическими данными при отсутствии статистических связей между ними или априорно известными функциями распределения. Так, например, при оценке дисперсии методом моментов [2] не учитываются значения многомерных моментных функций, характеризующие статистические связи. Оценка методом максимального правдоподобия [4 – 6] требует знания многомерных функций распределения, нахождение которых для реальных процессов является достаточно сложным. Предположение о марковском характере исследуемой величины не всегда отвечает адекватности математической модели реальному процессу. Метод максимизации полинома [10], в отличие от метода моментов, в своем алгоритме оперирует всеми моментными и кумулянтными функциями, что позволяет повысить точность оценки параметров случайных негауссовских процессов. При этом, если выборочные значения статистически связаны, то целесообразно использовать адаптированный метод максимизации полинома [11].

Существующие методы оценивания параметров коррелированных случайных величин в основном применяются в предположении нормального закона распределения, что не всегда отображает реальные процессы [4].

Задача оценивания параметров существенно усложняется, если закон распределения случайных величин отличается от нормального, что характерно для многих технических задач [6 – 9].

3. Формирование целей и задач

В работе предложен другой подход к решению поставленной задачи, основанный на использовании не плотностей распределения случайных величин, а моментно-кумулянтных функций, что позволяет существенно упростить полученные решения при достаточно высокой эффективности.

Целью работы является анализ полиномиальных методов оценивания параметров коррелированных негауссовских случайных величин и получение рекомендаций по их использованию.

4. Моментно-кумулянтные модели случайных величин

Моментно-кумулянтная модель случайной величины представляется последовательностью моментных функций [2, 3, 10]:

$$\alpha_1(t_1),\alpha_2(t_1,t_2),\alpha_3(t_1,t_2,.t_3),...,\alpha_n(t_1,t_2,...,t_n),...$$

или кумулянтных функций

$$\chi_1(t_1),\chi_2(t_1,t_2),\chi_3(t_1,t_2,.t_3),...,\chi_n(t_1,t_2,...,t_n),... ,$$

которые полностью и однозначным образом представляют случайный процесс. Для случайных величин моментные функции $\alpha_n(t_1,t_2,...,t_n)$ в общем случае будут зависеть от кумулянтных функций высших порядков.

Отметим, что только для негауссовских процессов нормируемые кумулянтные функции высших порядков не равны нулю. Таким образом, гауссовский процесс однозначно определяется средним значением $m(t)$ и ковариационной функцией $B(t_1,t_2)$ или $\chi_2(t_1,t_2)$. Если все нормируемые кумулянтные функции высших порядков равняются нулю, то случайная величина будет гауссовской, для которой:

$$\chi_3(t_1,t_2,t_3)=\chi_4(t_1,t_2,t_3,t_4)=...=\chi_n(t_1,...,t_n)=0 .$$

Особенность моделей случайных величин, для которых характерно наличие статистических связей между выборочными значениями, при моментно-кумулянтном описании, заключается в отличие от нуля кумулянтных функции высших порядков [2, 3] $\chi_2(t_1,t_2)$; $\chi_3(t_1,t_2,t_3)$; $\chi_4(t_1,t_2,t_3,t_4)$;...; $\chi_n(t_1,...,t_n)$, в которых и учитывается статистическая связь. Следовательно, алгоритм обработки величин, которые описываются такой моделью, должен учитывать кумулянтные функции высших порядков.

5. Сравнительный анализ алгоритмов метода максимизации полинома

Учитывание моментно - кумулянтных функций высших порядков приводит к усложнению алгоритма обработки. Проведем сравнительный анализ использования адаптированного метода максимизации полинома с учетом корреляционных свойств выборки [11] и метода максимизации полинома [10] без учета этих свойств для оценивания информативных параметров коррелированных негуссовских случайных величин.

Согласно методу максимизации полинома, для оценивания параметров ϑ случайных величин исследуемые статистические данные

$$x_1=\xi(t_1),x_2=\xi(t_2),...,x_n=\xi(t_n)$$

представляются в виде стохастического полинома степени S:

$$l_{snz}(\bar{x}/\vartheta)=k_0(\vartheta)+\sum_{i=1}^{s}k_i(\vartheta)\sum_{v=1}^{n}\phi_i(x_v), \qquad (1)$$

где $\phi_i(x_v)$ - функции от случайных аргументов.

Показано, что на случай статистически зависимой выборки из исследуемой величины, обобщенный стохастический полином порядка s приобретает вид [11]:

$$l_{snz}(\bar{x}/\vartheta;R_{v,k})=k_0(\vartheta;R_{v,k})+\sum_{i=1}^{s}k_i(\vartheta;R_{v,k})\sum_{v=1}^{n}\phi_i(x_v),$$

$$v,k=\overrightarrow{1,n}, \qquad (2)$$

где коэффициенты $k_0(\vartheta;R_{v,k})$, $k_i(\vartheta;R_{v,k})$ будут зависеть от коэффициентов корреляции $R_{v,k}$.

Корреляционные связи выборочных значений можно представить в виде матрицы корреляции, элементами которой являются коэффициенты корреляции $R_{v,k}$ между v-м и k-м выборочными значениями на оси времени и могут быть определены как стандартные функции корреляции, которые часто используются на практике.

Необходимо по выборке

$$x_1=\xi(t_1),x_2=\xi(t_2),...,x_n=\xi(t_n)$$

найти оценку параметра ϑ при моментно-кумулянтном описании исследуемой коррелированной негауссовской случайной величины.

Показано [10], что в выборочном стохастическом полиноме вида (1) коэффициенты $k_0(\vartheta)$ и $k_i(\vartheta)$ равны соответственно:

$$k_0(\vartheta)=\int_a^{\vartheta}\sum_{i=1}^{s}\left[h_i(t)\psi_i(t)\right]dt\,,\ k_i(\vartheta)=\int_a^{\vartheta}h_i(t)dt\,,\ \forall\vartheta\in(a,b)\,,\quad(3)$$

где функции $h_i(\vartheta)$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{s}h_j(\vartheta)F_{i,j}(\vartheta)=\frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta),\ i=\overline{1,s}\,.\quad(4)$$

Показано [11], что для полинома вида (2) коэффициенты $k_0(\vartheta;R_{v,k})$ и $k_i(\vartheta;R_{v,k})$ равны соответственно:

$$k_0(\vartheta;R_{v,k})=\int_a^{b}\sum_{i=1}^{s}\left[h_i(\vartheta;R_{v,k})\psi_i(\vartheta)\right]d\vartheta\,,$$

$$k_i(\vartheta;R_{v,k})=\int_a^{b}h_i(\vartheta;R_{v,k})\,d\vartheta\,,\ v,k=\overrightarrow{1,n}\,,\quad(5)$$

где функции $h_i(\vartheta;R_{v,k})$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{s}h_j(\vartheta;R_{v,k})F_{i,j}(\vartheta;R_{v,k})=\frac{d}{d\vartheta}\psi_i(\vartheta),\ i=\overline{1,s}\,,\ v,k=\overrightarrow{1,n}\,,\quad(6)$$

где $\psi_i(\vartheta)=E\phi_i(\xi),i=\overrightarrow{1,s}$ - математические ожидания случайной величины,

$$F_{i,j}(\vec{\vartheta})=\psi_{i,j}(\vartheta)-\psi_i(\vartheta)\cdot\psi_j(\vartheta)\,,$$

$$\Psi_{i,j}(\vec{\vartheta})=E(\phi_i(\xi)\phi_j(\xi))=\Psi_{i+j}(\vec{\vartheta})\,,$$

$$F_{i,j}(\vartheta;R_{v,k})=r_{v,k}-\psi_i(\vartheta)\cdot\psi_j(\vartheta)\,,$$

$$r_{v,k}(\vec{\vartheta})=E(\phi_i(x_v)\phi_i(x_k))\,.$$

Тогда оценка неизвестного параметра ϑ для случая независимых и зависимых случайных величин находится из решения уравнений соответственно:

$$\frac{d}{d\vartheta}l_{sn}(\vec{x}/\vartheta)\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}=0\,,\ \frac{d}{d\vartheta}l_{snz}(\vec{x}/\vartheta;R_{v,k})\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}=0\,,$$

которые в развернутом виде для (1) запишутся следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{s}h_i(\vartheta)\sum_{v=1}^{n}\left[\phi_i(\xi)-\psi_i(\vartheta)\right]\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}=0\,,\quad(7)$$

а для (2) запишется в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{s}h_i(\vartheta;R_{v,k})\sum_{v=1}^{n}\left[\phi_i(\xi)-\psi_i(\vartheta)\right]\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}=0\,,\ v,k=\overrightarrow{1,n}\,.\quad(8)$$

В том случае, когда стохастический полином задан в классе степенных функций $\phi_i(x_v)=x_v^i$ (или описывается с помощью начальных моментов $m_i(\vec{\vartheta})$, $i=\overrightarrow{1,n}$), то функции $F_{i,j}(\vec{\vartheta})$ называются центрируемыми коррелянтами размера (i,j) и имеют вид:

$$F_{i,j}(\vec{\vartheta})=m_{i+j}(\vec{\vartheta})-m_i(\vec{\vartheta})\cdot m_j(\vec{\vartheta})\,,\quad(9)$$

а на случай статистически зависимых одинаково распределенных выборочных значений с функцией корреляции $R_{v,k}$:

$$F_{i,j}(\vec{\vartheta};R_{v,k})=m_{ij}(\vec{\vartheta};R_{v,k})-m_i(\vec{\vartheta})\cdot m_j(\vec{\vartheta})\,,$$

где $m_{ij}(\vec{\vartheta};R_{v,k})=E(\xi^i\xi^j)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^i\xi^jW(\xi_1,\xi_2)dx$ - совместные моменты (многомоментные функции).

Значения коэффициента корреляции, которые определяют величину корреляционной связи между двумя выборочными значениями с номерами v и k, $v,k=\overrightarrow{1,n}$ исследуемой выборки можно представить в виде матрицы

$$Z=\begin{pmatrix}1 & R_{12} & \dots & R_{1n}\\ R_{21} & 1 & \dots & R_{2n}\\ . & . & . & .\\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что для случайных процессов с гауссовским законом распределения только совместный момент второго порядка $m_{11}(\vec{\vartheta};R_{v,k})$ может быть отличен от нуля.

Все остальные моментные функции высших порядков равняются нулю.

Принципиальное отличие полинома (2) от полинома (1) заключается в зависимости коэффициентов полинома от параметров корреляции, которые представлены в виде матрицы корреляции Z.

Таким образом, происходит переход от одномерных моментов, какие характерные для одномерных распределений, к многомерным моментам, как характеристик многомерного характера исследуемой величины.

В качестве решения уравнения (7) и уравнения (8) берется действительный корень, который зависит от выборочных значений и для которого производная от полиномов (1) и (2) принимает максимальное значение.

Для нахождения оценки необходимо, прежде всего, находить коэффициенты $h_i(\vartheta)$, $i=\overline{1,s}$. Коэффициенты функции $k_0(\vartheta;Z)$ и $k_i(\vartheta;Z)$ являются необходимыми в случае нескольких корней уравнения максимизации полинома, когда в качестве оценки необходимо взять глобальный максимум.

Показано, что оценки неизвестного параметра, найденные из решения уравнения (8), будут эффективными и асимптотически несмещенными.

Анализ показывает, что при использовании стохастических полиномов для нахождения оценок параметров случайного процесса основная задача состояла в нахождении коэффициентов этих полиномов. Коэффициенты находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, определитель которой выражается через коррелянты различной размерности.

Следовательно, через коррелянты будут выражаться и коэффициенты стохастического полинома. Усложнение алгоритма нахождения оценок параметра ϑ происходит за счет обработки матриц корреляции, которые определяют значения коэффициентов оценочного полинома Кунченко.

6. Сравнительная характеристика эффективности оценок метода максимизации полинома

Для подтверждения выигрыша в оценивании параметров коррелированного процесса с использованием адаптированного метода максимизации полинома следует провести сравнительную характеристику эффективности оценок, полученных адаптированным методом максимизации и методом максимизации полинома без учета статистических связей выборочных значений процесса.

В качестве исследуемого процесса был взят ассиметричный процесс [12] с известным видом функции корреляции его выборочных значений (экспоненциальная функция корреляции). Неизвестным параметром, который следует оценить, является коэффициент ассиметрии γ_3.

Согласно алгоритмам метода максимизации полинома [10, 11], функциональная схема проведения машинного эксперимента может быть представлена на рис. 1, где:

ГВЧ - генератор случайных чисел, например с нормальным законом распределения вероятностей;

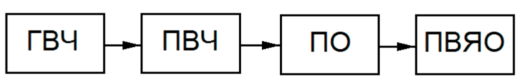
ПВЧ - преобразователь случайных чисел ГВЧ в случайные числа с необходимым законом распределения вероятностей;

ФКФ - формирователь корреляционных функций;

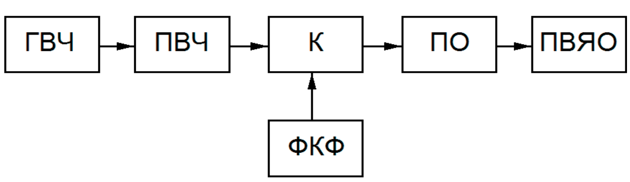
К – коррелятор (для получения коррелированной случайной последовательности);

ПО – устройство обработки (исследуемый алгоритм оценки параметров сигналов);

ПВЯО – устройство определения качества оценки (дисперсии оценки).



а



б

Рис. 1. Функциональная схема моделирования устройств оценивания параметров: а — для случайных не коррелированных величин, б — для случайных коррелированных величин

Блоки ПВЧ, ФКФ, К являются составляющими блока формирования коррелированных негауссовских последовательностей (БФКНП), в основе которого лежит нелинейный алгоритм генерирования коррелированных негауссовских последовательностей.

Согласно машинному эксперименту, было проведено имитационное моделирование работы алгоритмов оценивания параметра коррелированного негауссовского ассиметричного случайного процесса, синтезированного с применением адаптированного метода максимизации полинома при степени $s=2$ и $s=3$ и сравнение полученных результатов с результатами моделирования работы алгоритмов оценивания параметра некоррелированного негауссовского ассиметричного случайного процесса.

При разработке математических моделей негауссовских коррелированных величин главным критерием, который характеризует качество разработанных алгоритмов, выступает отношение дисперсий оценок, найденных адаптированным методом максимизации полинома $\sigma^2_{\gamma_3(2)\mathrm{kor}}$ к величине дисперсии оценки аналогичного параметра $\sigma^2_{\gamma_3(2)}$, найденного с помощью метода максимизации полином, который не учитывает корреляцию:

$$g(\vartheta)=\frac{\sigma^2_{\gamma_3(2)\mathrm{kor}}}{\sigma^2_{\gamma_3(2)}}.$$

На рис. 2 представлены некоторые результаты исследования полученных оценок параметров. Из графика видно, что учитывание в алгоритме обработки корреляционных свойств выборки в виде коэффициентов корреляции позволяет получать оценки методом максимизации полинома с меньшими дисперсиями по сравнению с результатами метода максимизации полинома без учета корреляции.

Рассмотрим функцию $g_{(\gamma_3)31}$, которая равняется отношению дисперсий оценки γ_3, которые найдены разными методами:

$$g_{(\gamma_3)31}=\frac{\sigma^2_{(\gamma_3)3}}{\sigma^2_{(\gamma_3)}},$$

где $\sigma^2_{(\gamma_3)3}$ - дисперсия оценки γ_3, которая найдена методом максимизации полинома при третьей степени полинома (s=3),

$\sigma^2_{(\gamma_3)}$ - дисперсия оценки γ_3, которая найдена методом моментов.

На рис. 3 показан график функции $g_{(\gamma_3)31}$ в зависимости от значений γ_3.

Анализ функции $g_{(\gamma_3)31}$ показывает, что за счет параметра негауссовости (коэффициента асимметрии), который учитывается в алгоритме метода максимизации полинома, но не учитывается в алгоритме метода моментов, возможно получать оценки с меньшими дисперсиями.

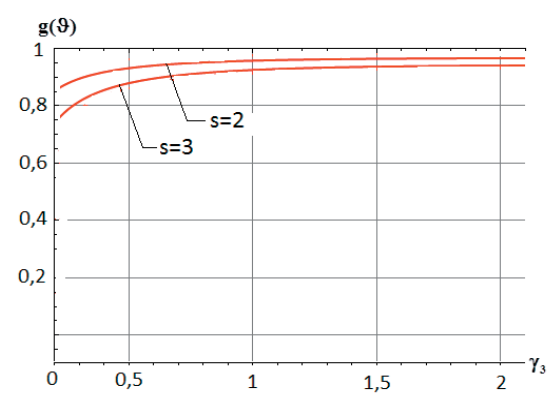


Рис. 2. График зависимости коэффициента уменьшения дисперсии $g(\vartheta)$ от коэффициента асимметрии γ_3 при степенях полинома s=2 и s=3

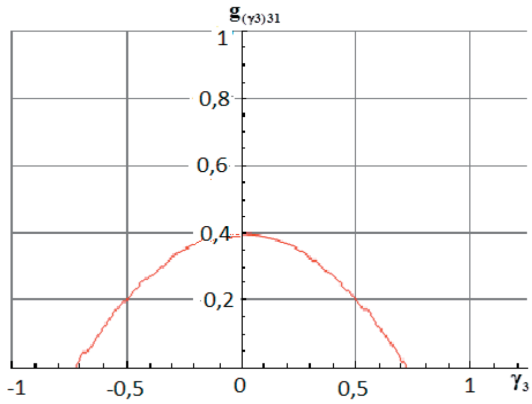


Рис. 3. График зависимости $g_{(\gamma_3)31}$ от параметра асимметрии

7. Выводы

В работе показано, что использование корреляционных мер описания статистически зависимых случайных последовательностей позволяет провести адаптацию метода максимизации полинома на случай коррелированных величин. Вид стохастического полинома, по которому раскладывается случайная коррелируемая последовательность, согласно методу максимизации полинома, образуется с учетом корреляционных связей.

В работе продемонстрировано использование адаптированного на корреляционный случай метода максимизации полинома для оценивания скалярного параметра асимметричной коррелируемой случайной величины.

Показано, что дисперсии полученных оценок при постоянных значениях объема выборки меньше, чем дисперсии оценок, полученных неадаптированным на корреляционный случай методом максимизации полинома.

Следует также отметить, что учитывание негауссовости исследуемых величин в алгоритмах метода максимизации полинома позволяет получать оценки с лучшими вероятностными характеристиками по сравнению с классическими алгоритмами метода моментов.

Литература

1. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ [Текст] / Т. Андерсон – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 500 с.
2. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных [Текст] / Дж. Бендат, А. Пирсон – М.: Мир, 1989. – 540 с.
3. Van Trees, H. L. Detection, Estimation, and Modulation Theory [Text] / H. L. Van Trees // John Wiley. - 2002. - 1470 c.
4. Hayes, M. H. Statistical Digital Signal Processing and Modeling [Text] / M. H. Hayes // New York: John Wiley & Sons. - 1996. - 330 c.
5. Kay, S. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory [Text] / S. Kay // Englewood Cliffs, N. J. - 1993. – 326c.
6. Tuzlukov, V. P. Signal Processing Noise [Text] / V. P. Tuzlukov // CRC Press/ - 2002. - 676 c.
7. Huang, W. N. Steady creep bending in a beam with random material parameters [Text] / W. N. Huang, F. A. Cozzarelli // II J. Franklin Instit. - 1980. - Vol. 294, №5. - С. 323 - 337.
8. Westlung, R. Properties of a random creep process [Text] / R. Westlung // II Int. J. Solids and Structures. - 1982. - Vol. 18. №4. - С. 275 - 283.
9. Соленов, В. И. Нелинейная обработка и адаптация в негауссовских помехах [Текст] / В. И. Соленов, О. И. Шелухин // Киев: КМУГА. - 1997. - 180 с.
10. Kunchenko, Y. P. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables [Text] / Y. P. Kunchenko // Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002. - 396 p.
11. Палагин, В. В. Адаптация метода максимизации полинома для оценки параметров случайных величин по статистически-зависимой выборке [Текст] / В. В. Палагин, А. В. Ивченко // Сборник научных трудов «Системы обработки информации». Харьков. 2009.- Вып. 2(76).- С. 118-123.
12. Палагин, В. В. Оценка параметра ассиметрии коррелированной негауссовской помехи методом максимизации полинома [Текст] / В. В. Палагин, А. В. Ивченко // Весник ЧГТУ. - 2009. - №2. - С.67-72.