

УДК 536.-12.517.956.4:622

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ДЕСОРБИРУЮЩЕГОСЯ МЕТАНА В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ УГЛЯ

А. П. Слесаренко

Доктор физико-математических наук, профессор
Лауреат Государственной премии Украины
Ведущий научный сотрудник
Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

И. Р. Венгеров

Кандидат физико-математических наук
Старший научный сотрудник
Институт физики горных процессов НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, Украина, 83114

Предложен иерархически-модульный подход к математическому моделированию процессов нелинейной фильтрации десорбирующегося метана в неоднородных угольных пластах. Практически востребованные, многомерные модели метаноотдачи пластов в отсутствие и при наличии вертикальных и горизонтальных скважин строятся на основе «моделей-модулей», которые, в свою очередь, комплектуются из ординарных – простейших одномерных моделей

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи фильтрации, математическое моделирование, неоднородные пласты угля

Запропоновано ієрархічно-модульний підхід до математичного моделювання процесів нелінійної фільтрації метану, що десорбується в неоднорідних пластах вугілля. Практично потрібні, багатовимірні моделі метановіддачі пластів у відсутності і за наявності вертикальних і горизонтальних свердловин будуються на підґрунті «моделей-модулів», які, у свою чергу, комплектуються з ординарних – найпростіших одно-вимірних моделей

Ключові слова: нелінійні крайові задачі фільтрації, математичне моделювання, неоднорідні пласти вугілля

1. Введение

Дальнейшее совершенствование технологии угледобычи и охраны труда горнорабочих, разработка перспективных методов газодобычи из глубинных пластов-коллекторов требуют совершенствования методов математического моделирования массопереноса (фильтрации метана в угольных пластах в частности). Усложняющими моделирование факторами являются неоднородность и нестационарность пластовых систем, нестационарность и нелинейность процессов фильтрации, зачастую сопровождающихся физико-химическими процессами (десорбция, активизируемая диффузия, химические реакции).

Неоднородность угольных пластов может быть обусловлена природными (эндогенными) и технологическими (экзогенными) факторами. При ведении горных работ (очистной выемке, проходке пластовых выработок и др.) формируются поверхности обнажения угольного пласта. Это изменяет фильтрационные параметры пласта в примыкающей к поверхности обнажения экзогенной зоне и формирует двухзонную структуру (во второй, экзогенной зоне, в глубине пласта, вне влияния горных работ фильтрационные параметры постоянны и соответствуют природным условиям залегания данного пласта).

В настоящей работе предлагается системно-иерархический подход к построению математических моделей нестационарного и нелинейного метанопереноса с учетом десорбции метана и неоднородности угольных пластов.

Вытекающие из запросов практики задачи расчета метаноотдачи пластов в различных ситуациях рассматриваются с единых позиций – «монтажа» их из более простых «моделей-модулей» - краевых задач фильтрации в двухслойных системах. Модели-модули, в свою очередь, «комплектуются» из ординарных краевых задач – достаточно простых одномерных и двумерных модулей фильтрации в каждой из двух зон массива. Предложен аналитично-численный метод решения одномерных ординарных задач на основе их линеаризации с последующим приведением к эквивалентным краевым задачам теплопроводности. Последние решаются посредством использования ранее обоснованных структур решений, базирующихся на приближенных функциях Грина.

2. Анализ литературных источников

Впервые уравнение фильтрации метана с учетом его десорбции для однородного пласта угля было предло-

жено Р. М. Кричевским [1]. В дальнейшем это уравнение использовалось, модифицировалось и обобщалось С. А. Христиановичем, П. Я. Полубариновой-Кочиной [2], Ю. А. Линьковым, А. Т. Айруни [3, 4], С. В. Кузнецовым, Р. Н. Кригман [5] и др. Чаще всего это уравнение записывают в виде [6]:

$$\frac{\mu}{K} \Phi(p) \frac{\partial(p^2)}{\partial t} = \nabla^2(p^2), \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} \left[n + \frac{abRT}{(1+bp)^2} \right], \quad (1)$$

где μ – вязкость метана, K и n – проницаемость и пористость пласта, a, b – параметры изотермы сорбции метана Ленгмюра, R – газовая постоянная метана, T – абсолютная температура пласта, P – давление метана.

Математические модели фильтрации метана, базирующиеся на (1), строятся на предположениях:

- 1) сжимаемость метана и его вязкость не зависят от давления и температуры;
 - 2) угольный пласт однороден и изотропен, так что $n, K = \text{const}$;
 - 3) процесс фильтрации протекает изотермически;
 - 4) пласт в ходе метаноотдачи не деформируется.
- Необходимо отметить, что практика показала, что эти предпосылки, кроме второй, достаточно хорошо соответствуют реальности.

Учет неоднородности пласта, т. е. снятие второго ограничения путем введения в уравнение (1) переменных параметров $n(x)$ и $K(x)$ был осуществлен С. Н. Осиповым [7]. Уравнение (1) было линейризовано путем замены $\Phi(P) \rightarrow \Phi(P_*)$, $P_* = P_0 = \text{const}$, где P_0 – начальное давление метана в пласте. До этого и впоследствии линейризация такого типа часто использовалась, при этом полагали $P = P_* = P_0$, $P_* = P_\infty$, $P_* = 0,5(P_0 + P_\infty)$ (где P_0 – атмосферное давление, а P_∞ – давление в «нетронутом» пласте), не приводя никаких обоснований. Р. Н. Кригман была предложена [5] линейризация $P_* = 0,86P_\infty$, которая обосновывалась сравнением аналитического решения с результатами моделированным на гидроинтеграторе ИГЛ-2. В дальнейших работах С. Н. Осипова [8 – 11] для решения задач фильтрации в неоднородных средах использовался слабо обоснованный приближенный метод и метод интегральных преобразований. Последний приводил (всякий раз, когда использовался) к необозримым и громоздким аналитическим выражениям, о попытках реализации которых численно ничего не сообщалось.

В работах Б. Г. Тарасова [12] и В. А. Колмакова [13], в ходе решения задач осуществлялись упрощения, во многом элиминирующие исходную сложную их постановку. Известны и другие модели метанопереноса в пластах угля [14], для которых, как и для ранее упомянутых, характерны следующие недостатки:

- 1) моделирование процессов в однородных и изотропных пластах;
- 2) необоснованность методов линейризации;
- 3) необоснованность видов функций $n(x)$ и $K(x)$ при учете в моделях неоднородности пластов;
- 4) используемые численные методы дают частную, плохо интегрируемую в другие модели информацию;
- 5) используемые аналитические методы приводят к громоздким, практически бесполезным выражениям.

3. Цель исследования

Разработать системно-иерархический метод математического моделирования процессов фильтрации метана в неоднородных угольных пластах, для чего:

- построить иерархию: вербальные модели метаноотдачи пластов во всех практически реализующихся ситуациях \rightarrow (модели-модули) \rightarrow ординарные модели;
- дать математическую формулировку всех ординарных моделей;
- предложить метод решения ординарных краевых задач;
- найти решения всех ординарных задач.

4. Иерархия математических моделей

Общая блок-схема иерархии моделей приведена на рис. 1

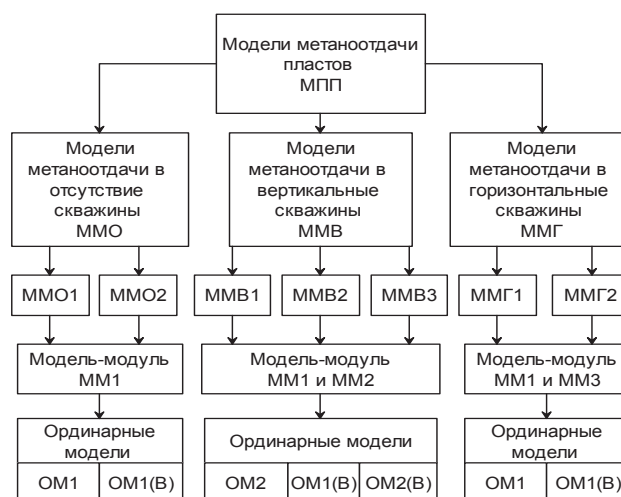


Рис. 1. Блок-схема иерархии моделей метаноотдачи пластов

Моделирование метаноотдачи пластов угля предусматривает анализ следующих практически встречающихся базовых ситуаций:

- 1) Метаноотдача пласта через поверхность обнажения пласта в отсутствие газоотводящих скважин – модель ММ01;
- 2) То же, но при наличии в пласте разгрузочной щели – модель ММ02;
- 3) Метаноотдача неограниченного пласта к одиночной вертикальной скважине (пройденной нормально к пласту на всю его мощность) – модель ММВ1;
- 4) Предыдущий случай, но скважина пройдена вблизи газонепроницаемой, нормальной к пласту плоскости (граница с газонепроницаемым породным массивом, плоскость симметрии) – модуль ММВ2;
- 5) Галерея вертикальных, равностоящих друг от друга, скважин – модель ММВ3;
- 6) Метаноотдача пласта к горизонтальной скважине, пройденной посередине пласта и нормальной к поверхности обнажения – забою.- Модель ММГ1;
- 7) Галерея горизонтальных скважин, пройденных нормально к забою в лаве или в пластовой выработке – модель ММГ2.

Все указанные ситуации сводятся к комбинациям моделей-модулей.

Модели-модули - краевые задачи фильтрации для двухслойных областей – слоистых систем $\{\Omega_1^{(m)}, \Omega_2^{(m)}\} (m=1,2)$.

Приняты обозначения: $\Omega_1^{(1)} = \{z \in (0, l_{1z})\}$ - одномерная декартова экзогенная зона пласта с переменными фильтрационными параметрами $n_1(z)$ и $K_1(z)$; $\Omega_2^{(1)} = \{z \in (l_{1z}, l_{1z} + l_{2z})\}$ - примыкающая к $\Omega_1^{(1)}$ эндогенная зона пласта, в которой $n = n_\infty = \text{const}$, $K = K_\infty = \text{const}$, $\Omega_1^{(2)} = \{r \in (r_0, r_1)\}$ - одномерная цилиндрическая область вокруг скважины с радиусом r_0 , имеющая ширину $\Delta r_1 = r_1 - r_0$, в которой фильтрационные параметры переменны: $n = n(r)$, $K = K(r)$; $\Omega_2^{(2)} = \{r \in (r_1, r_2)\}$ - примыкающая к $\Omega_1^{(2)}$ эндогенная зона вокруг скважины, шириной $\Delta r_2 = r_2 - r_1$, в которой $n = n_\infty = \text{const}$, $K = K_\infty = \text{const}$.

Ординарные модели – одномерные линеаризованные краевые задачи для экзогенных ($\Omega_1^{(m)}$) и эндогенных ($\Omega_2^{(m)}$) ($m=1,2$) зон пласта. Поскольку анализ для последних тривиален, его опускаем и рассматриваем, в качестве базисных, следующие четыре модели:

1) Модель OM1 – для области $\Omega_1^{(1)}$ при граничных условиях первого рода на границах $z=0$ и $z=l_{1z}$;

2) Модель OM2 – для области $\Omega_1^{(2)}$ при граничных условиях первого рода на границах $r=r_0$ и $r=r_1$;

3) Модель OM1(B) – видоизмененная модель OM1 – смешанная краевая задача с граничным условием первого рода при $z=0$ и второго рода – при $z=l_{1z}$. Последнее является однородным, оно описывает наличие при $z=l_{1z}$ газонепроницаемой стенки или плоскости симметрии;

4) Модель OM2(B) – аналогично видоизмененная модель OM2 – с граничным условием первого рода при $r=r_0$ и однородным условием второго рода – при $r=r_1$.

5. Математические формулировки ординарных моделей

Модель OM1

Обобщенная формулировка краевой задачи имеет вид:

$$C_1(z) \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_1(z) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial z} \right) + \tilde{v}_\infty \delta_+(t),$$

$$\delta_+(t) = \frac{d\theta_+(t)}{dt}, \quad \theta_+(t) = \begin{cases} 1, t > 0, \\ 0, t \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь обозначены:

$$\tilde{v}_1(z,t) = \theta_+(t) v_1(z,t), \quad v_1(z,t) = P_1^2(z,t), \quad z \in (0, l_{1z}),$$

$$t > 0,$$

$$C_1(z) = \frac{\mu}{P_*} (n_1(z) + N_*), \quad N_* = \frac{abRT}{(1 + bP_*)^2}, \quad P_* = 0,86P_\infty,$$

$$n_1(z) = n_{0z} \exp(-\alpha_z z / l_{1z}), \quad K_1(z) = K_{0z} \exp(-k_z z / l_{1z}) \quad (3)$$

$$\alpha_z = \ln \left(\frac{n_{0z}}{n_\infty} \right), \quad k_z = \ln \left(\frac{K_{0z}}{K_\infty} \right), \quad \frac{K_{0z}}{n_{0z}^3} = \frac{K_\infty}{n_\infty^3} = \text{const}.$$

Функция $v_1(z,t) = P_1^2(z,t)$ - квадрат давления метана в пласте, P_* - параметр линеаризации по А. Н. Кригман [5], $P_\infty, n_\infty, K_\infty$ - давление, пористость и проницаемость в эндогенной зоне пласта (вне зоны влияния горных работ). Последнее из соотношений в (3) широко используется [6].

Граничные условия к уравнению (2) имеют вид:

$$\tilde{v}_1(z,t) \Big|_{z=0} = \tilde{v}_0 = \tilde{P}_0^2, \quad \tilde{v}_1(z,t) \Big|_{z=l_{1z}} = \tilde{\mu}_1^{(+)}(t), \quad (4)$$

где $\tilde{\mu}_1^{(+)}(t)$ - функция склейки [15], которая определяется при анализе двухслойной модели-модуля MM1. При записи решения (2) будем обозначать $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_1^{(-)}(t)$, $\tilde{\mu}_1^{(+)}(t) = \tilde{v}_1^{(+)}(t)$.

Модель OM1(B)

Эта модель отличается от предыдущей тем, что второе условие (4) теперь принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial z} \Big|_{z=l_{1z}} = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

Второе, более существенное, отличие заключается в том, что постановка краевой задачи, теперь не обобщенная, биообобщенная [15] и $\tilde{v}_1(z,t)$ определяется так: $\tilde{v}_1(z,t) = \theta_+(t) \chi(\Omega_1^{(1)}) v_1(z,t)$, $v_1(z,t) = P_1^2(\chi, t)$. Функция $\chi(\Omega_1^{(1)})$ - характеристическая функция области $\Omega_1^{(1)}$, она равна 1, если $z \in \Omega_1^{(1)}$, и нулю в противном случае. В уравнении (2) при этом в правой части появляются члены, содержащие граничные условия, которые, таким образом, теперь входят в само уравнение (при обобщенной постановке в уравнение было включено только начальное условие).

Биообобщенная постановка дает возможность более простой, чем в предыдущем случае, структуры решения – представление потенциала [15].

Модель OM2

Строится аналогично OM1, путем замен $\Omega_1^{(1)} \rightarrow \Omega_1^{(2)}$,

$$\tilde{v}_1(z,t) \rightarrow \tilde{v}_1(r,t), \quad C_1(z) \rightarrow C_1(r), \quad K_1(z) \rightarrow K_1(r),$$

$$n_1(z) \rightarrow n_1(r), \quad \alpha_z \rightarrow \alpha_r, \quad k_z \rightarrow k_r$$

$$l_{1z} \rightarrow \Delta r_1 = r_1 - r_0, \quad \tilde{V}_1^2 \rightarrow \tilde{V}_2^2, \quad \text{где обозначены операторы:}$$

$$\tilde{V}_m^2 = C_1(\eta) \eta^{1-m} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{m-1} K_1(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \eta = \begin{cases} z, m=1 \\ r, m=2. \end{cases} \quad (6)$$

Граничные условия:

$$\tilde{v}_1(r,t) \Big|_{r=r_0} = \tilde{v}_1^{(-)}(t), \quad \tilde{v}_1(r,t) \Big|_{r=r_1} = \tilde{v}_1^{(+)}(t), \quad t > 0. \quad (7)$$

Модель OM2(B)

Модель является аналогом OM1(B), где осуществлены замены того же вида, что и в OM2, а граничное условие (5) принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

6. Структуры и методы решений

Модель ОМ1

Используем, в качестве структуры решения, т.н. представление граничных функций [15]. Вводим функцию $\tilde{M}_1(z,t)$:

$$\tilde{M}_1(z,t) = \tilde{v}_1^{(-)}(t) + [\tilde{v}_1^{(+)}(t) - \tilde{v}_1^{(-)}(t)]\beta_1(z), \quad z \in (0, l_{1z}), \quad t > 0. \quad (9)$$

Функция $\tilde{M}_1(z,t)$ является решением задачи:

$$\tilde{\nabla}_1^2 \tilde{M}_1(z,t) = 0, \quad \tilde{M}_1(0,t) = \tilde{v}_1^{(-)}(t), \quad \tilde{M}_1(l_{1z},t) = \tilde{v}_1^{(+)}(t). \quad (10)$$

Подстановка (9) в (10) дает задачу:

$$\tilde{\nabla}_1^2 \beta_1(z) = 0, \quad \beta_1(0) = 0, \quad \beta_1(l_{1z}) = 1, \quad (11)$$

решение которой

$$\beta_1(z) = \left[\int_0^{l_{1z}} \frac{dz}{K_1(z)} \right]^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{K_1(z')} = \frac{\exp(k_z z / l_{1z}) - 1}{\exp(k_z) - 1}. \quad (12)$$

Структура решения краевой задачи ОМ1 имеет вид [15]:

$$\tilde{v}_1(z) = \tilde{M}_1(z,t) + \int_0^{l_{1z}} \int_0^t dz' dt \tilde{G}_1(z,z',t-t') \left[\tilde{v}_\infty \delta_+(t') - \frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial t'} \right]. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{G}_1(z,z',t)$ - функция Грина первой краевой задачи, удовлетворяющая уравнению и однородным условиям 1-го рода:

$$\frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial t} = \tilde{\nabla}_1^2 \tilde{G}_1 + \delta(z-z')\delta_+(t), \quad \tilde{G}_1|_{z=0} = \tilde{G}_1|_{z=l_{1z}} = 0. \quad (14)$$

Задачу (14) решаем приближенно, аналитико-численным методом [15], конструируя решение $\tilde{G}_{1,1}(z,z',t)$ в виде:

$$\tilde{G}_{1,1}(z,z',t) = \tilde{A}_1(z',t)\Psi_1(z), \quad \Psi_1(z) = \left(1 - \frac{z}{l_{1z}} \right) \left(\frac{z}{l_{1z}} \right), \quad (15)$$

где $\Psi_1(z)$ - первая координатная функция метода Бубнова-Галеркина.

Преобразовав (14) и (15) по Лапласу (по t) и обозначая оператор $p - \tilde{\nabla}_1^2 = \bar{L}_1 (\bar{L}_1 = \partial_t - \tilde{\nabla}_1^2)$, для операторной невязки $\bar{e}(z,z',p)$ получаем выражение:

$$\bar{e}_1 = \bar{L}_1 \bar{G}_1 - \bar{L}_1 \bar{G}_{1,1} = \delta(z-z') - \bar{A}_1(z',p) \bar{L}_1 \Psi_1(z).$$

Из условия ортогональности в области $\Omega_1^{(1)}$ функций \bar{e}_1 и Ψ_1

$$\langle \bar{e}_1, \Psi_1 \rangle_{\Omega_1^{(1)}} = \int_0^{l_{1z}} dz \Psi_1(z) \left[\delta(z-z') - \bar{A}_1(p \Psi_1(z) - \tilde{\nabla}_1^2 \Psi_1(z)) \right] = 0$$

следует:

$$\bar{A}_1(z',p) = \frac{1}{S_{11}} \left(\frac{\Psi_1(z)}{p + Q_{11}/S_{11}} \right),$$

$$\tilde{A}_1(z',t) = \frac{\theta_+(t)}{S_{11}} \exp\left(-\frac{Q_{11}}{S_{11}} t\right) \Psi_1(z'). \quad (16)$$

Здесь обозначены:

$$S_{11} = \int_0^{l_{1z}} (\Psi_1(z))^2 dz = \frac{l_{1z}}{30}, \quad a_1(\zeta) = \frac{K_1(\zeta)}{C_1(\zeta)}, \quad \zeta = \frac{z}{l_{1z}},$$

$$Q_{11} = \frac{1}{l_{1z}} \int_0^{l_{1z}} a_1(\xi) (\xi - \xi^2) (2 + k_z - 2k_z \xi) d\xi. \quad (17)$$

Для вычисления Q_{11} выражение:

$$a_1(\xi) = \frac{K_{10} \exp(-k_z \xi)}{p_* \left[n_{0z} \exp(-\alpha_z \xi) + N_* \right]} \quad (18)$$

аппроксимируем степенной функцией вида:

$$a_1(\xi) \rightarrow \hat{a}_1(\xi) = a_{10} - (a_{10} - a_\infty) \xi^{m_1}, \quad a_{10} = a_1(0), \quad a_\infty = a_1(1). \quad (19)$$

Методом совпадений $a_1(\xi)$ и $\hat{a}_1(\xi)$ в трех точках ($\xi = 0, \xi = 1/2, \xi = 1, 0$) получаем:

$$m_1 = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{a_{10} - a_\infty}{a_{10} - a_{1/2}} \right), \quad a_{1/2} = a_1(1/2). \quad (20)$$

Оценка (20) при $K_{10} = 10^3 K_\infty$, $n_{0z} = 4n_\infty$ дает: $m_1 \approx 0,25$. Вычисление Q_{11} приводит к выражениям:

$$\frac{Q_{11}}{S_{11}} t = 10 Fo_{e1}, \quad Fo_{e1} = \frac{a_{1e} t}{l_{1z}^2},$$

$$a_{1e} = a_{10} \Phi(k_z, m_1) + a_\infty (1 - \Phi(k_z, m_1)), \quad (21)$$

где

$$\Phi(k_z, m_1) = 1 + \frac{6k_z}{(3+m_1)(4+m_1)} - \frac{6+3k_z}{(2+m_1)(3+m_1)}. \quad (22)$$

Величину a_{1e} будем называть (по аналогии с теплопроводностью) эффективным коэффициентом баропроводности неоднородной среды. Оценка a_{1e} при $k_z = 4,6$ и $m_1 = 0,25$ дает:

$$a_{1e} = 0,29a_{10} + 0,71a_\infty. \quad (23)$$

Функция Грина, таким образом, имеет вид:

$$\tilde{G}_{1,1}(z,z',t) = \frac{30\theta_+(t)}{l_{1z}} \exp(-10Fo_{e1}) \Psi_1(z) \Psi_1(z') \quad (24)$$

Решение краевой задачи, т.е. функцию $\tilde{v}_1(z,t)$ найдем, подставляя (24) в (13). После некоторых преобразований получаем:

$$\tilde{v}_1(z,t) = \tilde{v}_1^{(-)}(t) + [\tilde{v}_1^{(+)}(t) - \tilde{v}_1^{(-)}(t)] \left[\frac{\exp(k_z z / l_{1z}) - 1}{\exp(k_z) - 1} \right] +$$

$$+ 5\Psi_1(z) \left\{ \tilde{E}_1(t) \left[\tilde{v}_\infty \delta_+(t) - \frac{\partial \tilde{v}_1^{(-)}}{\partial t} \right] - B_1(k_z) \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{v}_1^{(+)}(t) - \tilde{v}_1^{(-)}(t)) \right\}, \quad (25)$$

где (t) – символ свертки двух функций времени и использованы обозначения:

$$\bar{E}_1(t) = \exp\left(-10 \frac{a_{1,e}t}{l_{1,z}^2}\right), \quad B_1(k_z) = 6 \left(\frac{k_z - 2}{k_z^3}\right). \quad (26)$$

По решению (25) легко находятся: плотность потока метана на поверхности обнажения пласта ($z=0$) (величина с размерностью $m^3/m^2 \cdot ч$), общее количество метана, выделившегося через $1m^2$ площади поверхности обнажения пласта к моменту времени t (размерность m^3/m^2). Знание двух этих величин позволяет решать различные вопросы оптимизации метаноизвлечения, прогноза газодинамических явлений, проводить различные инженерные расчеты.

Модель OM2

Ход решения краевой задачи аналогичен предыдущему случаю, но вычисление аналога $\beta_1(z)$ - функции $\beta_1(r)$ осуществляется по формуле:

$$\beta_2(r) = \left[\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{rK_1(r)} \right]^{-1} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'K_1(r')}. \quad (27)$$

Для этого строится аппроксимация функции $R(r) = (rK_1(r))^{-1}$:

$$R(\rho) \rightarrow \hat{R}(\rho) = R_0 + (R_1 - R_0)\rho^{m_\beta}, \quad \rho = \frac{r - r_0}{\Delta r_1}. \quad (28)$$

В итоге найдено:

$$m_\beta = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{R_1 - R_0}{R_{1/2} - R_0} \right),$$

$$R_0 = \frac{1}{r_0 K_{10}}, \quad R_{1/2} = \frac{2}{r_0 + r_1} (K_{10} K_\infty)^{-1/2}, \quad R_1 = R(1), \quad (29)$$

$$\beta_2(r) = \frac{\rho + M_\beta \rho^{1+m_\beta}}{1 + M_\beta}, \quad M_\beta = (1 + m_\beta)^{-1} (0,2k_r - 1). \quad (30)$$

Оценка этих величин:

при $K_{10} = 10^2 K_\infty$ и $r_1 = 5r_0 - m_\beta \approx 3,0$; при $m_\beta = 3,0$, и $k_r = 3,2 - M_\beta \approx 1,0$.

Структура решения краевой задачи имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(r, t) &= \\ &= \tilde{M}_2(r, t) + 2\pi \int_{r_0}^{r_1} r' dr' \int_0^t \tilde{G}_{2,1}(r, r', t - t') \left[\tilde{v}_\infty \delta_+(t') - \frac{\partial \tilde{M}_2}{\partial t'} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Приближенная функция Грина $\tilde{G}_{2,1}(r, r', t')$ находится аналогично $\tilde{G}_{1,1}(z, z', t)$ и имеет вид:

$$\tilde{G}_{2,1}(r, r', t') = \frac{20\theta_1(t')}{\pi \Delta r_1^2} \exp(-10Fo_{e2}) \psi_1(r) \psi_1(r'), \quad (32)$$

где $Fo_{e2} = \frac{a_{2,e}t'}{\Delta r_1^2}$, $a_{2,e} = a_{10}\Phi_{10} + 0_\infty\Phi_\infty$,

$$\psi_1(r) = \psi_1(\rho) = (1 - \rho)\rho, \quad \rho = \frac{r - r_0}{\Delta r_1}.$$

Коэффициент Φ_{10} и Φ_∞ вычисляется по более громоздким формулам, чем в случае OM1, их оценка при $m_2 = 0,22$, $k_r = 3,2$: $\Phi_{10} \approx 0,2$, $\Phi_\infty \approx 0,75$.

Окончательный вид решение аналогичен предыдущему случаю, т.е. решения для OM1 и OM2 структурно эквиваленты.

Модель OM1(B)

Структура решения имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(z, t) &= \tilde{v}_1^{(-)}(t) + \\ &+ \int_{r_0}^{l_{1,z}} dz' \int_0^t dt' \tilde{G}_{1,1}^{(2)}(z, z', t - t') \left[\tilde{v}_\infty \delta_+(t') - \frac{\partial \tilde{v}_1^{(-)}}{\partial t'} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $\tilde{G}_{1,1}^{(2)}(z, z', t)$ - приближенная функция Грина смешанной краевой задачи, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям:

$$\tilde{G}_{1,1}^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \tilde{G}_{1,1}^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=l_{1,z}} = 0. \quad (34)$$

Она определяется так же, как функция $\tilde{G}_{1,1}(z, z', t)$, но в методе Бубнова-Галеркина используется координатная функция вида

$$\psi_2(z) = \left(2 - \frac{z}{l_{1,z}} \right) \left(\frac{z}{l_{1,z}} \right), \quad \psi_2(0) = \frac{d\psi_2}{dz} \Big|_{z=l_{1,z}} = 0. \quad (35)$$

Для эффективного коэффициента баропроводности получим формулу

$$a_{1,e}^{(2)} = a_{10}\Phi_0^{(2)} + 0_\infty\Phi_\infty^{(2)}, \quad (36)$$

в которой коэффициенты $\Phi_0^{(2)}$ и $\Phi_\infty^{(2)}$ вычисляется по достаточно громоздким формулам, что впрочем, как и в предыдущем случае, легко осуществляется на ПК. Оценка при $m_1 = 0,25$, $k_z = 4,6$ дает, $\Phi_0^{(2)} = 0,2$ и $\Phi_\infty^{(2)} = 2,2$. Функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1,1}^{(2)}(z, z', t) &= \frac{15\theta_+(t)}{8l_{1,z}} \exp(-2,5Fo_{e1}^{(2)}) \psi_2(z) \psi_2(z'), \\ F_{e1}^{(2)} &= \frac{a_{1,e}^{(2)}t}{l_{1,z}^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Решение краевой задачи приводится к виду:

$$\tilde{v}_1(z, t) = \tilde{v}_1^{(-)}(t) + 1,25\psi_2(z) \tilde{E}_1^{(2)}(t) \left[\tilde{v}_\infty \delta_+(t') - \frac{d\tilde{v}_1^{(-)}}{dt} \right], \quad (38)$$

где $\tilde{E}_1^{(2)}(t)$ – экспонента из (37).

Модель OM2(B)

Вновь имеем аналогию (с OM2 и с OM1(B)). Для эффективного коэффициента баропроводности $0_{2,5}^{(2)}$ получим аналогичную формулу, оценка коэффициентов в которой дает:

$$0_{2,1}^{(2)} = 0,12a_{10} + 1,20_\infty. \quad (39)$$

Для формулы Грина и решения получим выражения:

$$\tilde{G}_{2,1}^{(2)}(r, r', t) = \frac{\theta_+(t)}{\pi \Delta r_1^2} \exp(-4Fo_{2,e}^{(2)}) \Psi_2(r) \Psi_2(r'),$$

$$Fo_{2,e}^{(2)} = \frac{a_{2,e}^{(2)} t}{\Delta r_1^2}, \quad (40)$$

$$\tilde{v}_1(z, t) = \tilde{v}_1^{(-)}(t) + 1,17 \Psi_2(\rho) \tilde{E}_2^{(2)}(t) \cdot \left[\tilde{v}_\infty \delta_t(t) - \frac{d\tilde{v}_1^{(-)}(t)}{dt} \right], \quad (41)$$

где $\tilde{E}_2^{(2)}(t)$ – экспонента из (40).

7. Выводы

1. Системно-иерархический подход к математическому моделированию процессов фильтрации метана с учетом его десорбции в неоднородных угольных пластах позволяет охватить большое количество практи-

ческих задач расчета метаноотдачи угольных пластов на основе небольшого количества моделей-модулей и ординарных моделей.

2. Использование аналитико-численного метода [15] на основе использования структур решений и приближенных функций Грина имеет ряд преимуществ по сравнению с применяемыми аналитическими и численными методами. Это алгоритмическая и вычислительная относительная простота, унификация расчетов в различных случаях, простота полученных аналитических решений, позволяющих исследовать как динамику процессов, так и влияние на нее параметров модели.

3. Полученные решения могут служить удобной базой для разработки различных инженерных расчетных методик, необходимых для совершенствования многих аспектов угле- и газодобычи подземным способом.

Литература

1. Кричевский, Р. М. О выделении метана из угольного массива в подготовительные выработки [Текст] / Р. М. Кричевский // Бюллетень МакНИИ №16. – Макеевка: МакНИИ, 1947. – С. 22-31.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР [Текст] : колл. монография; под ред. П. Я. Полубариновой-Кочинной. – М.: Наука, 1969. – 546 с.
3. Айруни, А. Т. Основа предварительной дегазации угольных пластов на больших глубинах [Текст] / А. Т. Айруни. – М.: Наука, 1970. – 79 с.
4. Айруни, А. Т. Теория и практика борьбы с рудничными газами на больших глубинах [Текст] / А. Т. Айруни. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
5. Кузнецов, С. В. Природная проницаемость угольных пластов и методы её определения [Текст] / С. В. Кузнецов, Р. Н. Кригман. – М.: Наука, 1978. – 122 с.
6. Рогов, Е. И. Математические модели адаптации процессов и подсистем угольных шахт [Текст] / Е. И. Рогов, Г. И. Грицко, В. Н. Вилегжанин. – Алма-Ата: Наука. Казахская ССР, 1979. – 240 с.
7. Осипов, С. Н. К вопросу аналитического исследования распределения газового давления в угольных шахтах в результате вековой миграции метана [Текст] : сб. научн. раб. / С. Н. Осипов // в кн.: Разработка месторождения полезных ископаемых // Респ. межвед. – Киев: Техніка. – 1970. – Вып. 18. – С. 51-55.
8. Осипов, С. Н. Истечение сорбированного газа из сферического куска угля [Текст] : колл. монография / С. Н. Осипов // в кн.: Поглощение инертных газов в горных выработках. – Тула-Донецк. ТПИ-ВНИИГД, 1969. – С. 129 – 138.
9. Осипов, С. Н. Истечение сорбированного газа в сферическую полость при переменной газопроницаемости среды [Текст] / С. Н. Осипов // в кн.: Поглощение инертных газов в горных выработках. – Тула-Донецк. ТПИ-ВНИИГД, 1969. – С. 138-145.
10. Осипов, С. Н. Истечение сорбированного газа в сферическую полость при переменном коэффициенте газообмена [Текст] : колл. монография / С. Н. Осипов // в кн.: Поглощение инертных газов в горных выработках. – Тула-Донецк. ТПИ-ВНИИГД, 1969. – С. 145-149.
11. Осипов, С. Н. О некоторых газодинамических особенностях прогноза внезапных выбросов угля и газа [Текст] : сб. научн. раб. / С. Н. Осипов // в кн.: Разработка месторождений полезных ископаемых. Респ. межвед. – Киев: Техніка. – 1979. – Вып. 53. – С. 54-61.
12. Тарасов, В. Г. Прогноз газообильности выработок и дегазация шахт [Текст] / В. Г. Тарасов. – М.: Недра, 1973. – 144 с.
13. Колмаков, В. А. Метановыделение и борьба с ним в шахтах [Текст] / В. А. Колмаков. – М.: Недра, 1981. – 134 с.
14. Венгеров, И. Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели [Текст] : моногр. / И. Р. Венгеров // Анализ парадигмы. – Донецк: Норд-Пресс. – 2008. – Т. 1. – 632 с.
15. Венгеров, И. Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели [Текст] : моногр.; / И. Р. Венгеров // Базисные модели. – Донецк: Донбасс. – 2012. – Т. 2. – 684 с.