

Литература

1. Федорец, А. А. Определение коэффициента гидравлического трения в трубопроводах при отсоединении расхода [Текст] / А. А. Федорец, З. Р. Маланчук // Гидравлика и гидротехника. – 1980. – Вып. 31. – С. 58–62.
2. Кравчук, А. М. Движение жидкости в трубопроводах с отсоединенным расходом вдоль пути [Текст] : автор. ... кандид. техн. Наук / А. М. Кравчук. – К., 1985. – 23 с.
3. Животовский, Б. А. К вопросу о расчете трубопроводов с непрерывно меняющимся расходом по длине [Текст] / Б. А. Животовский // Труды университета Дружбы народов им. П. Лумумбы. – 1973. – Вып. 65. – С. 132–137.
4. Мещерский, И. В. Уравнение движения точки переменной массы в общем случае [Текст] / И. В. Мещерский. – М.: Государственное издательство по строительству и архитектуре, 1952. – С. 125–130.
5. Henrik, Walden Mechenika cieczy i garow b inzynierii sanitarnej [Text] / Henrik, Walden, Jezzy, Stsiak. – Arkdy, Warszawa, 1971. – 554 p.
6. Яхно, О. М. Гидродинамический начальный участок [Текст] / О. М. Яхно, В. С. Кривошеев, В. М. Матиега // Черновці, «Зелена Буковина», 2004. – 200 с.
7. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика [Текст] / И. Л. Повх. – М.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
8. Каминер, А. А. Гидромеханика в инженерной практике [Текст] / А. А. Каминер, О. М. Яхно. – Техника, 1987. – 175 с.
9. Яхно, О. М. Основы реологии полимеров [Текст] / О. М. Яхно, В. Ф. Дубовицкий. – Издательское объединение «Вища школа», 1976. – 188 с.
10. Торнер, Р. В. Основные процессы переработки полимеров (теория и методы расчета) [Текст] / Р. В. Торнер. – М.: Химия, 1972. – 456 с.
11. Яхно, О. М. О возможности применения уравнения Мищерского для описания движения неньютоновской жидкости по трубам с изменяющимся расходом [Текст] / О. М. Яхно, Д. В. Колесніков, Н. В. Семинская // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 3, № 7 (63). – С. 28–32.
12. Бенин, Д. М. Влияние формы элементов проточной части на регулиющую способность гидродинамических стабилизаторов расхода [Текст] / Д. М. Бенин // Перспективы науки. – 2010. – № 11 (13). – С. 59–63.

*Представлено аналітичне рішення рівнянь руху в'язкої рідини, що дозволяє враховувати вплив гідродинамічних умов входу в канал на процес розвитку поля швидкостей на початковій ділянці. Визначені граничні умови, властиві течіям робочих середовищ які найбільш часто зустрічається у технологічних процесах. Отримані теоретичні результати процесу течії при різних умовах входу досить точно узгоджуються з експериментальними даними*

*Ключові слова: рішення рівнянь руху, умови входу в гідродинамічний початковий ділянку*

*Представлено аналитическое решение уравнений движения вязкой жидкости, позволяющее учитывать влияние гидродинамических условий входа в канал на процесс развития поля скоростей на начальном участке. Определены граничные условия, присущие течениям рабочих сред наиболее часто встречающихся в технологических процессах. Полученные теоретические результаты процесса течения при различных условиях входа достаточно точно согласуются с экспериментальными данными*

*Ключевые слова: решение уравнений движения, условия входа в гидродинамический начальный участок*

УДК 532.556

# ИССЛЕДОВАНИЯ ГИДРО- ДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ВХОДА В КАНАЛАХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

**С. В. Носко**

Кандидат технических наук, доцент  
Кафедра прикладной гидроаэромеханики и  
механотроники  
Национальный технический университет Украины  
“Киевский политехнический институт”  
пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056  
E-mail: noskosv@ukr.net

## 1. Введение

В настоящее время, требования по увеличению производительности, качеству получаемых промышленных изделий и их себестоимости во многом зависят

от характера и особенностей течения рабочих сред в процессе технологии.

Дестабилизирующие действия, приводящие к инерционности потока с последующей деформации

ей поля скорости и напряжения, могут оказывать ряд факторов, характерных для каждого конкретного технологического процесса, а в некоторых случаях и их сочетание. К этим факторам можно отнести разнообразные местные сопротивления, применяемые в инженерной практике в виде регулирующей и перекрывающей арматуры, изменения формы поперечного сечения и площади каналов, изменяющие в процессе течения физико-механические параметры материала (плотности, вязкости), неизотермичность потока.

Все эти факторы неотделимо связаны с технологическими процессами во многих областях промышленности. В металлургической промышленности при проектировании литниковых систем и разработке ряда задач литья под давлением [1], в химической технологии при переработке полимеров в изделия, экструзии [2]. В связи с этим, совершенствованием вышеприведенных технологических процессов, выбор рациональных конструктивных предложений для разработки и расчета узлов аппаратов неразрывно связано с детальным исследованием гидродинамических особенностей течения рабочих сред на начальном участке, определением его длины и дополнительных потерь давления, вызванных проявлением сил инерции в потоке в геометрически-неоднородных каналах разнообразного технологического оборудования.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Как правило, при описании указанных процессов, считая поток стационарным и ламинарным, используются уравнения движения, неразрывности и баланса энергии [3, 4].

Однако, в этих случаях вязкость является величиной переменной и зависит от температуры рабочего материала  $\nu = \nu(T_p)$  и координат  $\nu = \nu(X, Y, Z)$ . Влияние температуры на ньютоновскую вязкость может быть выражено уравнением Аррениуса [5, 6]:

$$\mu = A e^{E/RT}, \quad (1)$$

где  $A$  – const;  $E$  – энергия активации;  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура жидкости.

Таким образом, в уравнениях движения, в особенности при исследовании течения высоковязких жидкостей, должна учитываться зависимость вязкости от температуры, а, следовательно, вязкость не может быть вынесена из под знака производной.

Теоретический анализ течения ньютоновских и неньютоновских жидкостей с вязкостью, зависящей от температуры, проведен в работах [7, 8]. В данной постановке аналитическое исследование системы дифференциальных уравнений существенно затрудняется. В связи с нелинейностью данных уравнений математические расчеты проведены только для некоторых частных случаев, при упрощающих допущениях. Одно из которых заключается в следующем – в уравнениях движения пренебрегают членами, характеризующими силы инерции, а эпюру скоростей на входе в исследуемый канал считают параболической.

В перечисленных выше факторах, приводящих к инерционному течению вязкой и аномально-вязкой

жидкости в каналах, особое место занимают местные сопротивления, как наиболее часто встречающиеся в инженерной практике и имеющие характерные, присущие только им гидродинамические особенности течения. Размеры участков инерционного течения зависят от дестабилизирующего действия местного сопротивления, связанного с деформацией поля скоростей, возникновением сил инерции, перераспределением напряжений в потоке влияющих на поле давлений.

Аналитическому исследованию развития течения вязких и аномально-вязких жидкостей на гидродинамическом начальном участке посвящены работы многих авторов [9–15]. В работах [9, 10] применим метод линеаризации инерционных участков для получения приближенных решений уравнений движения. Авторы работ [11, 13] совместили решение для пограничного слоя с решением для возмущений полностью развитого течения Пуазейля, которые строятся на участке, расположенном ниже по течению. В исследованиях [14, 15] применен вариационный метод решения уравнений пограничного слоя для неньютоновских жидкостей, подчиняющихся реологическому закону Освальда де Вилля и закону Бингама, соответственно.

За основу приведенных выше теоретических исследований принимают не всегда справедливые допущения о прямоугольности эпюры скоростей на входе в гидродинамический начальный участок, намного упрощающие аналитический подход. Данные допущения недостаточно обоснованы, что приводит к существенным количественным расхождениям с экспериментальными данными.

## 3. Цель и задачи исследования

Исходя из анализа результатов работ по исследованию течения ньютоновских и неньютоновских сред в области местных сопротивлений и учитывая их прикладную значимость, целью настоящей работы является:

1. Разработка аналитического метода решения уравнений, описывающих нестабилизированное течение на начальном гидродинамическом участке с учетом реальных условий входа.
2. Экспериментальное исследование течения вязких и аномально-вязких жидкостей в области местных сопротивлений методом визуализации потока и сопоставление аналитических и опытных результатов.

В связи с тем, что в работе изучаются нестабилизированное течение жидкости в прямоугольном канале, для дальнейших аналитических исследований подобного течения целесообразно привести уравнения движения к условиям данной задачи. Для этого введем следующие предположения:

- течение жидкости в канале стационарное: члены, содержащие производные равны нулю;
- считаем движение двумерным (пренебрегаем влиянием боковых стенок канала на процесс течения): опускаем члены, содержащие составляющую скорости  $U_z$  и ее производных;
- течение изотермическое.

Воспользовавшись методикой, в основе которой лежит сравнение различных членов уравнений движе-

ния по их относительной величине при выводе уравнений Праудтля [16] и пренебрегая массовыми силами, получим уравнение движения и уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\begin{cases} U_x \frac{\partial U_x}{\partial X} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial Y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial Y^2}, & (2) \\ \frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial U_y}{\partial Y} = 0, & (3) \end{cases}$$

где  $U_x$  – составляющая скорости;  $X, Y$  – продольная и поперечная координаты канала соответственно;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – давление;  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Интегрируя уравнение (3) по высоте каналам  $H$ :

$$U_y = -\int_0^H \frac{\partial U_x}{\partial X} + \partial Y, \quad (4)$$

и подставляя (4) в (2) окончательно получаем одно дифференциальное уравнение относительно  $U_x$ :

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial X} - U_y \frac{\partial U_x}{\partial Y} \int_0^H \frac{\partial U_x}{\partial X} \partial Y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial Y^2}, \quad (5)$$

Развитие течения (пограничного слоя) на исследуемом участке канала и асимптотический переход на некоторой длине в параболический профиль Хагена-Пуазейля зависит от гидродинамических условий входа, т. е. от формы эпюры скоростей во входном сечении.

В связи с этим, в качестве граничных условий принимаем:

1. Условие, состоящее в задании закона распределения скорости во входном сечении канала при  $X=0$

$$U_x(Y) = \frac{n_1 + 1}{n_1} U_{xcp} \left[ 1 - \left( \frac{Y}{H} \right)^{n_1} \right], \quad (6)$$

где  $n_1$  – безразмерная постоянная, зависящая от геометрии входного сечения, реологических свойств жидкости и принимающая значение от 1 до  $10^5$ .

Выражением (6) можно описать различные формы эпюр скоростей во входящем сечении участка нестабилизированного течения, расположенного за местными сопротивлениями всевозможных видов.

2. Условие в конце участка гидродинамической стабилизации при  $X=L_H$  (длина участка стабилизации потока)

$$U_x(Y) = \frac{2}{3} U_{xcp} \left[ 1 - \left( \frac{Y}{H} \right)^2 \right], \quad (7)$$

Выражение (7) получено из уравнения (6) для плоского течения ньютоновской жидкости при  $n_1 = 2$  и описывает эпюру скоростей, характерную для полностью развитого, стабилизированного потока.

3. Условие полного прилипания жидкости к ограничивающим канал стенками, при  $Y=0$ , т. е. течение,

при котором образуется тонкий неподвижный слой жидкости у стенки (слой прилипания)

$$U_x(Y) = 0. \quad (8)$$

Решение дифференциального уравнения (5) относительно функции скорости для начального участка  $U_x(Y)$  можно получить, если предположить, что

$$U_x(Y) = U_x^*(Y) + \omega(X, Y), \quad (9)$$

где  $U_x^*(Y)$  – функция скорости для участка со стабилизированным течением;  $\omega(X, Y)$  – так называемый “дефицит” скорости, принимающий максимальное значение на входе в гидродинамический начальный участок ( $X=0$ ) и близкий к нулю в конце участка инерционного течения ( $X=L_H$ ).

Для дальнейшего решения введем следующие безразмерные переменные:

$$\xi_\delta = \frac{Y^2}{H^2}, \quad (10)$$

$$W_\delta = \xi_\delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\delta}. \quad (11)$$

После подстановки новых переменных (10) и (11) дифференциальное уравнение (5) можно привести к виду:

$$\frac{3}{8} \frac{\text{Re}H^2}{D_{np}} \frac{1 - \xi_\delta}{\xi_\delta} \frac{\partial W_\delta}{\partial X} = \frac{\partial^2 W_\delta}{\partial \xi_\delta^2}. \quad (12)$$

Данное дифференциальное уравнение имеет решение:

$$W_\delta = c e^{8 \text{max} D_{np} / 3 \text{Re}H^2} \cdot \Psi_\delta(\xi_\delta), \quad (13)$$

$$\text{где } \Psi_\delta(\xi_\delta) = A_1 \xi_\delta - A_2 \xi_\delta^2 - A_3 \xi_\delta^3 - A_4 \xi_\delta^4 + \dots \quad (14)$$

$c - \text{const}$ .

Коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_4$  являются функциями величины  $m$  в уравнении (13) и определяются из соответствующих алгебраических выражений.

После определения коэффициентов ряда (14) и соответствующего анализа получим следующее уравнения для определения  $m$ :

$$1 - 0.25m + 0.022222m^2 - 0.0010217m^3 - 0.0000287m^4 = 0. \quad (15)$$

Действительные корни этого уравнения будут

$$m_1 = 8.625; \quad m_2 = 11,0625.$$

Значение коэффициентов, соответствующие  $m_1$  и  $m_2$ , представлены в табл. 1.

Интегрируя уравнение (12), определяем величину  $\omega$ :

$$\omega = \int \frac{W_\delta}{\xi_\delta} d\xi_\delta = -\sum_{k=1}^2 C_k e^{-8 \text{max} D_{np} / 3 \text{Re}H^2} d\xi_\delta. \quad (16)$$

Таблица 1  
Значений коэффициентов  $A_6-A_9$  приведены приближено

$A_1$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
$m_1$	1	4.3125	7.6367	8.5885	6.9971	3.9284	1.3229	0.2301	0.0152
$m_2$	1	5.5312	12.042	16.2003	15.6215	9.8167	3.5043	0.6226	0.0413

Величина  $\beta_k = \int_{\xi_8}^1 \frac{\Psi_{k8}(\xi_8)}{\xi_8} d\xi_8$  может принимать следующие значения:

$$\beta_1 = 0.1489 - \xi_8 + 2.1563\xi_8^2 - 2.5456\xi_8^3 + 2.1471\xi_8^4 - 1.3994\xi_8^5 + 0.6547\xi_8^6 - 0.1890\xi_8^7 + 0.0288\xi_8^8 - 0.0017\xi_8^9; \tag{17}$$

$$\beta_2 = 1.1137 - \xi_8 + 2.7656\xi_8^2 - 4.014\xi_8^3 + 0.0501\xi_8^4 - 3.1243\xi_8^5 + 1.6361\xi_8^6 - 0.5006\xi_8^7 + 0.0778\xi_8^8 - 0.0046\xi_8^9; \tag{18}$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий на входе в гидродинамический начальный участок

$$\min \int_{\xi_8}^1 [C_1\beta_1 + C_2\beta_2 + \omega_0(x)]^2 d\xi_8. \tag{19}$$

где  $\omega_0(x)$  – “дефицит” скорости на входе в гидродинамический начальный участок.

Учитывая, что определение параметров  $C_1$  и  $C_2$ , характеризующих условия на входе, из формулы (19) приводит к громоздким выражениям, для практического решения соотношения (19) представлялось в следующем виде:

$$\min \sum_{i=1}^k \left[ C_1 e^{-8mx D_{np}/3ReH^2} \cdot \beta_1(\xi_{i8}) + C_2 e^{-\frac{8mx D_{np}}{3ReH^2}} \cdot \beta_2(\xi_{i8}) + \omega_0(\xi_{i8}) \right]^2, \tag{20}$$

где  $\omega_0(\xi_{i8})$  – значение “дефицита” скорости на входе в гидродинамический начальный участок, при  $X = X_i$  определяемое из выражений (9) и соотношения

$$U_x(Y) = \text{const} \left[ 1 - \left( \frac{Y}{H} \right)^3 \right].$$

Следовательно, определение параметров  $C_1$  и  $C_2$  из выражения (20) сводится к решению системы линейных уравнений. В табл. 2 приведены значения  $C_1$  и  $C_2$  для различных величин  $m$ .

Таблица 2

Значения параметров  $C_1$  и  $C_2$  для различных значений  $m$

$m_i$	$C_1$	$C_2$
1	1.712	-5.334
2	1.225	-0.048
3	3.154	-1.753

Таким образом, определив параметры  $C_1$  и  $C_2$ , можно рассчитать и построить картину развития профиля скорости на гидродинамическом начальном участке исследуемого канала. В качестве примера на рис. 1, а, б, как результат подобного расчета, представлена картина распределения скоростей по длине и сечению прямоугольного канала (после внезапного сужения с отношением площадей  $\frac{S_1}{S_2} = 2$ ) при  $Re = 1500$ , для ньютоновской жидкости (воды). Это видно из приведенных эюр – деформация поля скоростей на гидродинамическом начальном участке происходит по всему сечению канала.

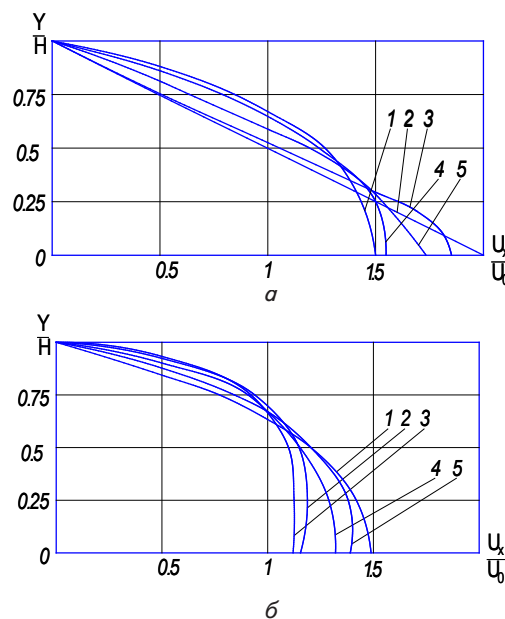


Рис. 1. Профили скоростей на входе и гидродинамический начальный участок: а – при  $m=1$  (1 – квадратичная парабола; 2 – теоретическая парабола; 3 – аппроксимация кривой 2; 4, 5 – развитие профиля скоростей,  $X=0,105$  м и  $X=0,279$  м); б – при  $m=4$  (1 – квадратичная парабола; 2 – теоретическая парабола; 3 – аппроксимация кривой 2; 4, 5 – развитие профиля скоростей,  $X=0,219$  м и  $X=0,495$  м)

Длина участка гидродинамической стабилизации в рассмотренном случае является величиной переменной и зависит от условий входа. На рис. 2 показана зависимость длины участка инерционного течения  $L_H$  от гидродинамических условий во входном сечении канала.

Длина участка инерционного течения определяется зависимостью:

$$L_H = C_H \cdot Re \cdot H, \tag{21}$$

где  $C_H$  – постоянная, зависящая от условий входа в канал и реологических свойств жидкости (по данным [12], для ньютоновской жидкости с равномерным распределением скорости на входе,  $C_H = 0,16$ ).

Указанное значение  $C_H$  получено из составления эюр скорости для полностью развитого течения Хагена-Пуазейля с эюр инерционного течения

жидкости на начальном участке в таком сечении  $X_1$ , где различие с параболической кривой составляет не более 1%. Для исследуемого случая (форма эпюры скорости отличается от прямоугольной) значение констант  $C_H$  может быть изучено следующим образом: уравнение (16) и значение параметров  $C_1$  и  $C_2$  позволяют определить соотношение, связывающее значение длины участка инерционного течения  $L_H$ , число Рейнольдса, ( $C_1, C_2$ ) и необходимую степень развития профиля скоростей (99 %):

$$\frac{[U_x^*(Y) + \omega(X, Y)] - U_x^*(Y)}{U_x^*(Y)} \cdot 100\% \leq 1\%, \quad (22)$$

или

$$\frac{\omega(X, Y)}{1,5U_{cp}(1-\xi_8)} \cdot 100\% \leq 1\%. \quad (23)$$

Выставляя соотношение, при  $X = 0$  имеем

$$\frac{C_1 e^{-\frac{8mL_H D_{np}}{3ReH^2}} \cdot \beta_1(0) + C_2 e^{-\frac{8mL_H D_{np}}{3ReH^2}} \cdot \beta_2(0)}{1,5} \leq 1\%. \quad (24)$$

Решая выражение (24) относительно при различных  $C_1, C_2$  и  $Re$ , получим значение длины гидродинамического начального участка и зависимости от условий входа и числа Рейнольдса.

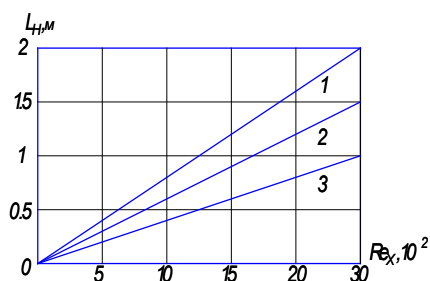


Рис. 2. Зависимость длины гидродинамического начального участка от числа Рейнольдса: 1- $m=4$ ; 2- $m=3$ ; 3- $m=1$

Экспериментальные исследования кинематических характеристик потока при различных условиях входа в гидродинамический начальный участок, следующий за местным сопротивлением, методами визуализации проводились согласно методике, приведенной в работе [17] (рис. 3).

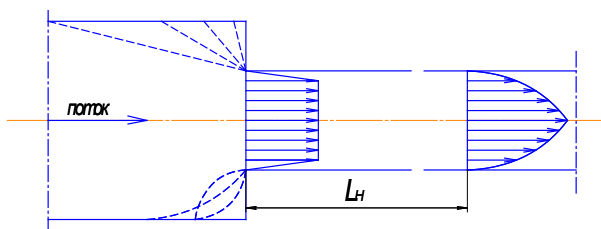


Рис. 3. Экспериментальный канал обеспечивающий различные условия входа в гидродинамический начальный участок

В опытах использовались вязкие и аномально вязкие среды различной концентрации. Индекс течения при этом изменялся в пределах  $1 \leq n \leq 0,386$ . Комбинация экспериментальных каналов, после их соединения, позволяла получить местные сопротивления с различной площадью поперечного сечения – внезапное сужение (75x25 мм; 50x25 мм).

Конструкция данных каналов предусматривала установку в области местных сопротивлений набора вставок, позволяющих получить и другие соотношения площадей поперечных сечений, а также конфузторы с углами раскрытия 10°; 15°; 30°; 45°; 60° и переходы в виде радиусов (вогнутого, выпуклого, по отношению к потоку) и лемнискаты. При этом можно было получить различные гидродинамические входные условия потока.

Сравнение полученных экспериментальных данных с аналитическими результатами процесса течения при различных условиях входа дало хорошее согласование, погрешность формулы (21) для определения длины гидродинамического начального участка составляет не более 12%. Данное расхождение можно объяснить отличием формы эпюр скоростей на входе полученных в опытах (при помощи вставок) и аппроксимированных полиномов (6).

#### 4. Выводы

1. Полученное аналитическое решение уравнений движения вязкой жидкости в безразмерной форме учитывает гидродинамические условия входа в канал и объясняет процесс развития поля скоростей на начальном участке.
2. Принятые граничные условия течения адаптированы к реальной картине течения рабочих сред в каналах технологического оборудования.
3. Показано, что длина участка гидродинамической стабилизации потока и дополнительные потери на нем связаны с проявлением сил инерции, зависят от условий входа и числа Рейнольдса.
4. Результаты исследования могут быть основой для разработки методики гидродинамического расчета, направленной на конструктивно-эксплуатационное совершенствование существующего и проектируемого технологического оборудования.

#### Литература

1. Белопухов, А. К. Технологические режимы литья под давлением [Текст] / А. К. Белопухов. – М.: Машиностроение, 1987. – 240 с.
2. Калинин, Э. Л. Оборудование для литья пластмасс под давлением [Текст] / Э. Л. Калинин, Э. И. Калинин, М. Б. Саковцева. – М.: Машиностроение, 1985. – 256 с.
3. Торнер, Р. В. Основы процессов переработки полимеров [Текст] / Р. В. Торнер. – М.: Химия, 1977. – 462 с.
4. Бернхардт, Э. Переработка термопластичных материалов [Текст] / Э. Бернхардт. – М.: Химия, 1965. – 747 с.
5. Мак-Келви, Д. М. Переработка полимеров [Текст] / Д. М. Мак-Келви. – М.: Химия, 1965. – 442 с.
6. Яхно, О. М. Основы реологии полимеров [Текст] / О. М. Яхно, В. Ф. Дубовицкий. – Киев.: Вища школа, 1976. – 185 с.

7. Бостанджиян, С. А. Неизотермическое течение вязко-пластичной жидкости между двумя параллельными пластинами [Текст] / С. А. Бостанджиян, А. И. Столин / Тепло – и массоперенос. – 1968. – Т. 3. – С. 32–36.
8. Петухов, Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах [Текст] / Б. С. Петухов. – М. : Энергия, 1967. – 411 с.
9. Sparrow, E. M. Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and luets [Text] / E. M. Sparrow, S. H. Lin, T. S. Lundgren // The Physics of Fluids. – 1974. – Vol. 7, № 3. – P. 338–347.
10. Тарг, С. М. Основные задачи теории ламинарных течений [Текст] / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1961. – 370 с.
11. Atkison, B. Measurements of Profiles in Developing Liquid Flows [Text] / B. Atkison, Z. Kemplowski, I. M. Smith // AIChEJournol. – 1972. – Vol. 13, № 1.– P. 17–20.
12. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1974. – 712 с.
13. Motoyshi, T. Steady laminar flowin the inlet region of reetangular duets [Text] / T. Motoyshi, I. Yoshiyuki // Bull JSME. – 1981. – Vol. 24, № 193. – P. 1151–1158.
14. Tomita, Y. Velocity Profile in Viscoelastic Flow of a Tube [Text] / Y. Tomita // Journal of Chem. Engineering of Japan. – 1961. – Vol. 4, № 7. – P. 115–118.
15. Michiyoshi, L. Non-Newtonion Flow in non-circular ducts [Text] / L. Michiyoshi, K. Miruna, Y. Hoskinai // Intern. Chem. Eng. – 1976. – Vol. 6, № 2. – P. 373–380.
16. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика [Текст] / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. Б. Розс. – М. : Физматгиз, 1963. – 727 с.
17. Носко, С. В. Исследование кинематических характеристик потока в каналах литниковой системы, методами визуализации [Текст] / С. В. Носко, В. А. Мосийчук // Вестник Киевского политехнического института. Машиностроение. – 2011. – № 63. – С. 79–82.