Сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца. Перетворюючи координати з використанням конформних відображень відповідних областей на круг, одержано множини розв'язків рівняння Гельмгольца у різних системах координат. Побудовано розв'язки крайових задач для цього рівняння у площині з еліптичним отвором та півплощині

Ключові слова: рівняння Гельмгольца, аналітичний розв'язок рівняння Гельмгольца, конформне відображення, крайові задачі

Сформулирован общий подход к построению решений граничных задач для уравнения Гельмгольца. Преобразовав координаты с использованием конформных отображений соответствующих областей на круг, получены решения уравнения Гельмгольца в различных системах координат. Построены решения граничных задач для этого уравнения в плоскости с эллиптическимм отверстием и полуплоскости

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, аналитическое решение уравнения Гельмгольца, конформное отображение, граничные задачи

УДК.517.53.57

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.27680

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КОМПЛЕКСНИХ ОБЛАСТЯХ

М. А. Сухорольський
Доктор фізико-математичних наук, професор*
E-mail: sukhorolsky@gmail.com

В. В. Достойна
Аспірант*
E-mail: sukhorolsky@gmail.com

Г. В. Івасик
Кандидат фізико-математичних наук, асистент*
E-mail: Ivasyk-G@yandex.ru

*Кафедра вищої математики
Національний університет
«Львівська політехніка»
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Україна, 79013

1. Вступ

Гармонічні рівняння та рівняння Гельмгольца є рівняннями еліптичного типу і описують важливі фізичні процеси гідродинаміки, електростатики, магнітостатики, теплопровідності, теорії пружності та інших. Перше описує стаціонарні процеси, друге – стаціонарні і динамічні процеси. Ефективні розв'язки крайових задач для гармонічного та бігармонічного рівнянь побудовано з використанням методів теорії аналітичних функцій [1, 2]. Їх розв'язання еквівалентно відшуканню комплексних потенціалів відповідних полів чи конформних відображень областей, в яких шукаються розв'язки, на канонічні області (круг, площину тощо). Ці методи не можуть бути застосовані безпосередньо до крайових задач для рівняння Гельмгольца за наявності у ньому доданку, пропорційного шуканій функції.

2. Аналіз літературних даних і постановка задачі

Розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца в окремих канонічних областях одержано з використанням спеціальних циліндричних функцій [1, 3–5]. У роботі [4] розв'язки цього рівняння зображено через функції комплексної змінної у крузі, однак вони не поширені на інші області. У роботі [6] сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца у комплексних областях, який ґрунтується на математичному апараті теорії аналітичних функцій. Замінюючи початкові координати на нові з використанням конформних відображень областей, в яких шукається розв'язок, на круг, одержано множини розв'язків цього рівняння у різних системах координат. Розв'язки зображено у вигляді рядів, членами яких є добутки функцій комплексної змінної та функцій, залежних від модуля цієї змінної.

3. Мета і задачі дослідження

Мета роботи – побудувати з використанням запропонованого у роботі [6] підходу розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца у комплексній площині з еліптичним отвором та півплощині. Для цього необхідно, використовуючи конформні відображення площини з еліптичним отвором на одиничний круг та півплощини на одиничний круг, побудувати системи базисних функцій у просторах функцій, аналітичних у даних областях, та зобразити розв'язки у вигляді сум функціональних рядів за цими системами функцій.

4. Побудова розв'язків рівняння Гельмгольца

Нехай $w=\phi(z)$ – конформне відображення однозв'язної області D комплексної площини $(z=x+iy)$ на круг $|w|\le 1$ комплексної площини $(w=u+iv)$. При цьому границя $L=\partial D$ відображується на коло $K:|w|=1$. Позначимо обернене відображення через $z=\phi^{-1}(w)$. Запишемо рівняння Гельмгольца з використанням змінних $w,\bar{w}$:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w\partial \bar{w}}+U=0 \quad (1)$$

і перейдемо до нових змінних $z=\phi^{-1}(w)$, $\overline{z}=\overline{\phi}^{-1}(w)$. Оскільки $\phi'(z)\neq 0$, $z\in D$, то одержимо таке рівняння

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial \overline{z}}+\phi\overline{\phi}'U=0. \tag{2}$$

Розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, ґрунтуючись на зображенні розв'язків рівнянь з частинними похідними контурними інтегралами [1, 7, 8], можна записати за системою функцій $\left\{w^m J_m^*(w\overline{w})\right\}_0^\infty$,

$$U=\sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\overline{w}), \tag{3}$$

де $J_m^*(w\overline{w})=J_m^*\left(|w|^2\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l |w|^{2l}}{2^{2l+m}(l+m)!l!}$, а c_m – довільні сталі.

Задача 1. Запишемо розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, якщо задані значення шуканої функції на границі круга

$$U(w,\overline{w})\big|_K=f(t),\ t\in K, \tag{4}$$

де $f(t)$ – значення на колі K аналітичної у крузі функції

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m. \tag{5}$$

Підставляючи вираз (3) в умову (4) з урахуванням зображення (5) і рівності $w\overline{w}=1$, яка виконується для точок кола K, одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1)=\sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо $c_m=d_m/J_m^*(1)$ і запишемо розв'язок задачі

$$U=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\overline{w}).$$

Задача 2. Побудуємо розв'язок рівняння (2) в однозв'язній області D, що задовольняє умову

$$U(z,\overline{z})\big|_L=f(t),\ t\in L, \tag{6}$$

де $f(t)$ – значення на L функції $f(z)$, аналітичної в D.

Підставляючи вираз конформного відображення $w=\phi(z)$ у формулу (3), запишемо розв'язок рівняння (2) у вигляді

$$U(z,\overline{z})=\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi}(z)\right]. \tag{7}$$

Значення сталих у співвідношенні (7) знайдемо з рівняння, одержаного підстановкою цього співвідношення в умову (6) з урахуванням рівності $\phi(z)\overline{\phi}(z)=1$, $z\in L$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(t) J_m^*(1)=f(t),\ t\in L. \tag{8}$$

а) Нехай відомий базис простору функцій, аналітичних в області D, – система функцій $\left\{g_n(z)\right\}$, побудована з використанням відображення $w=\phi(z)$ і така, що $\frac{1}{2\pi i}\int_{L^*} g_n(z)\omega_m(z)dt=\delta_{nm}$, де $L^*\subset D$ – відображення кола $|w|=\delta,\ 0<\delta\le 1$; $\left\{\omega_m(z)\right\}$ – система споріднених з базисом функцій. Розвинувши функції $f(z)$ і $\phi^m(z)$ за цим базисом, одержимо з рівняння (8) систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів.

б) Інший підхід до вирішення цієї задачі ґрунтується на використанні виразу відображення границь L і K, $\phi(t)=w$. Тоді рівняння (8) для визначення невідомих коефіцієнтів запишеться у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(1)=f\left[\phi^{-1}(w)\right],\ w\in L. \tag{9}$$

Звідси, розвинувши функцію у правій частині рівняння за степенями змінної і прирівнявши відповідні коефіцієнти рядів, одержимо невідомі коефіцієнти.

Теорема 1. *Нехай $w=\phi(z)$ – конформне відображення однозв'язної області D з границею L на одиничний круг $|w|\le 1$ і f(z) – аналітична в D функція зі значеннями f(t) на границі цієї області. Тоді розв'язок рівняння (2) в області D за умови (6) задається у вигляді суми ряду (7), коефіцієнти якого визначаються з рівняння (9).*

Доведення. Внаслідок оцінок $\left|\phi^m(z)\right|\le|w|^m\le 1$ і $\left|J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi}(z)\right]\right|\le \text{const}$, $z\in D$, ряд (7) збігається рівномірно для системи чисел c_m таких, що $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|c_m|}\le 1$, і його сума задовольняє рівняння (2). Отже, ряд (7) задає множину розв'язків рівняння (2).

Покажемо, що серед цієї множини можна вибрати розв'язок, що задовольняє умові (7). Внаслідок обмеженості функцій $J_m(1)$, $m=\overline{0,\infty}$, а також аналітичності функцій $f(z)$ в області D і $z=\phi^{-1}(w)$ в крузі M, можна підібрати сталі $c_m, m=\overline{0,\infty}$, що збігається відповідний ряд і виконується рівність

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(1)=f\left[\phi^{-1}(w)\right],\ w\in M. \tag{10}$$

Оскільки, функція $f\left[\phi^{-1}(w)\right]$ аналітична у крузі M, то її можна розвинути за степенями змінно,

$$f\left[\phi^{-1}(w)\right]=\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m,\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_m|}\le 1,$$

і підібрати сталі для виконання рівності (10),

$$c_m=\frac{a_m}{J_m^*(1)},\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|c_m|}\le 1.$$

Замінюючи у співвідношенні (10) змінну $w=\phi(z)$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m(z) J_m^*(1)=f(z),$$

а потім, переходячи до границі при $z\to L$, одержимо умову (8).

Задача 3. Запишемо розв'язок рівняння (2) для площини з круговим отвором одиничного радіуса з центром у початку координат. Маємо конформне відображення площини з одиничним отвором на одиничний круг $w=\frac{1}{z}$. Тоді співвідношення (7) запишеться наступним чином

$$U(z,\bar{z})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m}{z^m}J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right).$$

Граничну умову (8) з урахуванням того, що $t=e^{-i\psi}$, $-\pi<\psi\le\pi$, – точка одиничного кола – границі області (площини з отвором), запишемо у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m e^{-im\psi}J_m^*(1)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{-im\psi}.$$

Звідси матимемо $c_0=0,\ c_m=\frac{a_m}{J_m^*(1)},\ m\ge 1$, і запишемо розв'язок задачі

$$U(z,\bar{z})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{J_m^*(1)}\frac{1}{z^m}J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right).$$

Одержаний вираз також задає два дійсні розв'язки, що задовольняють рівняння Гельмгольца.

5. Розв'язок рівняння Гельмгольца для площини з еліптичним отвором

Задача 4. Знайдемо розв'язок рівняння (2) в області D – площині з еліптичним отвором з центром у початку координат і півосями a, b – за виконання умови (6) у формі (8). Відображення області D на одиничний круг і обернене до нього відображення такі:

$$w=\phi(z)=\frac{2R}{z+\sqrt{z^2-c^2}},\ z=\phi^{-1}(w)=\frac{c^2}{4R}w+\frac{R}{w}, \qquad (11)$$

де $\lim_{z\to\infty}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)=\infty$; $2R=a+b$; $c^2=a^2-b^2$.

5. 1. Система функцій

$$\left\{g_n(z)=\phi^{n+1}(z)=\frac{(2R)^{n+1}}{\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^{n+1}}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad (12)$$

– базис [9, 10] простору функцій, аналітичних у площині з еліптичним отвором і таких, що приймають нульові значення у нескінченно віддаленій точці.

Маємо розвинення функції $g_n(z)$ за від'ємними степенями змінної

$$g_n(z)=R^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(n+1)C_{n+2l}^l}{2^{2l}(l+n+1)}\frac{c^{2l}}{z^{n+2l+1}}.$$

Система функцій $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$,

$$\omega_m(z)=\frac{1}{R^{m+1}}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k C_{m-k}^k c^{2k}}{2^{2k}}z^{m-2k},$$

біортогональна зі системою (12),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}g_n(z)\omega_m(z)dz=\delta_{nm},$$

де Γ – замкнутий контур, що охоплює еліпс (обхід відбувається за годинниковою стрілкою).

Зауважимо, що функції $\omega_m(z)$ – поліноми Чебишова другого роду [11]. Якщо $F(z)$ аналітична в області D функція і $F(\infty)=0$, то

$$F(z)=\sum_{m=0}^{\infty}F_m g_m(z),$$

де $F_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)\omega_m(z)dz$.

Наприклад, для степеневих функцій маємо розвинення

$$\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{R^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m C_{m+n}^m c^{2m}}{(2R)^{2m}}g_{2m+n}(z),\ n=0,1,\ldots.$$

Теорема 2. *Якщо функція f(z) аналітична в області D (площині з еліптичним отвором),* $f(\infty)=0$ *і на еліпсі L обмежена так, що* $|f(z)|\le M$, *то ряд цієї функції за системою функцій (12),*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n g_n(z) \qquad (13)$$

збігається рівномірно до неї на множині

$$D^*:\left|\frac{2R}{z+\sqrt{z^2-c^2}}\right|<r,\ 0<r<1.$$

Доведення. Коефіцієнти ряду (13) визначаються за формулою

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}f(z)\omega_n(z)dz, \qquad (14)$$

де $\Gamma^*:\left|\frac{2R}{z+\sqrt{z^2-c^2}}\right|=r_0, 0<r_0<r$, – еліпс, або замінивши

$z=\frac{c^2r_0}{4R}e^{-i\phi}+Rr_0^{-1}e^{i\phi},\ -\pi<\phi\le\pi$, одержимо

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{c^2r_0}{4R}e^{-i\phi}+Rr_0^{-1}e^{i\phi}\right)\omega_n\times$$
$$\times\left(\frac{c^2r_0}{4R}e^{-i\phi}+Rr_0^{-1}e^{i\phi}\right)\left(\frac{c^2r_0}{4R}e^{-i\phi}-Rr_0^{-1}e^{i\phi}\right)d\phi$$

Маємо оцінку [11]:

$$|\omega_m(z)|\left|\sqrt{z^2-c^2}\right|\le\left(\frac{c}{2R}\right)^{m+1}\left[\left(\frac{cr_0}{2R}\right)^{m+1}+\left(\frac{2R}{cr_0}\right)^{m+1}\right],$$

де $\left|\sqrt{z^2-c^2}\right|=\frac{c}{2}\left|\frac{cr_0}{2R}e^{i\phi}-\frac{2R}{cr_0}e^{-i\phi}\right|$. Врахувавши її і обмеженість функції $f(z)$ у виразі коефіцієнтів (14), знайдемо

$$|b_n|\le\frac{M}{2\pi}\left(\frac{c}{2R}\right)^{m+1}\left[\left(\frac{cr_0}{2R}\right)^{m+1}+\left(\frac{2R}{cr_0}\right)^{m+1}\right]\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\le$$
$$\le M\left(\frac{c}{2R}\right)^{m+1}\left[\left(\frac{cr_0}{2R}\right)^{m+1}+\left(\frac{2R}{cr_0}\right)^{m+1}\right].$$

Оскільки параметр R – незмінна величина, а $r_0<1$, матимемо,

$$\left|b_m\right|\le M\left(\frac{c}{2R}\right)^{m+1}2\left(\frac{2R}{cr_0}\right)^{m+1}\frac{r_0}{2R}=\frac{M}{Rr_0^m}.$$

Для функції $g_n(z)$ маємо з урахуванням другої формули (11) таку оцінку: $\left|g_n(z)\right|\le\left|r\right|^{n+1}$. Оскільки $r_0<r$, ряд (13) збігається зі швидкістю геометричної прогресії.

5. 2. Знайдемо розв'язок задачі (2), (8) для площини з еліптичним отвором. Вираз розв'язку (7) перепишемо у вигляді

$$U(z,\overline{z})=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\,g_{m-1}(z)J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi}(z)\right].$$

Умову (8) для визначення сталих c_m подамо ще так

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+1}J_{m+1}^*(1)g_m(t)=f(t),$$

де $f(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\,g_m(t)$. Звідси знайдемо $c_{m+1}=\dfrac{a_m}{J_{m+1}^*(1)}$, $m\ge0$, і, відповідно, запишемо розв'язок задачі

$$U(z,\overline{z})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{J_m^*(1)}g_{m-1}(z)J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi}(z)\right]. \tag{15}$$

Прийнявши в (15) $c=0$, одержимо розв'язок рівняння Гельмгольца для площини з центральним круговим отвором радіуса R.

Для прикладу запишемо розв'язок рівняння (2) у площині з еліптичним отвором за умови

$$U(z,\overline{z})\Big|_L=t^m,\ m=1,2,\dots,\ t\in L, \tag{16}$$

де $t=e^{-i\phi}$, $-\pi<\phi\le\pi$.

Знайдемо значення функцій системи (12) на краю отвора,

$$g_{m-1}(t)=(2R)^m\left(t+\sqrt{t^2-c^2}\right)^{-m}=$$

$$=(2R)^m\left[a\cos\phi+ib\sin\phi+\sqrt{(b\cos\phi+ia\sin\phi)^2}\right]^{-m}=e^{-im\phi}.$$

Отже, функції системи (12), аналітичні в області D, приймають значення степеневих функцій (16) на границі цієї області. Враховуючи ці залежності в (15), одержимо розв'язок задачі

$$U(z,\overline{z})=\frac{1}{J_m^*(1)}\phi^{\tau}(z)J_m^*\left[\phi(z)\overline{\phi}(z)\right].$$

Зауважимо, що степені змінної на еліпсі виражаються через тригонометричні функції аргумента.

6. Розв'язок рівняння Гельмгольца для півплощини

Задача 5. Розглянемо рівняння (2) у півплощині $\operatorname{Im}z>0$, який на осі Ox задовольняє умову

$$U(z,\overline{z})\Big|_{y=0}=f(x), \tag{17}$$

де $f(x)$ – значення на дійсній осі аналітичної у півплощині функції $f(z)$.

Конформні пряме і обернене відображення півплощини $y\ge0$ на одиничний круг $|w|\le1$ задаються формулами

$$w=\phi(z)=\frac{z-ia}{z+ia},\ z=\phi^{-1}(w)=\frac{ia(1+w)}{1-w},\ a>0. \tag{18}$$

6. 1. Ґрунтуючись на відображенні (18) побудуємо відповідні біортогональні системи функцій. Системи степеневих функцій $\left\{w^n\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{w^{-(m+1)}\right\}_{m=0}^{\infty}$ біортогональні на колі $\Gamma:|w|=r<1$, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{w^n}{w^{m+1}}dw=\delta_{nm}$.

Заміняючи тут $w=\dfrac{z-ia}{z+ia}$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)^n\left(\frac{z+ia}{z-ia}\right)^{m+1}\frac{2ia}{(z+ia)^2}dz=$$

$$=\frac{2ia}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{(z-ia)^n}{(z+ia)^{n+1}}\frac{(z+ia)^m}{(z-ia)^{m+1}}dz=\delta_{nm},$$

де $\Gamma^*:\left|\dfrac{z-ia}{z+ia}\right|=r$ – коло.

Звідси знайдемо системи біортогональних на Γ^* функцій:

$$\left\{g_n(z)=\frac{2ia(z-ia)^n}{(z+ia)^{n+1}}\right\},\ \left\{\omega_m(z)=\frac{(z+ia)^m}{(z-ia)^{m+1}}\right\}.$$

При цьому маємо такі залежності:

$$\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)^n=\sum_{k=n}^{\infty}g_k(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)^n=\frac{d}{dz}\sum_{k=n}^{\infty}g_k(z)=\frac{n}{2ia}\left[g_{n-1}(z)-g_n(z)\right],$$

$$(z-ia)^n=(2ia)^n\sum_{k=n}^{\infty}C_k^n g_k(z),\ \frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(z)\omega_n(t),$$

$$g_n(z)=g_n\left(\frac{ia(1+w)}{1-w}\right)=w^n-w^{n+1}. \tag{19}$$

Система функцій $\left\{g_n(z)\right\}$ – базис у просторі функцій $f(z)$, аналітичних у півплощині $\operatorname{Im}z>0$ і $f(\infty)=0$, тобто справедливе твердження.

Теорема 3. *Якщо функція f(z) аналітична у півплощині* $\operatorname{Im}z>0$, $f(\infty)=0$ *і на осі Ox обмежена так, що* $\left|f(z)\right|\le M$, *то ряд цієї функції за системою функцій* $\left\{g_n(z)\right\}$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n g_n(z) \tag{20}$$

збігається рівномірно до неї на множині $D^*:\left|\dfrac{z-ia}{z+ia}\right|<r$, $0<r<1$.

Доведення. Коефіцієнти ряду (20) визначаються за формулою

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} f(z)\omega_n(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} f(z)\frac{(z+ia)^m}{(z-ia)^{m+1}}dz,$$

де $\Gamma^*:\left|\frac{z-ia}{z+ia}\right|=r$ – коло.

Повертаючись тут до змінної w з використанням відповідної формули (18), одержимо

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f\left(\frac{ia(1+w)}{1-w}\right)\frac{dw}{w^{n+1}(1-w)}.$$

Звідси, враховуючи нерівність $|w|=r<1$, випливає оцінка

$$|b_n|\le\frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{|dw|}{|w|^{n+1}|1-w|}\le M_0r^{-n},\ M_0=\text{const}.$$

Для функції $g_n(z)$ маємо з урахуванням останньої формули (19) таку оцінку: $|g_n(z)|\le|w^n-w^{n+1}|=|w|^n|1-w|\le M_1R^n$, де $M_1=\text{const}$, $0<R\le1$.

Якщо $R<r$, тобто $z\in D^*$, то ряд (20) збігається зі швидкістю геометричної прогресії.

6. 2. Знайдемо розв'язок задачі 5. Підставляючи перше співвідношення (18) в умову (17) з урахуванням того, що на лінії L змінні приймають значення $y=0$ і $t=x$, одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left(\frac{x-ia}{x+ia}\right)^m J_m^*(1)=f(x). \quad (21)$$

Вважаємо, що задано розвинення функції $f(z)$ за системою функцій $\{g_n(z)\}$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ng_n(z),$$

яке одержимо з урахуванням формули Шварца [1] і відповідної формули (19)

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-z}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(z)\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\omega_n(x)dx,$$

де $b_n=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\omega_n(x)dx$.

Тоді з умови (21) з урахуванням першого співвідношення (18) знайдемо

$$\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)\sum_{m=0}^{k}J_m^*(1)c_m=\sum_{k=0}^{\infty}b_kg_k(x).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних базових функцій одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів c_m

$$\sum_{m=0}^{k}J_m^*(1)c_m=b_k. \quad (22)$$

Звідси знайдемо $J_0^*(1)c_0=b_0$, $J_1^*(1)c_1=b_1-b_0$, ..., $J_n^*(1)c_n=b_n-b_{n-1}$, ... Отже, розв'язок задачі запишеться у вигляді

$$U(z,\bar z)=\frac{b_0}{J_0^*(1)}J_0^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m-b_{m-1}}{J_m^*(1)}\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)^m J_m^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]. \quad (23)$$

а) Якщо $f(x)=g_0(x)=\frac{ai}{x+ai}=\frac{a^2+axi}{x^2+a^2}$, то

$b_0=1, b_k=0, k=1,\dots,$

і з (23) одержимо

$$U(z,\bar z)=\frac{1}{J_0^*(1)}J_0^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]-$$
$$-\frac{1}{J_1^*(1)}\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)J_1^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right].$$

б) Якщо функція $f(x)$ приймає на інтервалі (α,β) дійсної осі значення рівні одиниці і нуль на іншій частині осі, то знайдемо

$$b_n=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\omega_n(x)dx=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x+ia)^n}{(x-ia)^{n+1}}dx=$$
$$=\frac{1}{\pi i}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2ia)^k\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-ia)^{k+1}}=$$
$$=\frac{1}{\pi i}\left[\ln\frac{\beta-ia}{\alpha-ia}-\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(2ia)^k}{k}\left.\frac{1}{(x-ia)^k}\right|_{\alpha}^{\beta}\right].$$

Умову (21) з урахуванням першої формули (18) і останньої формули (19) можна записати у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m e^{im\psi}J_m^*(1)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left[e^{in\psi}-e^{i(n+1)\psi}\right]$$

або

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m e^{im\psi}J_m^*(1)=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}(b_m-b_{m-1})e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо значення сталих

$$c_0=\frac{b_0}{J_0^*(1)},\ c_m=\frac{b_m-b_{m-1}}{J_m^*(1)},\ m=1,2,\dots,$$

а з (23) одержимо розв'язок задачі

$$U(z,\bar z)=\frac{b_0}{J_0(1)}J_0^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m-b_{m-1}}{J_m(1)}\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right)^m J_m^*\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right].$$

Зауважимо, що дійсна і уявна частини цього розв'язку також задовольняють рівняння Гельмгольца.

7. Висновки

Одержані в роботі результати ілюструють ефективність методів теорії аналітичних функцій для розв'язування крайових задач для рівняння (2); їх можна використати для формулювання та розв'язування крайових задач для цього рівняння в інших однозв'язних областях. Важливим етапом розв'язування задач є відшукання аналітичних в заданих областях функцій, значення яких збігаються з граничними значеннями розв'язків рівняння (2). Побудова системи функцій, яка є базисом простору функцій, аналітичних у відповідній області, суттєво спрощує формулювання та розв'язування крайових задач.

Розглянутий підхід до розв'язання крайових задач для рівняння (2) також поширюється на аналогічні задачі для рівняння Гельмгольца з комплексними коефіцієнтами.

Література

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - М.: «Наука», 1987. – 698 с.
2. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1968. – 512 с.
3. Сухорольський, М. А. Системи розв'язків рівняння Гельмгольца [Текст] / М. А. Сухорольський // Вісник Національного у-ту «Львівська політехніка». Серія фіз.-мат. науки. – 2011. - № 718. – С. 19–34.
4. Korn, G. A. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers [Text] / G. A. Korn, T. M. Korn. – DOVER PUBLICATIONS, INC: Mineola, New York, 2000. - 1130 p.
5. Никифоров, А. Ф. Основы теории специальных функций [Текст] / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Наука, 1974. -304 с.
6. Сухорольський, М. А. Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца [Текст] / М. А. Сухорольський; під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: ІППММ НАН України, 2014. – С. 160–163.
7. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1982. - 488 с.
8. Сухорольський, М. А. Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів [Текст] / М. А. Сухорольський, І. С. Костенко, В. В. Достойна // Вісник ХНТУ. – 2013. - № 2 (47). – С. 323–326.
9. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функцій. Том 2. [Текст] / А. И. Маркушевич. – М.: Наука, 1968. - 624 с.
10. Сухорольський, М. А. Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій [Текст] / М. А. Сухорольський // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 2. – С. 238–254.
11. Paszkowski, S. Zastosowania numeryczne wielomianow i szeregow Czebyszewa [Text] / S. Paszkowski. – Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975. - 481 p.