

В статті досліджується задача про стійкість тришарових неоднорідних прямокутних пластинок в анізотропно опірному середовищі, шари яких виготовлені з різних неперервно неоднорідних матеріалів. Використовуючи гіпотези Кірхгофа-Лява для всієї товщини елемента, отримані системи рівнянь стійкості пластинки. У разі шарнірного закріплення країв пластинки побудовано розв'язок задачі і знайдена формула для визначення критичного навантаження пластинки

Ключові слова: тришарові пластинки, неоднорідний матеріал, пружні характеристики, стійкість, критичне навантаження

В статье исследуется задача об устойчивости трехслойных неоднородных прямоугольных пластинок в анизотропно сопротивляемой среде, слои которых изготовлены из различных непрерывно неоднородных материалов. Используя гипотезы Кирхгофа-Лява для всей толщины элемента, получены системы уравнений устойчивости пластинки. В случае шарнирного закрепления краев пластинки построено решение задачи и найдена формула для определения критической нагрузки пластинки

Ключевые слова: трехслойные пластинки, неоднородный материал, упругие характеристики, устойчивость, критическая нагрузка

УДК 539.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.36245

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК В АНИЗОТРОПНО СОПРОТИВЛЯЕМОЙ СРЕДЕ

Б. Э. Исалы

Докторант

Кафедра "Инженерная механика"

Кавказский университет

ул. Гасан Алиева, 120, г. Хырдалан,

Баку, Абшерон, Азейбарджан

E-mail: fisayev@qu.edu.az

1. Введение

В последние годы в различных отраслях техники: машиностроении, судостроении, строительстве сооружений различного назначения, широко используются элементы конструкции типа тонкостенных пластин и оболочек различного оертания.

Как известно, в последние годы большое применение получили многослойные конструкции. Это, в первую очередь, связано с интенсивным использованием в промышленности новых композитных – искусственных материалов. Применение в строительстве и других областях техники подобных конструкций ставит перед конструктором-исследователем повышенные требования к оценке прочности, устойчивости и амплитудно-частотных характеристик, так как при различных условиях работы и режимах нагружения возникает ряд вопросов, которые требуют решения новых задач напряженно-деформированного состояния и определения критических параметров [1].

Поэтому возникает необходимость учета влияния реальных физико-механических свойств материала слоев конструкции, режима и условия их работы и построения новых эффективных методик расчета, в которых учитываются вышеуказанные специфические особенности [2].

Многие вопросы прочности и устойчивости многослойных элементов конструкций, работающих в пределах упругости, в литературе исследованы достаточно.

В этих работах в основном рассмотрены элементы конструкций с изотропными однородными слоями [3].

Во многих случаях слоистые конструкции изготавливаются из неоднородно-упругих и неупругих материалов. Причиной проявления неоднородности являются технология изготовления конструкций, влияние нейтронного облучения и элементарных частиц, термическая обработка, неоднородность составов и т. д.

В зависимости от процесса изготовления и геометрии конструкции, упругие характеристики могут зависеть от одной или нескольких координат точек тела.

Вопросы устойчивости и колебаний слоистых конструкций с учетом неоднородности в литературе изучены недостаточно. Поэтому в данной статье приводится постановка и решение задачи об устойчивости трехслойных неоднородных прямоугольных пластинок, которые находятся в анизотропно сопротивляемой среде.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В статье [4] рассматривается модифицированный вариант теории Кирхгофа, для исследования методом граничных элементов пластин, которые находятся на двухпараметрическом основании.

В [5] рассматривается задача о прочности упругих стержней на двухпараметрическом упругом основании методом конечных элементов.

В статье [6] исследуется устойчивость и закритическое поведение слоистых композитных прямоугольных пластинок, подвергнутых неоднородным по ширине в плане нагрузкам.

В [7] исследуется задача о закритическом поведении пластины переменной толщины из композитных материалов на основе метода конечных элементов с использованием метода возмущений.

В статье [8] рассматривается задача об устойчивости трехслойных неоднородных ортотропных пластинок, которые находятся на неоднородно упругом основании.

В [9] исследуется задача о нелинейной устойчивости и закритическом поведении круговых цилиндрических оболочек из функционально-градиентного материала под действием эксцентрических нагрузок.

В статье [10] исследуется закритическое поведение слоистых пластинок из функционально градиентного материала с учетом деформации поперечных сдвигов и нелинейных кинематических соотношений Кармана.

Рассмотрим трехслойную прямоугольную пластинку, изготовленную из неоднородного упругого материала, которая находится в анизотропно сопротивляемой среде. Координатная система выбрана следующим образом: оси OX и OY расположены в срединной плоскости, среднего слоя пластинки, ось OZ – направлена перпендикулярно им.

Связь между компонентами напряжений и деформаций на основе обобщенного закона Гука имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^i &= \lambda_{11}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{12}^i \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22}^i = \lambda_{21}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{22}^i \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12}^i &= \lambda_{33}^i \varepsilon_{12} \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координаты толщины т. е.:

$$\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_i^k(z). \quad (2)$$

Используем гипотезу Кирхгофа–Лява для всей толщины элемента пластинки:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} - zX_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22} - zX_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12} - zX_{12}, \quad (3)$$

где ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} и x_{11} , x_{22} , x_{12} – бесконечно малые изменения деформации и кривизны срединной плоскости.

Как известно, компоненты усилий и моментов вычисляются по следующим формулам :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 dz, \\ M_{ij} &= \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 z dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где h_1 , h и h_2 – толщины соответствующих слоев. С учетом (1), (3) из (4) получим:

$$T_{11} = \bar{\lambda}_{12}^2 A_{11}^0 \varepsilon_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^0 \varepsilon_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^1 x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 A_{11}^1 x_{22}, \quad (5)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^1 \varepsilon_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{11}^1 \varepsilon_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^2 x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^2 x_{22}. \quad (6)$$

В этих формулах A_{ij}^k – обобщенные жесткостные характеристики рассматриваемой пластинки.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является постановка задачи устойчивости трехслойных неоднородных прямоугольных пластинок в анизотропно сопротивляемой среде в общем виде и построение решения задачи устойчивости шарнирно закрепленной по всем краям прямоугольных пластинок при двухстороннем сжатии.

Здесь также будут исследованы влияние параметров неоднородности материала слоев пластинки и параметров анизотропии упругого основания на значение критических нагрузок рассматриваемой пластинки.

Для достижения этой цели решались следующие задачи:

1. В общем случае получение выражений для усилий и моментов и составление системы уравнений устойчивости рассматриваемой трехслойной пластинки. При этом для упругого основания принималась трехпараметрическая модель анизотропного сопротивления.

2. Построение решения задачи устойчивости рассматриваемой трехслойной пластинки при шарнирном закреплении всех краев и при двухстороннем сжатии.

3. Для случая, когда упругие характеристики материала слоев пластинки линейным образом зависят от координат толщины, выполнение численных расчетов и определение области устойчивости пластинки.

4. Получение уравнений устойчивости пластинки

Как известно [2], уравнения устойчивости прямоугольных пластинок состоит из следующих :

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ + 2T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K(w) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (9)$$

здесь для основания принимается модель анизотропного сопротивления следующего вида:

$$K(w) = K_0 W - K_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad (10)$$

здесь K_0 , K_1 , K_2 – коэффициенты анизотропии упругого основания.

Из системы (7) видно, что эти уравнения будут удовлетворены тождественно, если ввести функцию напряжений F следующими соотношениями:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{12} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

Для преобразования уравнений (8), (9) необходимо виду, что нужно выразить e_{ij} через T_{ij} и x_{ij} из соотношений (5). Тогда после некоторых преобразований из (5) находим:

$$\begin{aligned} e_{11} &= a_{11}T_{11} + a_{12}T_{22} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{22}, \\ e_{22} &= a_{21}T_{11} + a_{22}T_{22} + b_{21}x_{11} + b_{22}x_{22}, \\ e_{12} &= a_{33}T_{12} + b_{33}x_{12}. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в выражениях (6) для моментов, получим:

$$\begin{aligned} M_{11} &= r_{11}T_{11} + r_{12}T_{22} + R_{11}x_{11} + R_{12}x_{22}, \\ M_{22} &= r_{21}T_{11} + r_{22}T_{22} + R_{21}x_{11} + R_{22}x_{22}, \\ M_{12} &= r_{33}T_{12} + R_{33}x_{12}. \end{aligned} \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , r_{ij} , R_{ij} выражаются через обобщенные жесткостные характеристики пластинки.

Подставляя выражения (12), (13) в уравнения (8) и (9), после некоторых преобразований получим следующую систему уравнений устойчивости рассматриваемой пластинки:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \\ + D_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \\ + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ d_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + d_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + d_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \end{aligned}$$

Здесь d_i и D_i выражаются через обобщенные жесткостные характеристики пластинки.

6. Решение задачи устойчивости пластинки при двухстороннем сжатии

Рассмотрим задачу устойчивости рассматриваемой пластинки при двухстороннем сжатии ($T_{12}=0$). В этом случае система устойчивости (14) и (15) получится в виде:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + D_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + D_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} d_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + d_{13} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + d_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

При шарнирном закреплении краев пластинки для прогиба и функции напряжения можно принять следующие выражение:

$$\begin{aligned} w &= w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \Phi &= \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь a и b – длина и ширина, m, n – число полуволн по сторонам пластинки.

Подставляя (18) в уравнение (17), получим:

$$\begin{aligned} W_{mn} &= -D_0 \Phi_{mn}, \\ D_0 &= \frac{d_{21} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + d_{23} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + d_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4}{d_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + d_{13} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + d_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4}. \end{aligned}$$

Подставляя (18) в уравнение (17) после некоторых преобразований получается следующее характеристическое уравнение для определения комбинации критических нагрузок:

$$\begin{aligned} T_{11}(1 + \eta^2 \alpha) &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ D_{11} - D_{mn}^0 D_{21} + \eta^2 (D_{13} - D_{mn}^0 + D_{23}) + \eta^4 (D_{12} - D_{mn}^0 \cdot D_{22}) \right\} + \\ &+ K_0 \left(\frac{a}{\pi m} \right)^2 + K_1 + K_2 \eta^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\eta = \frac{na}{mb}, \quad \alpha = \frac{T_{22}}{T_{11}}.$$

Если рассматриваемая пластинка является квадратной, тогда из (19) получается ($m=n=1, a=b$):

$$\begin{aligned} T_{11}(1 + \alpha) &= \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ D_{11} D_{11} + D_{13} + D_{12} - D^0 (D_{21} + D_{23} + D_{22}) \right\} + \\ &+ K_0 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 + K_1 + K_2, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{Здесь } D^0 = \frac{d_{21} + d_{23} + d_{22}}{d_{11} + d_{13} + d_{12}}.$$

При конкретных видах функций неоднородности материала слоев, критическая нагрузка рассматриваемой пластинки определяется на основе (20).

7. Численные расчеты и анализ комбинации критических нагрузок

Для проведения численных расчетов, функции неоднородности материала слоев принимались в следующем виде:

$$a_{11}^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1}, \quad a_{11}(z) = 1 + \mu \frac{z}{h}, \quad a_{11}^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2}. \tag{21}$$

Результаты численных расчетов представлена на рис. 1.

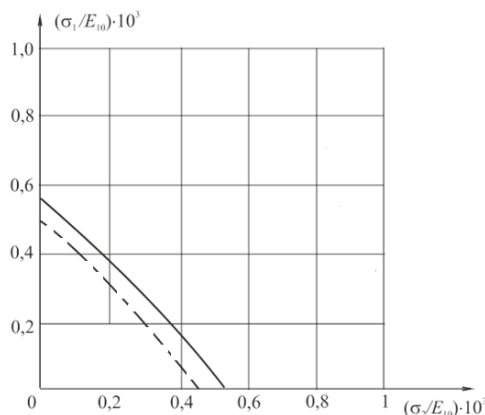


Рис. 1. График области устойчивости пластинки построенной на основе формулы (20). Здесь для параметров анизотропии основания и параметров неоднородности материала слоев приняты следующие значения: $K_0=6.48 \cdot 10E4KN/m^3$, $K_1=K_2=2250.0 KN/m$; $----- \mu_1=\mu_2=0$; $———— \mu_1=\mu_2=1, \mu=0.5$

Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной задачи для однородной пластинки.

8. Выводы

В статье дана постановка задачи и получена система уравнений устойчивости трехслойных неоднородных прямоугольных пластинок в анизотропно сопротивляемой среде. Получено решение задачи устойчивости трехслойных пластинок при двухстороннем сжатии и найдена формула для определения комбинации критических нагрузок. Данная формула описывает области устойчивости рассматриваемой трехслойной квадратной пластинки при двухстороннем сжатии.

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что неоднородность материала слоев пластинки может существенно влиять на критические параметры пластинки. В частности для принятых значений параметров критическая нагрузка увеличивается на 6–10 % от однородного случая.

Литература

1. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел [Текст] / В. А. Ломакин. – М. изд-во МГУ, 1978. – 432 с.
2. Вольмир, А. С. Устойчивости деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М. Наука, 1967. – 984 с.
3. Алфутов, Н. А. Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М., Машиностроение, 1984. – 264 с.
4. El-Zafrany, A. A modified Kirchhoff theory for boundaryelement analysis of thin plates resting on two-parameter foundation [Text] / A. El-Zafrany, S. Fadhil // Engineering Structures. – 1996. – Vol. 18, Issue 2. – P. 102–114. doi: 10.1016/0141-0296(95)00097-6.
5. Gülkan, P. An exact finite element for a beam on a twoparameterelastic foundation [Text] / P. Gulkan, B. N. Alemdar // Structural Engineering and Mechanics. – 1999. – Vol. 7, Issue 3. – P. 259–276. doi: 10.12989/sem.1999.7.3.259.
6. Panda, S. K. Buckling and postbuckling Behavior Cross-Ply Composite Plate Subjected to Nonuniform in-Plane loads [Text] / S. K. Panda, S. Ramachandral // Journal of Engineering Mechanics. – 2011. – Vol. 137, Issue 589. – P. 1061–1070. doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000258.
7. Rahman, T. Postbucklink analysis of variable stinffnesscomposite plates using a finite element-based perturb ationmethod [Text] / T. Rahman, S. T. Ijsselmuinden, M. M. Abdalla, E. L. Jansen // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2011. – Vol. 11, Issue 04. – P. 735–753. doi: 10.1142/s0219455411004324.
8. Isayev, F. Q. The stability of the three-layered non-homogeneous orthotropic elastic plates resting on the variable elastic foundation [Text] / F. Q. Isayev, S. N. Qaraisayev, B. E. Karimova // Proceedings of the International Symposium on Advanced in Applied Mechanics and Modern Information Technology. Baku, 2011. – P. 192–197.
9. Dung, D. V. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure [Text] / V. D. Dao, L. K. Hoa // Thin-Walled Structures. – 2013. – Vol. 63. – P. 117–124. doi: 10.1016/j.tws.2012.09.010.
10. Upadhyay, A. K. Post-buckling analysis of skew plates sujected to combined in-plane loading [Text] / A. K. Upadhyay, K. K. Shulka // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225, Issue 10. – P. 2959–2968. doi: 10.1007/s00707-014-1205-2.