

В роботі розглядаються питання кількісної оцінки впливу ефекту квантування коефіцієнтів дискретного косинусного перетворення (ДКП) на якість стиснених JPEG зображень. Для оцінки якості зображень використовується показник пікового відношення сигнал/шум, PSNR. Запропонована методика, яка дозволяє, ґрунтуючись на різних статистичних моделях ДКП коефіцієнтів, спрогнозувати величину результуючих спотворень JPEG зображення, спричинених компресією зображення із заданим рівнем якості

Ключові слова: JPEG зображення, якість, оцінка, компресія, ДКП коефіцієнти, ймовірнісний розподіл

В работе рассматриваются вопросы количественной оценки влияния эффекта квантования коэффициентов дискретного косинусного преобразования (ДКП) на качество сжатых JPEG изображений. Для оценки качества изображений используется показатель пикового отношения сигнал/шум, PSNR. Предложена методика, позволяющая, основываясь на различных статистических моделях ДКП коэффициентов, предсказывать величину результирующих искажений JPEG изображения, возникающих при компрессии изображения с заданным уровнем качества

Ключевые слова: JPEG изображение, качество, оценка, компрессия, ДКП коэффициенты, вероятностное распределение

УДК 621.391.837 : 51-74

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.55978

ВРАХУВАННЯ СТРУКТУРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗОБРАЖЕННЯ ПРИ ОЦІНЮВАННІ ЯКОСТІ СТИСНЕНИХ JPEG ЗОБРАЖЕНЬ

М. В. Родигін

Кафедра телекомунікаційних систем*

E-mail: rmv.k125@gmail.com

О. В. Федоров

Старший викладач

Кафедра мереж зв'язку*

E-mail: father80@mail.ru

*Національний університет радіоелектроніки
пр. Ленина, 14, м. Харків, Україна, 61116

1. Вступ

Використання цифрових технологій дозволяє людині отримувати та швидко обробляти великі обсяги інформації, компактно і надійно зберігати її, та швидко і легко отримувати доступ до неї. На даний час, людина вже навчилася перетворювати основні види інформації, що може сприймати людина, у цифровий вигляд та навпаки.

Звичайно, це призвело до стрімкого збільшення обсягів мультимедійних даних. Одночасно, розвиток та розповсюдження ширококутних мереж сприяли створенню великої кількості мультимедійних послуг. Найбільш популярними з цих послуг є послуги передачі графічних цифрових даних, оскільки 80 відсотків всієї інформації людина отримує аудіо-візуальним шляхом. Кінцева якість зображення або мультимедійної послуги, так звана якість враження (quality of experience, QoE) [1], впливає не тільки на кількість сприйнятої людиною інформації, але і на комерційний успіх того чи іншого мультимедійного сервісу.

Основною проблемою, з якою стикається будь-який провайдер мультимедійних послуг, є необхідність передавати дуже великі об'єми інформації. Для вирішення цієї проблеми застосовують стиснення із втратами інформації. Методи стиснення із втратами хоча і не забезпечують зберігання ідеально точного зображення, але за допомогою вивчення психофізичного сприйняття зображення людиною, були отримані методи, що за рахунок незначного для сприйняття людини спотворення, дозволяють значно збільшити

коефіцієнт стиснення в порівнянні із методами стиснення без втрат.

Зазвичай методи стиснення із втратами працюють у просторі деякого перетворення, що має властивість компактифікувати енергію перетвореного сигналу [2]. Наприклад, для формату JPEG [3] таким перетворенням є дискретне косинусне перетворення (ДКП), а в форматі JPEG 2000 використовується дискретне вейвлет перетворення. Варто зазначити, що запропоновані нещодавно мультимедійні формати H.264, H.265, VP9, WebP також будуються навколо ДКП.

На даний час, одним з найпопулярніших форматів зображень є формат JPEG. Цей формат підтримується майже всіма операційними системами без необхідності встановлення додаткового програмного забезпечення. Отже, без перебільшення, можна стверджувати, що формат JPEG є основним для зберігання растрових зображень із втратами.

Застосування методів стиснення із втратами інформації передбачає виникнення спотворень, тож актуальною є задача оцінювання рівня цих спотворень. У випадку використання ДКП перетворення, основною задачею при оцінюванні якості, є вибір статистичної моделі розподілу ДКП коефіцієнтів зображення, а також вибір методів оцінювання параметрів цієї моделі.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Будуючи нові та аналізуючи наявні алгоритми компресії зображень, або стеганографічні алгоритми,

ми стикаємось з необхідністю прогнозування якості зображення, що зазнало змін в просторі ортогонального перетворення, асоційованого з певним форматом зображення. Можна поставити і обернену задачу: маючи тільки стиснене зображення, оцінити його якість за тим чи іншим показником. В будь-якому разі, точність прогнозування (оцінювання) безпосередньо залежить від точності апроксимації емпіричного розподілу коефіцієнтів ортогонального перетворення. Отже задача прогнозування (оцінювання) якості зображення при використанні стиснення на основі ДКП неодмінно приводить до задачі вибору статистичної моделі ДКП коефіцієнтів.

Якщо, відповідно до алгоритму роботи JPEG, розбити зображення на блоки розміром 8×8 пікселів, а потім застосувати до них двомірне ДКП, для кожного блоку отримаємо його частотне представлення. Побудувавши гістограму розподілу кожної з частотних складових можна зауважити, що для більшості натуральних зображень емпірична щільність імовірності АС ДКП коефіцієнтів, тобто всіх коефіцієнтів за винятком постійної складової, симетрична відносно нуля. Враховуючи цю властивість, авторами ранніх робіт [4, 5] пропонувалося застосовувати нормальний розподіл та розподіл Коші для статистичного опису ДКП коефіцієнтів, але такі моделі забезпечують невисоку точність апроксимації у порівнянні з іншими можливими варіантами. На практиці доволі часто використовується апроксимація за допомогою розподілу Лапласа.

В роботі [6] зроблена чи не найперша спроба обґрунтування зі статистичної точки зору доцільності вибору саме розподілу Лапласа. Основна ідея роботи [6] полягає у використанні подвійної стохастичної моделі, згідно з якою, вважаються випадковими не тільки ДКП коефіцієнти, але і дисперсія цих коефіцієнтів. В найбільш типових випадках, коли розподіл дисперсії допускає апроксимацію або експоненційним, або однобічним нормальним розподілом, подвійна стохастична модель приводить до розподілу Лапласа для ДКП коефіцієнтів. Lam і Goodman наголошують, що у загальному випадку, і для досягнення більшої точності апроксимації варто використовувати узагальнений гаусів розподіл. Зокрема, приклад використання узагальненого гаусіва розподілу міститься в роботі [7].

Подальший розвиток ідей, представлених в [6], можна знайти в роботі [8]. Автори даної роботи, діючи в рамках подвійної стохастичної моделі, і виходячи із справедливості припущення про гамма розподіл дисперсії ДКП коефіцієнтів, отримали співвідношення для щільності ймовірності розподілу самих ДКП коефіцієнтів, виражене в термінах модифікованих функцій Бесселя. Зауважимо, що в наслідок громіздкості даної формули, працювати з нею аналітичними методами вкрай незручно.

Альтернативний підхід до статистичного моделювання поведінки АС ДКП коефіцієнтів, міститься в роботі [9]. Зокрема в цій роботі пропонується модель ДКП коефіцієнтів у вигляді узагальненого розподілу Коші [9,10]. Варто зазначити, що спосіб, у який параметризується узагальнений розподіл Коші при його використанні в задачах обробки зображень, дещо відрізняється від прийнятого в математичній статистиці [11].

На даний час існує декілька підходів до визначення якості зображень та відео послідовностей. Згідно першому підходу, виконується суб'єктивне оцінювання групою залучених експертів. Методологія суб'єктивного тестування була стандартизована в специфікації ITU [12]. Таким чином, суб'єктивне тестування набуло рис відновлюваності та перевірюваності. Альтернативний підхід полягає у використанні об'єктивних метрик якості зображень, найпоширенішою з яких є PSNR, пікове відношення сигнал/шум. Дана метрика ґрунтується на значенні середньоквадратичного відхилення перетвореного зображення від оригінального.

Досить змістовний аналіз різноманітних метрик міститься в [13, 15]. Варто зазначити, що незважаючи на широке використання PSNR, відомо, що ця метрика не повністю відображає особливості сприйняття зображень людиною, тобто особливості зорової системи людини. Більш точною за цим критерієм є метрика структурної подібності, SSIM, запропонована Bovik [14, 15].

Загальні підходи до визначення шуму квантування напівтонових зображень розглядаються, наприклад, в роботі [16]. Класичний підхід до розв'язання задачі оцінювання PSNR стисненого зображення міститься в роботі [17]. Автори згаданої роботи, виходячи з припущення про справедливість розподілу Лапласа для ДКП коефіцієнтів, отримали співвідношення, що дозволяє розрахувати оцінку PSNR маючи тільки стиснене зображення, тобто оцінювання виконується без залучення оригінального зображення. При цьому невідоме значення параметру форми розподілу Лапласа розраховують по вибірковій дисперсії значень квантованого АС ДКП коефіцієнту. Інший підхід до визначення параметру форми розподілу Лапласа при сліпому оцінюванні PSNR стисненого зображення можна знайти у статті [18]. Параметр оцінюється шляхом комбінованого застосування методів максимальної правдоподібності та лінійного передбачення, здійснюваного на основі кореляції між сусідніми значеннями ДКП коефіцієнтів.

Інтуїтивно зрозуміло, і це підтверджується експериментальними дослідженнями, що форма емпіричного розподілу ДКП коефіцієнтів визначається структурними особливостями певного зображення. Наприклад, для зображень, що містять у своєму складі суттєві області монотонності, широко вживаний для статистичного моделювання ДКП коефіцієнтів розподіл Лапласа погано узгоджується з емпіричними даними, отже забезпечує неприйнятну точність прогнозування (оцінювання) PSNR. Навпаки, для зображень з ярко вираженими текстурними ознаками, модель Лапласа добре спрацьовує. Таким чином, для коректного врахування структурних властивостей зображення при оцінюванні якості стиснених JPEG зображень слід використовувати альтернативні моделі розподілу ДКП коефіцієнтів. Ефективне застосування таких моделей можливе лише за умови, що вони не будуть надто складними та матимуть економні з обчислювальної точки зору методи оцінювання їх параметрів. Отже, необхідність пошуку, задовольняючих означеним вище вимогам, статистичних моделей та методів оцінювання їх параметрів для покращення точності оцінювання якості зображення при використанні стиснення на

основі ДКП, зумовлює доцільність проведення досліджень в цьому напрямку.

В даній роботі, всі дослідження будуть проводитися із зображеннями формату JPEG, але в наслідок того, що більшість сучасних форматів зберігання зображень та відео побудовані навколо ДКП, результати досліджень будуть дійсними і для них.

3. Ціль та задачі дослідження

Мета цієї роботи – розробити універсальну методику оцінювання величини спотворень, що виникають в наслідок JPEG компресії зображень будь-якого структурного складу, а саме: монотонних і текстурних. Ключовою особливістю методики повинно бути залучення статистичних методів для розрахунку дисперсії шуму квантування ДКП коефіцієнтів, а при визначенні якості зображень слід використовувати метрику PSNR.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- сформулювати основні вимоги до вибору статистичної моделі ДКП коефіцієнтів та проаналізувати доцільність використання певної статистичної моделі для апроксимації розподілу ДКП коефіцієнтів зображення в залежності від його структурних властивостей;
- формалізувати алгоритм, який, виходячи з припущення про статистичний розподіл ДКП коефіцієнтів початкового зображення, дозволить отримати співвідношення для розрахунку PSNR стисненого JPEG зображення;
- ґрунтуючись на моделях ДКП коефіцієнтів у вигляді двобічної гама розподілу та узагальнено розподілу Коші отримати зручні вирази для обчислення дисперсії шуму квантування ДКП коефіцієнтів JPEG зображення.

4. Статистичні моделі ДКП коефіцієнтів в задачі оцінювання якості стиснених JPEG зображень

4. 1. Компресія в JPEG

Розглянемо процеси, що відбуваються при стисненні JPEG зображень. Основні етапи, що виконуються при компресії зображення за алгоритмом JPEG, представлені на рис. 1.



Рис. 1. Основні етапи роботи алгоритму JPEG

Як видно з рис. 1, спочатку виконується відображення кольорного простору RGB у YCbCr, в якому компонента яскравості Y, та кольорні компоненти незалежні. Далі, якщо зображення кольорове, виконується субдискре-

тизація, тобто зменшення роздільної здатності кольорних сигналів порівняно із сигналом яскравості, оскільки людське око більш чутливе до зміни яскравості, ніж до зміни кольору. На наступному етапі виконується двомірне ДКП, яке являє собою перетворення масиву пікселів в масив частотних коефіцієнтів. Це перетворення зворотне з точністю до помилок округлення.

У форматі JPEG ДКП перетворення застосовується до блоків 8x8 пікселів. Формули прямого та зворотного перетворення мають вигляд:

$$S(u,v) = 4^{-1} C(u) C(v) \times \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 p(x,y) \cos[(2x+1)\pi u / 16] \cos[(2y+1)\pi v / 16];$$

$$p(x,y) = 4^{-1} \sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 C(u) C(v) S(u,v) \times \cos[(2x+1)\pi u / 16] \cos[(2y+1)\pi v / 16], \quad (1)$$

де $S(u,v)$ – значення ДКП коефіцієнту з індексами (u,v) , $p(x,y)$ – значення пікселю блоку 8x8 з індексами (x,y) і

$$C(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & \text{якщо } u = 1, \\ 1, & \text{якщо } u > 1. \end{cases}$$

Зауважимо що ДКП перетворення має властивість компактифікувати енергію перетворюваного сигналу [2].

Важливим етапом стиснення є квантування ДКП коефіцієнтів блоків 8x8 за правилом:

$$S_Q(u,v) = \text{round}[S(u,v) / Q(u,v)] \cdot Q(u,v), \quad (2)$$

де $S_Q(u,v)$ – результат квантування, $S(u,v)$ – відповідний коефіцієнт ДКП, $Q(u,v)$ – відповідний елемент таблиці квантування, $\text{round}(\cdot)$ – функція округлення до найближчого цілого.

При стисненні зображення обирається таблиця квантування відповідна до показника якості зображення, який звичайно лежить у межах від 0 до 100. Квантування застосовується незалежно до кожного з 64 елементів матриці ДКП коефіцієнтів, причому кожен елемент цієї матриці може квантуватися з різним кроком. Операція квантування незворотна та призводить до виникнення спотворень зображення.

В результаті квантування багато елементів матриці округлюються до нуля. Це створює умови для ефективного ентропійного кодування. Остання фаза процесу стиснення полягає в застосуванні алгоритму ентропійного кодування.

4. 2. Методика оцінювання PSNR стисненого зображення

Для вимірювання рівня спотворень, що виникають в результаті стиснення зображень, будемо традиційно використовувати PSNR, дБ:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10}(255^2 / \sigma_c^2), \quad (3)$$

$$\text{де } \sigma_c = \sqrt{(M \cdot R)^{-1} \sum_{x,y=1}^{M,R} (p(x,y) - p^*(x,y))^2}$$

– середньоквадратичне відхилення оригінального зображення p від перетвореного p^* ; M, R – розміри зображення.

В подальшому, будемо виходити із припущення, що ДКП коефіцієнти блоків 8×8 , індекси яких співпадають, є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Розглянемо ситуацію, коли початкові значення ДКП коефіцієнтів квантуються згідно з правилом (2). Крок рівномірного квантування позначимо через q , а щільність ймовірності коефіцієнта, що квантується через $f(x)$, $f(x) = f(-x)$. Виходячи із рівняння

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} f(x) dx = K \quad (4)$$

знайдемо ширину інтервалу, в якому з імовірністю K лежить значення ДКП коефіцієнта. При досить великому K , інтервал $[-\Delta, \Delta]$ можна вважати множиною всіх можливих значень ДКП коефіцієнту, що квантується. Таким чином, в наслідок квантування коефіцієнту $S(u, v)$ ми отримаємо дискретну випадкову величину, яка приймає значення із множини:

$$\mathbb{Q} = \{i \cdot q \mid i = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}, \quad n = \lceil \Delta/q \rceil.$$

Нехай в результаті квантування отримано значення $x_Q \in \mathbb{Q}$, тоді потужність шуму квантування виражається формулою:

$$\sigma^2 = \sum_{x_Q \in \mathbb{Q}} \sigma_{x_Q}^2, \quad \sigma_{x_Q}^2 = \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} (x - x_Q)^2 f(x) dx. \quad (5)$$

Зауважимо, що в роботі [18] дана баєсова оцінка для $\sigma_{x_Q}^2$:

$$\hat{\sigma}_{x_Q}^2 = \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} (x - x_Q)^2 f(x) dx / \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} f(x) dx. \quad (6)$$

Позначимо через $\sigma_{u,v}^2$ дисперсію шуму квантування ДКП коефіцієнту з індексами (u, v) . Беручи до уваги попередні зауваження, сформулюємо методику розрахунку PSNR стисненого зображення:

- 1) вибрати значення K з діапазону $0.9 \leq K < 1$;
- 2) вирішити рівняння (4) відносно Δ і визначити

$$n = \lceil \Delta/Q_{u,v} \rceil;$$

- 3) обчислити $\sigma_{x_Q}^2$ за формулою (5), для значень

$$x_Q \in \{0\} \cup \mathbb{Q}_+,$$

де $\mathbb{Q}_+ = \{i \cdot Q_{u,v} \mid i = \overline{1, n}\}$;

- 4) розрахувати значення σ_1^2 за формулою:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{x_Q=0}^2 + 2 \sum_{x_Q \in \mathbb{Q}_+} \sigma_{x_Q}^2; \quad (7)$$

- 5) розрахувати значення $\sigma_{u,v}^2$ за формулою

$$\sigma_{u,v}^2 = \delta_{u,v} \sigma_1^2, \quad u, v = \overline{0, 7}, \quad (8)$$

де $\delta_{u,v}$ – коефіцієнти, які враховують властивість компактифікації енергії сигналу ДКП перетворенням [2]:

$$\delta_{u,v} = \begin{cases} 1/64, & u \neq 1 \vee v \neq 1; \\ 1/(128), & u \neq 1 \vee v = 1 \text{ або } u = 1 \vee v \neq 1; \\ 1/(256), & u = 1 \vee v = 1; \end{cases}$$

- 6) розрахувати значення σ_c^2 за формулою

$$\sigma_c^2 = \sum_{u,v=0}^7 \sigma_{u,v}^2; \quad (9)$$

- 7) обчислити PSNR, скориставшись формулою (3).

4. 3. Статистичні моделі ДКП коефіцієнтів

Маючи таблицю квантування $\|Q_{u,v}\|_{u,v=0}^7$ та обравши статистичну модель $f(x)$ ДКП коефіцієнтів, можливо оцінити значення PSNR стисненого зображення скориставшись методикою, що була викладена в попередньому пункті.

При виборі моделі $f(x)$ для статистичного описання ДКП коефіцієнтів конкретного зображення, слід виходити з таких міркувань. Обрана модель $f(x)$ повинна відображати розподіл ДКП коефіцієнтів в цілому, а не в найменших деталях. Це стає зрозумілим, якщо зауважити, що в наслідок властивості компактифікації енергії, дисперсії шумів квантування ДКП коефіцієнтів, розраховані за формулою (7), треба зменшити щонайменше в 64 рази аби визначити їх фактичний вклад в загальну дисперсію спотворень σ_c^2 (формула (9)). Іншими словами, наявність незначного браку точності при визначенні дисперсії (7), спричинена неточністю моделі $f(x)$, значною мірою буде компенсуватись подальшим множенням на $\delta_{u,v}$. З іншого боку, щільність імовірності $f(x)$ слід обирати таким чином, щоб забезпечити відносну економність обчислень, зокрема, бажано щоб інтеграли виду (4) та (5) мали легко обчислювальні компактні вирази, а у найкращому випадку, виражалися через елементарні функції.

Безпосередній аналіз гістограм ДКП коефіцієнтів багатьох натуральних зображень вказує на те, що емпірична щільність ймовірності АС ДКП коефіцієнтів, по-перше, симетрична відносно нуля, а, по-друге, за формою нагадує розподіл Лапласа:

$$f_L(x) = (2\beta)^{-1} e^{-|x|/\beta}, \quad \beta > 0. \quad (10)$$

Розподіл (10) задовольняє більшість із сформульованих вище вимог до $f(x)$ і залишається найчастіше вживаною моделлю ДКП коефіцієнтів, хоча і не завжди забезпечує достатню точність апроксимації емпіричного розподілу.

Далі, із загальних міркувань та аналізу результатів експериментів випливає, що аналітична модель $f(x)$ в першу чергу повинна відображати особливості поведінки ДКП коефіцієнтів навколо нуля. Таку поведінку можна, наприклад, охарактеризувати за допомогою коефіцієнту ексцесу. Значення коефіцієнту ексцесу розподілу Лапласа $\gamma_2 = 6$, в той час як для досить широкого класу зображень значення вибіркового коефіцієнту ексцесу ДКП коефіцієнтів $\hat{\gamma}_2 > 6$. Це пояснює, чому модель Лапласа спрацьовує не завжди. Іншими словами, для статистичного опису ДКП коефіцієнтів бажано використовувати такий розподіл, для якого значення ексцесу є функцією параметрів самого розподілу. Традиційно, в якості такого розподілу прийнято використовувати узагальнений гаусів розподіл:

$$f_{GG}(x) = \alpha [2\beta \Gamma(\alpha^{-1})]^{-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, \alpha > 0, \quad (11)$$

де $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\text{Re } z > 0$ – стандартна гамма функція. Коефіцієнт ексцесу цього розподілу

$$\gamma_2 = \Gamma(5\alpha^{-1})\Gamma(\alpha^{-1})\Gamma^{-2}(3\alpha^{-1}).$$

Однак, не дивлячись на гарне узгодження розподілу $f_{GG}(x)$ з емпіричними даними, практичне його застосування ускладнюється громіздкістю кінцевих формул. В даній роботі цей розподіл використовуватись не буде, замість нього пропонується використовувати двобічний гама розподіл

$$f_{\Gamma\Gamma}(x) = [2 \cdot \Gamma(\alpha) \cdot \beta^2]^{-1} \cdot |x|^{\alpha-1} \cdot e^{-|x|/\beta}, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (12)$$

який в ряді випадків забезпечує порівняну з $f_{GG}(x)$ точність апроксимації, але працювати з ним дещо легше.

Визначимо перші чотири моменти

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_{\Gamma\Gamma}(x) dx, \quad i = \overline{1,4}$$

розподілу (12). Внаслідок симетрії $f_{\Gamma\Gamma}(x)$, $\mu_1 = \mu_3$, далі

$$\mu_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) = \alpha(\alpha+1)\beta^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+3} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^4}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+4) = \\ &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Тоді коефіцієнт ексцесу

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{6}{\alpha} + 1 - \frac{2}{\alpha+1}. \quad (15)$$

При оцінюванні обох параметрів α і β розподілу $f_{\Gamma\Gamma}(x)$ за методом найбільшої правдоподібності, дістаємо систему нелінійних рівнянь, для розв'язання якої треба застосувати ітераційні методи, наприклад, метод Ньютона. Використання ітераційних методів неминуче призведе до зростання обчислювального навантаження, що було б виправданим за умови, що емпіричні дані дійсно взяті з двобічного гама розподілу, останнє майже ніколи на практиці не виконується. Отже, оскільки, метод найбільшої правдоподібності, застосований до вибірки значень ДКП коефіцієнтів, не гарантує отримання оптимальних оцінок параметрів α і β , в роботі пропонується використовувати комбінований метод оцінювання, а саме: оцінку параметру α будемо знаходити за методом моментів, вирішуючи рівняння

$$\frac{6}{\alpha} + 1 - \frac{2}{\alpha+1} = \gamma_2 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{\hat{\gamma}_2^2 + 14\hat{\gamma}_2 + 1} + 5 - \hat{\gamma}_2}{2 \cdot (\hat{\gamma}_2 - 1)}, \quad (16)$$

в той час як оцінку параметру β будемо знаходити за методом найбільшої правдоподібності, тобто

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{\alpha}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (17)$$

де n – об'єм вибірки (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Такий підхід є виправданим, оскільки в наслідок властивості компактифікації енергії сигналу ДКП перетворенням, забезпечення максимальної точності апроксимації емпіричних даних моделлю $f_{\Gamma\Gamma}(x)$ не є критичною вимогою.

Іншим розподілом зі змінним ексцесом є узагальнений розподіл Коші:

$$f_{GC}(x) = \frac{p-1}{2s} \left(1 + \frac{|x|}{s}\right)^{-p}, \quad p > 1, s > 0. \quad (18)$$

Зауважимо, що варіант параметризації узагальненого розподілу Коші, який застосовується в задачах обробки зображень, дещо відрізняється від прийнятого в математичній статистиці, тому статистичні властивості розподілу (18) залишаються недостатньо вивченими.

Визначимо спочатку перші чотири моменти

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_{GC}(x) dx, \quad i = \overline{1,4}$$

розподілу (18). Внаслідок симетрії $f_{GC}(x)$, $\mu_1 = \mu_3$, далі

$$\mu_2 = \frac{p-1}{s} \int_0^\infty x^2 \left(1 + \frac{x}{s}\right)^{-p} dx = \frac{2s^2}{(p-2)(p-3)}, \quad p > 3; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{p-1}{s} \int_0^\infty x^4 \left(1 + \frac{x}{s}\right)^{-p} dx = \\ &= \frac{24s^4}{(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}, \quad p > 5. \end{aligned} \quad (20)$$

Отже коефіцієнт ексцесу

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{6(p-2)(p-3)}{(p-4)(p-5)} = 6 + \frac{36}{p-5} - \frac{12}{p-4}, \quad p > 5. \quad (21)$$

Таким чином, як і у випадку з двобічним гама розподілом, значення ексцесу γ_2 визначається тільки одним з параметрів розподілу (18), а саме: параметром p .

Розглянемо тепер питання визначення оцінок p та s за методом найбільшої правдоподібності. Згідно [10] рівняння правдоподібності для розподілу (18) мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i| + s} = \frac{n}{p} \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{|x_i|}{s}\right) = \frac{n}{p-1}, \quad (22)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вибірка об'єму n з розподілу $f_{GC}(x)$.

Далі, виражаючи p з першого рівняння та підставляючи його в друге рівняння, дістаємо

$$p = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i| + s} \right]^{-1}; \quad (23)$$

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i| + s} \right]^{-1} - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{|x_i|}{s}\right) \right]^{-1} = 1. \quad (24)$$

Проаналізуємо рівняння (24). Легко бачити, що із збільшенням s перший та другий доданки лівої частини рівняння (24) монотонно зростають, причому перший доданок зростає швидше від другого. Дійсно,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i|+s}\right)' = -\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{(|x_i|+s)^2}$$

та

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{|x_i|}{s}\right)\right)' = -\frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i|+s}. \quad (25)$$

Неважко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{(|x_i|+s)^2} < \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i|+s}$$

звідки безпосередньо і впливає вірність сказаного вище. Таким чином, рівняння (24) не може мати більше одного кореня.

Далі, розкладаючи в ряд $\ln(1+|x_i|/s)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{|x_i|}{s}\right) &\approx 1 - \frac{1}{1+|x_i|/s} + \\ &+ \frac{|x_i|^2/s^2}{2(1+|x_i|/s)^2} + \dots = \frac{|x_i|}{|x_i|+s} + \frac{|x_i|^2}{2(|x_i|+s)^2} + \dots \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язання рівняння (24) ітераційними методами, що ґрунтуються на використанні першої похідної, наприклад, методом Ньютона, неможливе. Отже, для визначення кореня рівняння (24), треба використовувати чисельні методи або нульового порядку, або такі, що залучають принаймні другу похідну, наприклад метод парабол. Для цього необхідно переформулювати задачу розв'язання рівняння (24) та представити її у вигляді задачі оптимізації. Дійсно, позначаючи

$$g(s) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x_i|+s}\right]^{-1} - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{|x_i|}{s}\right)\right]^{-1},$$

ми можемо записати (24) так $g(s)=1$. Цілком зрозуміло, що задача розв'язання рівняння (24) еквівалентна наступній задачі оптимізації:

$$s^* = \underset{s}{\operatorname{arg\,min}} |g(s)-1|, \quad (26)$$

де s^* – корінь рівняння (24).

Для оптимізації функції $|g(s)-1|$ можна використовувати, наприклад, метод золотого перерізу [19] або метод парабол [20]. Зауважимо, що на інтервалах $(0, s^*)$ та (s^*, ∞) функція змінює кривизну: на першому інтервалі функція вивукла, а на другому – ввігнута, тому ітерації в методі парабол треба виконувати за дещо зміненою схемою:

$$s_{i+1} = s_i - \frac{\Phi'(s_i)}{|\Phi''(s_i)|}, \quad \Phi(s) = |g(s)-1|. \quad (27)$$

Оскільки вирази для $\Phi'(s)$ і $\Phi''(s)$ громіздкі та вимагають визначення знаку функції $\Phi(s)$ для розкриття модулю, значно вигідніше замінити їх кінцево-різницевиими апроксимаціями. Крім того, із збільшенням номеру ітерації доцільно додатково зменшувати ширину шага, який здійснюється в напрямку точки мінімуму, що приводить до формули

$$s_{i+1} = s_i - \frac{h}{2(i+1)^m} \frac{\Phi(s_i+h) - \Phi(s_i-h)}{|\Phi(s_i+h) - 2\Phi(s_i) + \Phi(s_i-h)|}, \quad m \geq 0 \quad (28)$$

де h – шаг з яким обчислюються кінцево-різницевиі апроксимації похідних, зазвичай $h=0,001$; m – параметр, що додатково регулює ширину шагу в методі

парабол. Якщо $m=0$ ми отримуємо ньютонівський ітераційний процес (27), де замість похідних використовуються їх кінцево-різницевиі апроксимації. При практичних розрахунках доцільно обирати $m \geq 1$.

Збіжність ітераційного процесу (28) очевидна, але в наслідок того, що в точці мінімуму функція $\Phi(s)$ змінює кривизну, число ітерацій, здійснюваних за формулою (28), буде порівняним з числом ітерацій в методі золотого перерізу, в той час як останній вимагає обчислення тільки одного значення за ітерацію на протигагу методу парабол (28), який передбачає обчислення трьох значень функції $\Phi(s)$ за одну ітерацію.

Зауважимо на останок, що комбіноване оцінювання параметрів p та s розподілу (18) не є доцільним. Оскільки, після обчислення параметру p за формулою (21) на підставі вибіркового значення ексцесу $\hat{\gamma}_2$, нам необхідно буде використовувати ітераційні методи для визначення параметру s шляхом розв'язання одного з нелінійних рівнянь (22).

4. 4. Дисперсія шуму квантування ДКП коефіцієнтів

Розглянемо особливості практичного застосування викладеної в п. 4. 2. методики оцінювання PSNR стисненого JPEG зображення. Ключовим моментом методики є залучення статистичних методів для розрахунку дисперсії шуму квантування ДКП коефіцієнтів. Ґрунтуючись на моделях ДКП коефіцієнтів у вигляді розподілу Лапласа та двобічного гамма розподілу, дістаємо зручні для обчислення вирази для дисперсії (7). Безпосереднє застосування запропонованої методики можливе і по відношенню до узагальненого розподілу Коші, хоча компактних співвідношень у цьому випадку отримати не вдається.

Спочатку будемо вважати, що справедливе припущення про розподіл Лапласа, тобто $f(x) = f_L(x)$. Тоді, за формулою (5) дістаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_Q}^2 &= \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} (x - x_Q)^2 f_L(x) dx = \\ &= \begin{cases} \beta^2 [2 - \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})], & \text{якщо } x_Q = 0, \\ \frac{\beta^2}{2} e^{-|x_Q|/\beta} [\Gamma(3, -\frac{q}{2\beta}) - \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})], & \text{якщо } x_Q \neq 0. \end{cases} \quad (29) \end{aligned}$$

Через $\Gamma(a, x)$ позначена неповна гама функція

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt.$$

Далі, обравши значення $K < 1$ ми можемо скористатися формулою (7), підсумовуючи доданки $\sigma_{x_Q}^2$. Зауважимо, що формулі (28), а відтак і формулі (7) можна придати більш компактну форму. Дійсно [21], для неповної гама функції вірне наступне:

$$\begin{aligned} \Gamma(a, x) &= \Gamma(a) [1 - P(a, x)], \\ P(a, x) &= \Gamma^{-1}(a) \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

В свою чергу, при $a \in \mathbb{Z}_+$ виконується [21]

$$P(a, x) = 1 - e^{-x} \sum_{m=0}^{a-1} \frac{x^m}{m!} \quad \text{і} \quad \Gamma(a+1) = a!. \quad (31)$$

Таким чином,

$$\Gamma(3, x) = 2e^{-x} [1 + x + x^2 / 2]. \tag{32}$$

Отже, за формулою (7) дістаємо

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \beta^2 [2 - \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \beta^2 e^{-iq/\beta} [\Gamma(3, -\frac{q}{2\beta}) - \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})] = \\ &= \beta^2 [2 - \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})] + \beta^2 [\Gamma(3, -\frac{q}{2\beta}) - \\ &- \Gamma(3, \frac{q}{2\beta})] \frac{e^{-nq/\beta} - 1}{1 - e^{q/\beta}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Підставляючи тепер (32) в (33) і вважаючи $K=1$, що відповідає $n \rightarrow \infty$, дістаємо співвідношення для дисперсії шуму квантування вибірки із розподілу Лапласа, що міститься в класичній роботі [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= 2\beta^2 \{1 - e^{-\frac{q}{2\beta}} [1 + \frac{q}{2\beta} + \frac{q^2}{2\beta^2}] + \\ &+ (e^{-\frac{q}{2\beta}} [1 - \frac{q}{2\beta} + \frac{q^2}{8\beta^2}] - e^{-\frac{q}{2\beta}} [1 + \frac{q}{2\beta} + \frac{q^2}{8\beta^2}]) \frac{1}{e^{\frac{q}{\beta}} - 1}\} = \\ &= 2\beta^2 + \frac{2\beta q e^{-\frac{q}{2\beta}}}{e^{\frac{q}{\beta}} - 1} = 2\beta^2 - \frac{2\beta q e^{-\frac{q}{2\beta}}}{1 - e^{-\frac{q}{\beta}}} = 2\beta^2 - \beta q \operatorname{csch}(\frac{q}{2\beta}), \end{aligned} \tag{34}$$

де $\operatorname{csch}(z) = \sinh^{-1}(z)$ – гіперболічний косеканс.

Розглянемо тепер питання визначення потужності шуму квантування за умови, що ДКП коефіцієнти допускають апроксимацію двобічним гама розподілом. Тоді за формулою (5) будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_Q=0}^2 &= 2 \int_0^{q/2} x^2 f_{\Gamma}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{q/2} x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx = \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(2+\alpha) - \Gamma(2+\alpha, \frac{q}{2\beta})]. \end{aligned} \tag{35}$$

Враховуючи (30) і той факт, що

$$P(a+1, x) = P(a, x) - x^a e^{-x} / \Gamma(a+1)$$

після нескладних перетворень знаходимо:

$$\sigma_{x_Q=0}^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 P(2+\alpha, \frac{q}{2\beta}). \tag{36}$$

У загальному випадку, коли $x_Q > q/2$, відповідно до формули (5):

$$\begin{aligned} \sigma_{x_Q}^2 &= \int_{x_Q-q/2}^{x_Q+q/2} (x-x_Q)^2 f_{\Gamma}(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \int_{x_Q-q/2}^{x_Q+q/2} (x-x_Q)^2 x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} [I_1 + I_2 - I_3], \end{aligned} \tag{37}$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_Q-q/2}^{x_Q+q/2} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2) \times \\ &\times [P(\alpha+2, \frac{x_Q+q/2}{\beta}) - P(\alpha+2, \frac{x_Q-q/2}{\beta})]; \\ I_2 &= x_Q^2 \int_{x_Q-q/2}^{x_Q+q/2} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = x_Q^2 \beta^\alpha \Gamma(\alpha) \times \\ &\times [P(\alpha, \frac{x_Q+q/2}{\beta}) - P(\alpha, \frac{x_Q-q/2}{\beta})]; \\ I_3 &= 2x_Q \int_{x_Q-q/2}^{x_Q+q/2} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 2x_Q \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) \times \\ &\times [P(\alpha+1, \frac{x_Q+q/2}{\beta}) - P(\alpha+1, \frac{x_Q-q/2}{\beta})]. \end{aligned}$$

Тепер, зафіксувавши значення $K < 1$, на підставі формул (36) і (37) ми можемо розрахувати σ_1^2 за формулою (7).

Коефіцієнт ексцесу двобічного гама розподілу є функцією параметрів α і β . Отже, розподіл $f_{\Gamma}(x)$ доцільно використовувати в тих випадках, коли вибірковий коефіцієнт ексцесу емпіричного розподілу ДКП коефіцієнтів має значення $\hat{\gamma}_2 \gg 6$, що є типовим для монотонних зображень. Для таких зображень, майже всі АС ДКП коефіцієнти концентруються у відносно невеликому інтервалі з центром в точці нуль. З цього випливає, що вже при невеликих значеннях кроку квантування більшість ДКП коефіцієнтів будуть квантуватися до нуля. Тобто, у випадку монотонних зображень, σ_1^2 , розраховане за формулою (7), майже не буде відрізнятися від значення, розрахованого за формулою (6) при $x_Q = 0$, але у цьому випадку формула (6) набуває значно компактнішого виду порівняно з формулами (36) і (37). Дійсно

$$\begin{aligned} P(x_Q=0) &= \int_{-q/2}^{q/2} f_{\Gamma}(x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{q/2} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = P(\alpha, \frac{q}{2\beta}). \end{aligned} \tag{38}$$

Тоді, підставляючи (36) і (38) у формулу (6), дістаємо байєсову оцінку дисперсії шуму квантування до нуля:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{x_Q=0}^2 &= \sigma_{x_Q=0}^2 / P(x_Q=0) = \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 P(2+\alpha, \frac{q}{2\beta}) P^{-1}(\alpha, \frac{q}{2\beta}). \end{aligned} \tag{39}$$

Перейдемо тепер до питання визначення дисперсії шуму квантування вибірки з узагальненого розподілу Коші (18).

Дисперсія шуму квантування до нуля:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_Q=0}^2 &= \int_{-q/2}^{q/2} x^2 f_{GC}(x) dx = \\ &= s^2 (p-1) \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} \frac{(1+\frac{q}{2s})^{k+1-p} - 1}{k+1-p}. \end{aligned} \tag{40}$$

В свою чергу, коли $x_Q > q/2$, відповідно до формули (5) дістаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_Q}^2 &= \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} (x - x_Q)^2 f_{GC}(x) dx = \\ &= \frac{p-1}{2} \int_{x_Q - q/2}^{x_Q + q/2} (x - x_Q)^2 \left(1 + \frac{x}{s}\right)^{-p} d\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \\ &= \frac{p-1}{2} \left[(x_Q + s)^2 \frac{L_2^{1-p} - L_1^{1-p}}{1-p} - \right. \\ &\quad \left. - 2s(x_Q + s) \frac{L_2^{2-p} - L_1^{2-p}}{2-p} + s^2 \frac{L_2^{3-p} - L_1^{3-p}}{3-p} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

де $L_1 = 1 + (x_Q - q/2)/s$, $L_2 = 1 + (x_Q + q/2)/s$.

Як і в попередніх випадках, зафіксувавши значення $K < 1$, на підставі формул (40) і (41) стає можливим розрахувати значення σ_1^2 за формулою (7).

5. Результати практичного застосування методики оцінювання PSNR стиснених зображень

В п. 4.2 була представлена розроблена методика розрахунку PSNR стисненого зображення на основі значень таблиці квантування. Методика передбачає обчислення оцінок дисперсій шумів квантування ДКП коефіцієнтів зображення. Тому, для практичного застосування запропонованої методики, необхідно задатися відповідною статистичною моделлю ДКП коефіцієнтів. В пп. 4.3 і 4.4, наведено різні статистичні моделі ДКП коефіцієнтів, описано методи оцінювання їх параметрів, та конкретизовано співвідношення для розрахунку оцінки PSNR. Проведемо тепер експериментальну перевірку отриманих теоретичних співвідношень.

В подальшому, будемо використовувати поняття монотонних та текстурних зображень. Під монотонними будемо розуміти такі зображення, до структурного складу яких входять значні області монотонності, тобто області рівномірної яскравості, які не містять суттєвої кількості дрібних деталей. В свою чергу, зображення, що в більшості своїй складаються з областей багатих на дрібні деталі, будемо називати текстурними.

Для проведення експериментальних досліджень із набору стандартних напівтонових тестових зображень [22] було відібрано два набори по 15 зображень, розмірами 256x256 пікселів. Першу групу склали текстурні зображення, в той час як в другу групу було відібрано монотонні зображення. Приклади текстурних та монотонних зображень наведені на рис. 2 та 3 відповідно. Для кожного зображення з обох груп були отримані його стиснені копії з показниками якості із діапазону від 5 до 100 взятими з кроком 5.

Далі, на мові C++ з використанням бібліотеки libjpeg [23] було створено програмний засіб, що дозволяє розраховувати оцінку PSNR на підставі розроблених в п. 4 методів. Крім того, в програмі розраховуються реальні значення PSNR стиснених зображень, що дозволяє порівнювати фактичне і прогнозне значення метрики PSNR. Оскільки JPEG формат зберігає лише відомості про квантовані ДКП коефіцієнти, необхідні для подальшої роботи значення ДКП коефіцієнтів зчитуються безпо-

середньо з відповідних JPEG файлів. Зазначимо, що DC ДКП коефіцієнти зображення, тобто постійна складова, мають інший розподіл, аніж ті, що були розглянуті в п. 4.3. Таким чином, описані вище методи застосовуються тільки до AC ДКП коефіцієнтів, тому для виключення впливу невірної оцінки дисперсії шуму квантування постійної складової на результати експерименту, значення цієї величини розраховувалось безпосередньо.

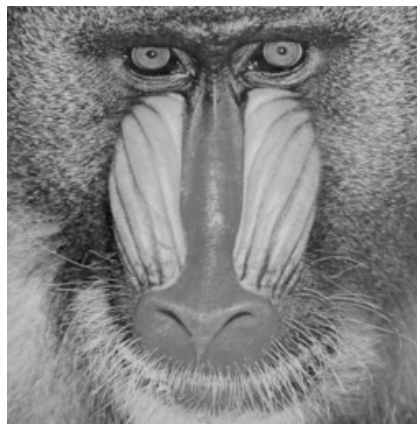


Рис. 2. Приклад текстурного зображення з першої групи



Рис. 3. Приклад монотонного зображення з другої групи

У першому експерименті, для кожного стисненого зображення обох груп розраховувалася як оцінка PSNR (відповідно до методики п. 4.2), так і його фактичне значення. При цьому величина дисперсії σ_1^2 обчислювалася або за формулою (34), що відповідає припущенню про Лапласів розподіл ДКП коефіцієнтів, або за формулою (39), що, в свою чергу, відповідає припущенню про двобічний гама розподіл для ДКП коефіцієнтів початкового JPEG зображення. Далі, на підставі розрахованих значень, визначалась помилка прогнозування (оцінювання) PSNR, як абсолютна величина різниці між оціненим і фактичним значеннями, $\Delta PSNR$, яка потім усереднювалася за всіма показниками якості в межах одного зображення. Результати представлені у вигляді графіків на рис. 4 для зображень з першої групи, тобто текстурних, і на рис. 5 для зображень з другої групи, тобто монотонних. Тут і далі, на графіках символом (+) позначено результати, що відповідають моделі Лапласу (10), а символом (*) – результати отримані при використанні моделі у вигляді двобічного гама розподілу (12).

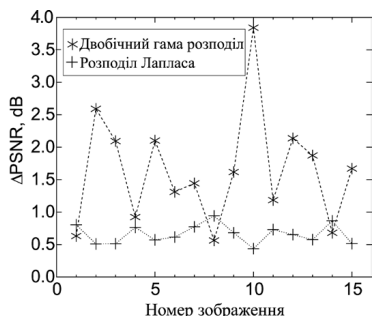


Рис. 4. Середня помилка оцінювання PSNR за зображенням для набору текстурних зображень

Як видно з рис. 4, для зображень з першої групи модель Лапласу у більшості випадків дає кращий результат порівняно з моделлю у вигляді двобічного гамма розподілу. В свою чергу, з аналізу графіків на рис. 5 можна бачити, що для 11 з 15 зображень другої групи, модель на основі двобічного гамма розподілу, навпаки, дозволяє отримати меншу за модель Лапласа абсолютну помилку оцінювання PSNR.

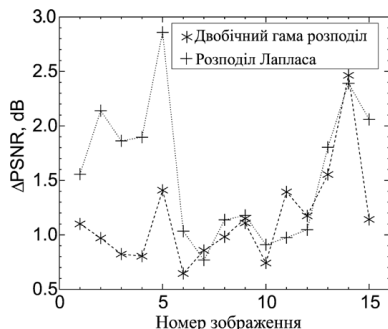


Рис. 5. Середня помилка оцінювання PSNR за зображенням для набору монотонних зображень

Далі, для отримання більш наглядного результату, як і в першому експерименті, будемо розраховувати реальне значення, та оцінку PSNR, для кожного із стиснених зображень, але усереднювати значення абсолютної помилки, будемо не за зображенням, а за значенням показника якості. Діючи таким чином, та використовуючи набір зображень з першої групи, отримаємо графіки, показані на рис. 6. Аналогічні графіки, але для зображень з другої групи, показані на рис. 7.

Аналізуючи дані рис. 6, легко бачити, що для зображень текстурного типу, модель Лапласу при стисненні з високими та середніми показниками якості (тобто з низькою та середньою компресією) забезпечує більшу точність порівняно з використанням двобічного гамма розподілу. З іншого боку, для зображень, які були отримані в наслідок компресії з високими показниками стиснення (тобто з низькою якістю), замість моделі Лапласа, більшу точність вже забезпечує модель у вигляді двобічного гамма розподілу.

Звернемо тепер увагу на графіки з рис. 7. Як і очікувалось, для зображень другої групи при стисненні з низькими, середніми, та частково високими показниками якості, модель у вигляді двобічного гамма розподілу забезпечує меншу помилку оцінювання порівняно з моделлю Лапласа.

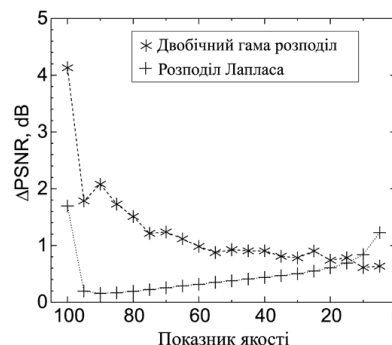


Рис. 6. Середня помилка за показником якості для набору текстурних зображень

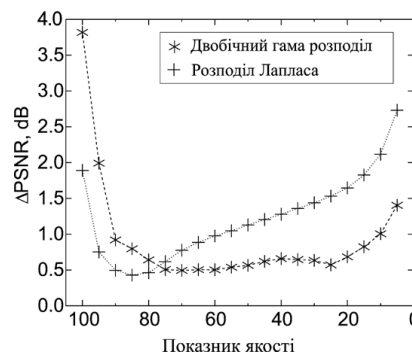


Рис. 7. Середня помилка за показником якості для набору монотонних зображень

Нарешті, проаналізуємо доцільність використання узагальненого розподілу Коші для оцінювання PSNR стиснених зображень. Skorистаємось критерієм Колмогорова з метою з'ясувати узгодженість гіпотетичного розподілу у вигляді узагальненого розподілу Коші з емпіричними даними, у цьому випадку – ДКП коефіцієнтами із індексами (u, v). В табл. 1 та 2 зведені дані про значення статистики критерію Колмогорова $\sqrt{n}D_n$ [24], визначені для ДКП коефіцієнтів зображень наведених на рис. 2 та 3 відповідно. Об'єм вибірки $n = 1024$. Нагадаємо, що для нульової гіпотези повинна справджуватись нерівність $\sqrt{n}D_n \leq \lambda_\alpha$; для рівня значущості $\alpha = 0,05$ маємо $\lambda_\alpha = 1,3581$, в той час як $\alpha = 0,01$ відповідає $\lambda_\alpha = 1,6276$.

Дані табл. 1, 2 вказують на те, що узагальнений розподіл Коші краще узгоджується з ДКП коефіцієнтами текстурних зображень, аніж з ДКП коефіцієнтами монотонних зображень. У випадку текстурних зображень досить непогано спрацьовує модель Лапласу, якій відповідає класична формула (34) для розрахунку дисперсії шуму квантування вибірки з розподілу Лапласу. Основною перевагою формули (34) є її компактність та обчислювальна економність, на відміну від формул (40) і (41). Крім того, використання узагальненого розподілу Коші вимагає розв'язання нелінійних рівнянь (23) і (24) з метою визначення параметрів розподілу $f_{CC}(x)$. В свою чергу, для монотонних зображень, в роботі було запропоновано використовувати двобічний гамма розподіл, для якого існує компактніша формула (39) і дещо простіша процедура оцінювання параметрів розподілу $f_{TT}(x)$, див. формули (16) і (17). Отже, зважаючи на вищесказане, дістаємо висновок, що узагальнений розподіл Коші можливо, але не доцільно

використовувати для оцінювання (прогнозування) PSNR стиснених JPEG зображень.

Таблиця 1

Значення статистики критерію Колмогорова $\sqrt{n}D_n$, визначені для ДКП коефіцієнтів зображення, показаного на рис. 2

$u \backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	–	0,981	1,239	0,808	1,101	1,086	1,134	2,470
1	0,718	1,236	1,250	0,789	0,784	1,230	2,300	2,090
2	1,500	0,597	0,639	1,462	0,455	1,325	2,005	1,986
3	1,181	0,534	1,131	1,319	0,430	1,416	1,930	1,963
4	0,762	1,159	0,901	1,539	0,986	1,325	1,160	1,706
5	0,629	0,789	1,764	1,068	1,241	1,830	1,800	2,446
6	1,544	0,829	1,057	1,465	1,567	1,237	1,696	3,017
7	0,706	2,040	1,162	1,623	1,444	2,412	2,944	3,472

Таблиця 2

Значення статистики критерію Колмогорова $\sqrt{n}D_n$, визначені для ДКП коефіцієнтів зображення, показаного на рис. 3

$u \backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	–	1,469	1,492	2,551	2,656	3,048	2,733	2,991
1	1,048	1,230	2,063	1,813	1,696	2,797	2,590	3,563
2	1,727	1,172	2,394	2,869	1,871	2,688	3,210	4,250
3	1,915	1,751	1,813	2,482	3,109	2,412	3,188	3,750
4	3,801	2,004	2,630	2,596	3,398	3,207	3,452	5,604
5	1,880	2,549	2,594	2,377	3,021	3,688	3,827	3,844
6	3,367	2,438	2,567	3,031	3,094	4,563	4,938	4,094
7	2,277	3,250	3,688	6,293	4,375	5,031	4,969	6,438

6. Обговорення результатів практичного застосування методики оцінювання PSNR стиснених зображень

Інтуїтивно зрозуміло, і це підтверджується проведеними експериментальними дослідженнями, що ДКП коефіцієнти, в залежності від структурного складу зображення, мають принципово різні ймовірнісні розподіли. Отже, оцінюючи статистичними методами якість стисненого зображення, слід враховувати його структурні властивості. Наприклад, класична модель Лапласу (10), застосована до ДКП коефіцієнтів монотонних зображень, демонструє значно гіршу узгодженість з емпіричними даними порівняно з тією узгодженістю яку ми спостерігаємо для ДКП коефіцієнтів текстурних зображень. Так, аналізуючи графіки на рис. 7, бачимо, що похибка в оцінюванні значення PSNR монотонних стиснених зображень є більшою для моделі Лапласа, аніж для моделі у вигляді двобічного гама розподілу (12). Зауважимо, що при використанні двобічного гама розподілу ми враховували тільки дисперсію шуму квантування до нуля, визначаючи її за формулою (39). Це робить зрозумілою появу менших значень абсолютної похибки $\Delta PSNR$, які спостерігаються на рис. 7 для моделі Лапласу при стисненні з високими показниками якості.

Ключовою особливістю ДКП перетворення є наявність у нього властивості компактифікації енергії перетворюваного сигналу. На практиці це означає, що визначені за формулами (34) або (39) значення дисперсій шумів квантування треба зменшувати принайм-

ні у 64 рази аби визначити фактичний вплив ефекту квантування. Таким чином, досить великі відхилення оцінених дисперсій від справжніх, спричинені неадекватністю статистичної моделі ДКП коефіцієнтів, будуть значною мірою компенсуватись наявністю ефекту компактифікації енергії. Останнє пояснює той факт, що, порівнюючи отримані в ході експериментальних досліджень графіки, ми дістаємо висновку, що класична модель Лапласу в цілому забезпечує досить непогану точність оцінювання PSNR.

Звертаючи увагу на рис. 5, можна зауважити, що для зображення з номером 14 обидві моделі дають майже одну і ту саму помилку оцінювання PSNR і ця помилка є значною. Така ситуація виникла тому, що початкове зображення більше як на 90 % складається з монотонних областей (чистого неба та незбуреної води), а від так майже усі ДКП коефіцієнти оригінального зображення мають нульові значення (за замовченням формат JPEG передбачає округлення до найближчого цілого дійсних значень ДКП коефіцієнтів). Таким чином, невідомі параметри розподілу Лапласу та двобічного гама розподілу, оцінені за переважно нульовими ДКП коефіцієнтами дістають суттєвого зміщення, що в свою чергу призводить до зміщення оцінки PSNR.

Далі, беручи до уваги результати експериментів, та враховуючи теоретичні міркування, викладені в п. 4. 3, можна запропонувати єдиний методологічний підхід до вибору моделі ДКП коефіцієнтів певного зображення. Дійсно, середньо та високочастотні ДКП коефіцієнти монотонних зображень мають розподіли, коефіцієнти ексцесу яких більші за відповідні коефіцієнти ексцесу, але визначені для текстурних зображень. Отже, якщо значення вибіркового коефіцієнту ексцесу певного ДКП коефіцієнту $\hat{\gamma}_2 \approx 6$, то доцільно використовувати розподіл Лапласу, а при $\hat{\gamma}_2 \gg 6$ варто застосовувати двобічний гама розподіл. Такий підхід дозволить отримувати високу точність оцінювання для всіх типів зображень.

7. Висновки

В роботі розглянуті питання кількісної оцінки впливу ефекту квантування коефіцієнтів дискретного косинусного перетворення на якість стиснених JPEG зображень. Розроблена універсальна методика оцінювання величини спотворень, що виникають в наслідок JPEG компресії зображень будь-якого структурного складу. Для визначення якості зображення використувалась метрика PSNR.

В результаті проведених досліджень отримано такі висновки:

1. При виборі моделі $f(x)$ ДКП коефіцієнтів зображення, слід виходити з таких міркувань. В наслідок властивості компактифікації енергії ДКП перетворенням, обрана модель $f(x)$ повинна відображати розподіл ДКП коефіцієнтів в цілому, а не в найменших деталях. Конкретний вибір щільності імовірності $f(x)$ має забезпечувати відносну економність обчислень, зокрема, бажано аби інтеграли виду (4) та (5) мали легко обчислювальні компактні вирази, а коефіцієнт ексцесу розподілу $f(x)$ був би функцією параметрів самого розподілу.

2. Ключова особливість запропонованої в п. 4. 2 методики полягає у залученні різних статистичних моделей для розрахунку дисперсії шуму квантування ДКП

коефіцієнтів. Зокрема, для моделей ДКП коефіцієнтів у вигляді двобічного гама розподілу та узагальненого розподілу Коші були отримані зручні при обчисленні вирази для дисперсії шуму квантування ДКП коефіцієнтів JPEG зображення. Використання двобічного гама розподілу для вирішення зазначеної вище задачі запропоновано вперше. Крім того, досліджено практичні особливості оцінювання параметрів узагальненого розподілу Коші за методом найбільшої правдоподібності.

3. Класична модель Лапласа забезпечує відносно точну оцінку PSNR лише для тих зображень, що в більшості своїй складаються з областей багатих на дрібні деталі. В той час, як для зображень, до складу

яких входять суттєві області рівномірної яскравості, модель у вигляді двобічного гама розподілу дозволяє отримати значно кращий результат.

Достовірність отриманих теоретичних виразів підтверджується результатами експериментів з напівтовними зображеннями формату JPEG.

Вдячності

Автори глибоко вдячні Кирко Д. М. та Удалову Д. В., змістовні бесіди з якими значно сприяли написанню цієї статті.

Література

- Laghari, K. U. R. Toward total quality of experience: A QoE model in a communication ecosystem [Text] / K. U. R. Laghari, K. Connelly // *Communications Magazine, IEEE*. – 2012. – Vol. 50, Issue 4. – P. 58–65. doi: 10.1109/mcom.2012.6178834
- Lim, J. S. Two-Dimensional signal and image processing [Text] / J. S. Lim. – New Jersey: Prentice-Hall, 1990. – 694 p.
- ISO/IEC 10918-1: 1993(E). CCIT. Terminal equipment and protocols for telematic services. Recommendation. T. 81 [Text]. – Available at: <http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf>.
- Pratt, W. K. Digital Image Processing [Text] / W. K. Pratt. – 3rd edition. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. – 739 p. doi: 10.1002/0471221325
- Simoncelli, E. Statistical modeling of photographic images [Text] / E. P. Simoncelli // *Handbook of image and video processing*. – New York : Academic Press, 2005. – P. 431–441. doi: 10.1016/b978-012119792-6/50089-9
- Lam, E. Y. A mathematical analysis of the DCT coefficient distributions for images [Text] / E. Y. Lam, J. W. Goodman // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2000. – Vol. 9, Issue 10. – P. 1661–1666. doi: 10.1109/83.869177
- Narayanan, G. A statistical model for quantized AC block DCT coefficients in JPEG compression and its application to detecting potential compression history in bitmap images [Text] / G. Narayanan, Y.-Q. Shi // *International Workshop on Digital Watermarking*. Vol. 6526 : of *Lecture Notes in Computer Science*. – Berlin : Springer, 2010. – P. 75–89. doi: 10.1007/978-3-642-18405-5_7
- Thai, T. H. Statistical model of quantized DCT coefficients: Application in the steganalysis of jsteg algorithm [Text] / T. H. Thai, R. Coganne, F. Retraint // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2014. – Vol. 23, Issue 5. – P. 1980–1993. doi: 10.1109/tip.2014.2310126
- Sallee, P. Model-based steganography [Text] / P. Sallee // *Digital Watermarking*. – Berlin : Springer, 2004. – Vol. 2939 : *Lecture Notes in Computer Science*. – P. 154–167. doi: 10.1007/978-3-540-24624-4_12
- Fridrich, J. Steganography in digital media [Text] / J. Fridrich. – New York : Cambridge University Press, 2009. – 438 p. doi: 10.1017/cbo9781139192903
- Carrillo, R. E. A generalized cauchy distribution framework for problems requiring robust behavior [Text] / R. E. Carrillo, T. C. Aysal, K. E. Barner // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. – 2010. – Vol. 2010, Issue 11. – P. 11:1–11:19. doi: 10.1155/2010/312989
- ITU-R Rec. BT 500-10 : Methodology for the subjective assessment of the quality of television pictures [Text]. – 2000.
- Pappas, T. Perceptual criteria for image quality evaluation [Text] / T. N. Pappas, R. J. Safranek, J. Chen // *Handbook of image and video processing*. – New York : Academic Press, 2005. – P. 939–959. doi: 10.1016/b978-012119792-6/50118-2
- Wang, Z. Structural approaches to image quality assessment [Text] / Z. Wang, A. C. Bovik, E. P. Simoncelli // *Handbook of image and video processing*. – New York : Academic Press, 2005. – P. 961–974. doi: 10.1016/b978-012119792-6/50119-4
- Sheikh, H. Information theoretic approaches to image quality assessment [Text] / H. R. Sheikh, A. C. Bovik // *Handbook of image and video processing*. – New York : Academic Press, 2005. – P. 975–989. doi: 10.1016/b978-012119792-6/50120-0
- Wong, P. W. Image quantization, halftoning, and printing [Text] / P. W. Wong // *Handbook of image and video processing*. – New York : Academic Press, 2005. – P. 925–937. doi: 10.1016/b978-012119792-6/50117-0
- Turaga, D. S. No reference PSNR estimation for compressed pictures [Text] / D. S. Turaga, Y. Chen, J. E. Caviedes // *Signal Processing: Image Communication*. – 2004. – Vol. 19, Issue 2. – P. 173–184. doi: 10.1016/j.image.2003.09.001
- Brandão, T. Estimation of DCT coefficient statistics from their quantized values: application to image quality evaluation [Text] / T. Brandão, M. P. Queluz // *ConfTele 2007 : 6th International Conference on Telecommunications*. – Peniche, Portugal, 2007. – P. 461–464.
- Press, W. H. Numerical recipes: the art of scientific computing [Text] / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery; 3rd edition. – New York : Cambridge University Press, 2007. – Vol. 994. – 1235 p.
- Lange, K. Optimization [Text] / K. Lange. – 2nd edition. – New York : Springer, 2013. – Vol. 95: *Springer Texts in Statistics*. – 546 p. doi: 10.1007/978-1-4614-5838-8
- Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables [Text] / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – 9th Dover printing, 10th GPO printing edition. – New York: Dover, 1964. – 1049 p.
- USC-SIPI image database [Electronic resource]. – Available at: <http://sipi.usc.edu/database/>
- Independent JPEG group: libJPEG library [Electronic resource]. – Available at: <http://www.ijg.org/>
- Arnold, T. Nonparametric goodness-of-fit tests for discrete null distributions [Text] / T. B. Arnold, J. W. Emerson // *The R Journal*. – 2011. – Vol. 3, Issue 2. – P. 34–39.