17. Towards Unbiased Evaluation of Uncertainty Reasoning: The URREF Ontology: Information Fusion (FUSION), 2012 15th International Conference [Text]. – IEEE, 2012. – P. 2301–2308.
18. Krause, P. Representing Uncertain Knowledge: An Artificial Intelligence Approach [Text] / P. Krause, D. Clark. – Kluwer Academic Publishers, 1993. doi: 10.1007/978-94-011-2084-5
19. Bouchon-Meunier, B. Les incertitudes dans les systemes intelligents [Text] / B. Bouchon-Meunier, H. T. Nguyen. – Press Universitaires de France, Paris, 1996.
20. Klir, G. Uncertainty-Based Information: elements of generalized information theory. Vol. 15 [Text] / G. J. Klir, M. J. Wierman; 2nd edition. – Verlag Berlin Heidelberg, 1999. – 178 p.
21. Smets, P. Imperfect information: Imprecision and uncertainty [Text] / P. Smets. – Uncertainty Management in Information Systems, 1997. – P. 225–254. doi: 10.1007/978-1-4615-6245-0_8
22. Olive, A. Conceptual Modeling of Information Systems [Text] / A. Olive. – Springer Berlin Heidelberg, 2007. – P. 471. doi: 10.1007/978-3-540-39390-0
23. Литвин, В. В. Використання адаптивних онтологій в інтелектуальних системах прийняття рішень [Текст] / В. В. Литвин, В. Я. Крайовський, Н. Б. Шаховська // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2009. – Т. 4, № 3 (40). – С. 1–12. – Режим доступу: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/20838/18477

УДК 519.85

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.58550

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОЖЕСТВА

О. С. Пичугина
Кандидат физико-математических наук
Кафедра прикладной математики
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Науки, 14, г. Харьков, Украина, 61166
E-mail: pichugina_os@mail.ru

С. В. Яковлев
Доктор физико-математических наук, профессор
Кафедра информационных технологий и защиты информации
Харьковский национальный университет внутренних дел
пр. 50-летия СССР, 27, г. Харьков, Украина, 61080
E-mail: svsyak@mail.ru

Вводиться поняття функціонального представлення множини, описуються підходи до побудови таких представлень на прикладі загальної множини перестановок. Запропоновано класифікацію функціональних представлень і побудовано строгі представлення загальної перестановочної множини на базі спеціальних властивостей симетричних функцій. Наведено візуалізацію та аналіз строгих представлень перестановок малої вимірності

Ключові слова: функціональне представлення множини, загальна множина перестановок, перестановочний многогранник, комбінаторна оптимізація

Вводится понятие функционального представления множества, описываются подходы к построению таких представлений на примере общего множества перестановок. Предложена классификация функциональных представлений и построены строгие представления общего перестановочного множества на основе специальных свойств симметричных функций. Приведена визуализация и анализ строгих представлений для перестановок малой размерности

Ключевые слова: функциональное представление множества, общее множество перестановок, перестановочный многогранник, комбинаторная оптимизация

1. Введение

Одним из основных направлений исследований в области полиэдральной комбинаторики является построение выпуклых оболочек комбинаторных множеств и аналитическое описание соответствующих комбинаторных многогранников. При этом комбинаторные множества рассматриваются как свои образы при соответствующих отображениях (погружениях) в арифметическое евклидово пространство. Такой класс множеств в литературе часто называется евклидовыми комбинаторными множествами [1, 2].

В настоящее время получены аналитические описания таких комбинаторных многогранников как многогранник перестановок и четных перестановок [3], общий перестановочный многогранник [1, 2], общий многогранник размещений [2], модульный многогранник [4], многогранник булевого множества [5], многогранник Биркгофа [6] перестановочных матриц, многогранники некоторых классов сочетаний [7] и соответствующих полимножеств [2].

Особый интерес в задачах комбинаторной оптимизации вызывают вершинно-расположенные множества, т. е. множества, совпадающие с крайними точками (вершинами) своих выпуклых оболочек (многогранников).

Одним из наиболее интересных классов вершинно-расположенных множеств является общее множество перестановок [1, 3]. Именно поэтому актуальной задачей является исследование подходов к его функционально-аналитическому описанию, что и является предметом настоящей статьи. Решение такой задачи существенно расширяет возможности применения как классических, так и специальных методов непрерывной оптимизации к решению дискретных оптимизационных задач.

2. Анализ литературных данных и постановка задачи

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации в следующей постановке:

$$f(x) \to \min , \quad (1)$$

$$x \in E \subset R^n , \quad (2)$$

где E – дискретное множество:

$$1 < |E| < \infty . \quad (3)$$

Будем считать, что множество E вершинно-расположенное, т. е.

$$E = \text{vert conv } E . \quad (4)$$

Осуществим эквивалентную формулировку дискретной задачи (1)–(4) как задачу нелинейного программирования, представив множество E системой соответствующих уравнений и неравенств.

Таким образом, исходная дискретная задача формулируется в непрерывной постановке [8–10]. При этом возникает необходимость аналитического описания условия дискретности, т. е. явного задания аналитического вида функций, входящих в систему уравнений и неравенств.

Введем следующие обозначения. Пусть

– P – выпуклая оболочка E ($P = \text{conv } E$, комбинаторный многогранник множества E):

$$P = \{x : Ax \le b\} , \quad (5)$$

– S – описанная вокруг E выпуклая поверхность, т. е. $E \subset S$,

$$S = \{x : f_1(x) = 0\},\ f_1(x) - \text{выпуклая}. \quad (6)$$

Множество E представим в виде пересечения многогранника (5) и поверхности (6):

$$E = P \cap S . \quad (7)$$

Таким образом, для аналитического задания E достаточно, с одной стороны, получить систему многогранника (5), а с другой стороны, – явный вид поверхности (6).

В результате исходная задача сводится к описанию комбинаторного многогранника P и аналитическому описанию поверхности S.

Замечание 1. Формирование комбинаторных многогранников – это основная задача, решаемая в полиэдральной комбинаторике [11, 12]. На сегодняшний день она решена для таких евклидовых комбинаторных множеств как множество перестановок [1, 3, 13] и его обобщений, таких как общие перестановочное и полиперестановочное множества [1, 2, 14]; для общих множеств размещений и полиразмещений [2], отдельных классов сочетаний [7], некоторых 0-1-множеств [5] таких как множество перестановочных матриц [6] и т. п.

Вторая задача состоит в поиске выпуклых функций, принимающих постоянные значения на E . Для однозначного описания множества S можно сформулировать дополнительные условия, такие как [1, 14, 15]:

– выбор сферы минимального радиуса;

– поиск поверхности минимальной площади;

– поиск поверхности, ограничивающей выпуклое тело минимального объема и т. п.

Заметим, что многообразие выбора поверхностей (6) приводит к различным представлениям (5)–(7). Например, дискретные множества можно представить пересечением нескольких поверхностей.

Продемонстрируем такую возможность на примере булевого множества $B_n = \{0,1\}^n$. Известно, что его многогранником является единичный гиперкуб, вписанный в сферу с центром (0.5) радиуса $0.5\sqrt{n}$, т. е. его представление (5)–(7) имеет вид:

$$B_n = \left\{ x \in R^n : \bar{0} \le x \le \bar{1},\ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{n}{4} \right\}. \quad (8)$$

С другой стороны, данное множество можно представить в виде [10]:

$$B_n = \{ x \in R^n : x_i^2 - x_i = 0,\ i \in J_n \},\ J_n = \{1,...,n\} , \quad (9)$$

т. е. (9) – еще один способ аналитического задания комбинаторного множества B_n.

Заметим, что (9) может быть переписано в виде:

$$E = \{ x \in R^n : f_j(x) = 0,\ j \in J_n \} , \quad (10)$$

где

$$E = B_n,\ f_j(x) = x_j^2 - x_j,\ j \in J_n .$$

Оба приведенных представления B_n находят широкое применение в булевой оптимизации [10]. Так представление (8) используется в вогнутых методах [10], а представление (9) – в методах штрафных функций [16] решения задачи (1), (2) на $E = B_n$.

Поставленная задача функционально-аналитического (или просто функционального) представления дискретного множества (4) является непосредственным обобщением обоих приведенных способов.

Все вышеперечисленные в замечании 1 комбинаторные множества вершинно расположены и вписаны в сферу за исключением общего множества размещений. Среди множеств $E^n_{\eta k}(G)$ n-размещений из мультимножества G из η элементов, k из которых различны, существует два подкласса вершинно расположенных, один из которых – $E^n_{\eta 2}(G)$ – вписан в сферу, другой – $E^n_{n+1,k}(G)$ – в эллипсоид. Таким образом, поскольку аналитический вид соответствующих многогранников известен, для этих вершинно расположенных множеств представления (5)–(7) известны.

Заметим, что число ограничений в системах уравнений и неравенств комбинаторных многогранников может быть достаточно большим. Это затрудняет применение в вычислительных схемах представлений (5)–(7) и требует разработки специальных приемов, позволяющих использовать число ограничений системы (5), сравнимое с размерностью пространства. Среди них метод последовательного подсоединения ограничений [2] и полиэдрально-сферическом метод [17], в котором используется подсистема ограничений многогранника, служащих правильными отсечениями точек на описанной сфере.

Данная особенность касается, в частности, общего перестановочного множества $E_{\eta k}(G)$, число ограничений которого достигает $2^n - 1$ [3]. В то же время, представление (10) содержит всего n ограничений, и было бы интересно получить его для как для $E_{\eta k}(G)$, так и для других евклидовых комбинаторных множеств.

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является построение различных функциональных представлений дискретного множества на примере общего перестановочного множества.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

– обобщение аналитических представлений дискретных множеств евклидового пространства, в т. ч. евклидовых комбинаторных множеств;

– классификация функциональных представлений;

– описание оригинальных подходов функционального представления общего перестановочного множества;

– анализ и визуализация полученных представлений перестановок.

4. Функциональные представления множеств

Функциональным назовем представление множества E с помощью функциональных зависимостей вида

$$f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'}, \tag{11}$$

$$f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'}. \tag{12}$$

В зависимости от типа функций (11), (12) функциональные представления могут быть линейные и нелинейные, непрерывные, дифференцируемые, гладкие, выпуклые и т. п.

В обозначениях

$$M_j = \left\{ x \in R^n : \begin{cases} f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'} \\ f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'} \end{cases} \right\}, \tag{13}$$

представление (11), (12) может быть переписано в виде:

$$E = \bigcap_{i \in J_m} M_i. \tag{14}$$

Введем еще несколько типов таких представлений. (11)–(12) назовем:

а) *строгим* представлением , если

$$m = m', \tag{15}$$

иначе *нестрогим*;

б) *неизбыточным* представлением E, если извлечение любого из ограничений (11)–(12) приводит к нарушению (14):

$$\forall\ j \in J_m\ \bigcap_{i \ne j} M_i \ne E, \tag{16}$$

иначе *избыточным*;

в) *ограниченным* представлением E, если среди (13) есть ограниченные множества:

$$\exists j \in J_m,\ r_j > 0,\ a_j \in R^n:\ M_j \subseteq C_{r_j}(a_j) = \operatorname{conv} S_{r_j}(a_j), \tag{17}$$

иначе *неограниченным*;

Замечание 2. Функциональное представление может обладать теми или иными свойствами в разных областях R^n, поэтому, в случае необходимости, указывается его тип и область.

5. Подходы к построению функциональных представлений множеств

Приведем два таких подхода, в первом из которых используются, прежде всего, свойства линейных функций на ЕКМ, во втором – нелинейных.

Полиэдрально-поверхностный подход – это построение представления (5)–(7) в результате формирования системы комбинаторного многогранника (7) и произвольной описанной поверхности (6). В результате строится нестрогое, нелинейное, выпуклое представление. Если при этом система (7) неизбыточна, то (5)–(7) будет также неизбыточным представлением данного комбинаторного множества.

Данный подход называется полиэдрально-поверхностным, поскольку основным его этапом является аналитическое задание комбинаторного полиэдра, второстепенным – поиск выпуклой поверхности.

Как видно, полиэдрально-поверхностный подход основан на свойствах линейных функций на евклидовых комбинаторных множествах. Следующий подход, напротив, основан на исследовании свойств нелинейных функций на этих множествах и возможности формирования дискретных множество в результате пересечения этих поверхностей.

Мультиповерхностный подход состоит в формировании дискретного множества из строгой части (11) функционального представления с последующим отсечением, в случае необходимости, недопустимых точек при помощи ограничений нестрогой части (13).

Если, к примеру, известен класс функций, обладающий специфическими свойствами на E, то возникает вопрос, достаточно ли функций в нем, чтобы сформировать функциональное представление E. Если да, какие из них задают неизбыточное представление.

При ответе на первый вопрос наиболее сложным является доказательство, что в результате формируется именно данное множество, т. е. выполнено (14). В противном случае сформированная часть функциональных представлений дополняется функциями других классов.

Продемонстрируем применимость перечисленных подходов к построению функциональных представлений и возможность с их помощью построения строгих функциональных представлений вида (10) на обобщении множества перестановок [1, 3, 13] – общем перестановочном множестве [1, 2, 14].

6. Непрерывные представления общих перестановок

Пусть $J_m^0 = J_m \cup \{0\}$, $S_r(a)$ – сфера радиуса r с центром в точке a.

Рассмотрим в качестве E евклидово множество общих перестановок [1, 2, 14] из мультимножества – $E = E_{nk}(G)$:

$$G = \{g_i\}_{i\in J_n} = \{e_i^{n_k}\}_{i\in J_k};\ e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1}.$$

Будем полагать, что (3) выполнено, откуда

$$k > 1. \tag{18}$$

6. 1. Одно функциональное представления E_n

Частным случаем $E_{nk}(G)$ является множество $E_n = E_n(J_n)$ перестановок из первых n натуральных чисел [1, 3, 13], для которого в [15] предложено следующее функциональное представление:

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) = 0, \tag{19}$$

$$1 \le x_i \le n,\ (x_i - x_j)^2 \ge 1,\ i<j,\ i,j \in J_n. \tag{20}$$

Здесь (19) задает целочисленную решетку, а (20) обеспечивает выбор векторов с различными координатами в пределах $[1,n]$, поэтому обобщение данного представления на общий случай $E_{nk}(G)$ невозможно.

Представление (19), (20) – пример применения мультиповерхностного подхода (п. 5) к построению функциональных представлений, когда дискретное множество задается при помощи (19), а потом недопустимые точки E_n отсекаются нелинейными ограничениями (20).

6. 2. Полиэдрально-поверхностный подход к построению функциональных представлений $E_{nk}(G)$

Данный подход применим для общего множества перестановок, поскольку система общего перестановочного многогранника [2, 18] и семейство описанных вокруг него сфер известны [1].

Утверждение 1. При выполнении условия (18) следующая система задает нестрогое неизбыточное функциональное представление множества $E_{nk}(G)$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{|\varpi|} x_{\alpha_i} \ge \sum_{i=1}^{|\varpi|} g_i,\ \forall \{\alpha_i\}_i = \varpi \subseteq$$
$$\subseteq J_{n-1} \setminus \{\{2,\dots,n_1-1\},\{n-n_k,\dots,n-2\}\}. \tag{23}$$

Доказательство. С одной стороны, (22)–(23) представляет собой неизбыточную систему многогранника $P_{nk}(G)$ [18]. С другой стороны, (21) – это уравнение сферы $S_r(O)$ радиуса

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{1/2}$$

с центром в начале координат, описанной вокруг $E_{nk}(G)$ [1]. В совокупности, (21)–(23) задают функциональное представление (7) множества $E_{nk}(G)$:

$$E_{nk}(G) = S_r(O) \cap P_{nk}(G). \tag{24}$$

Назовем это полиэдрально-поверхностное представление $E_{nk}(G)$ его *полиэдрально-сферическим представлением*. Представление (24) неизбыточное, поскольку:

– извлечение (21) приводит, в силу (18), к рассмотрению невырожденного многогранника вместо дискретного множества;

– извлечение любого из ограничений системы (22)–(23) также невозможно без изменения допустимой области в силу ее неизбыточности.

Утверждение доказано.

Поскольку $n-2$-сфера, описанная вокруг $E_{nk}(G)$, задается неединственным образом [1], найдено целое семейство подобных функциональных представлений:

Следствие 1. $\forall a \in R$ система (22)–(23), (25):

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(g_i - a)^2, \tag{25}$$

задает неизбыточное представление $E_{nk}(G)$.

В данном семействе особый интерес представляет, наряду с базовым представлением (21)–(24), представление, содержащее сферу S^{min} минимального радиуса [1], соответствующую параметру a:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i. \tag{26}$$

6. 3. Мультиповерхностный подход к построению функциональных представлений $E_{nk}(G)$

Следующие теоремы показывают применимость поверхностно-многогранного подхода (п. 5) к построению представлений множества $E_{nk}(G)$, а именно обосновывают существование двух непрерывных строгих функциональных представлений, одно из которых также является выпуклым в R^{n+} для генерирующего мультимножества G:

$$G \ge 0 . \tag{27}$$

Итак, известно, что симметричные многочлены принимают постоянное значение на общих перестановках [19], т. е. они могут потенциально служить основой для построения функциональных представлений $E_{nk}(G)$. Попробуем сформировать такие представления из этих функций. Остановимся на классе симметричных полиномов, в котором рассмотрим два подкласса

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^j\right\}_{j\in N},$$

$$\left\{\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} x_i\right\}_{j\in N},$$

принимающие на $E_{nk}(G)$ значения

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i^j\right\}_{j\in N},\left\{\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} g_i\right\}_{j\in N},$$

соответственно.

Выдвинем гипотезу, что как из

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^j=\sum_{i=1}^{n} g_i^j\right\}_{j\in J_N},$$

так и из

$$\left\{\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} x_i=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} g_i\right\}_{j\in N}$$

можно сформировать строгие представления. Соответственно, следующим предположением будет то, что первые n уравнений данных систем задают эти представления.

Итак, предположение состоит в том, что каждая из следующих систем задает функциональное представление $E_{nk}(G)$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j=\sum_{i=1}^{n} g_i^j,\ j\in J_n; \tag{28}$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} x_i=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} g_i,\ j\in J_n. \tag{29}$$

Введем в рассмотрение вектор g, соответствующий мультимножеству G:

$$g=(g_i)_{i\in J_n}, \tag{30}$$

а также системы функций:

$$Q(x)=\left\{q_j(x)\right\}_{j\in J_n^0}, \tag{31}$$

где

$$q_j(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^j,\ j; \tag{32}$$

$$H(x)=\left\{h_j(x)\right\}_{j\in J_n^0}, \tag{33}$$

где

$$h_j(x)=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\prod_{i\in\omega} x_i,\ j\in J_n;\ h_0(x)=1. \tag{34}$$

В этих обозначениях системы (28), (29) переписываются, соответственно, следующим образом:

$$A(x,g)=\left\{q_j(x)=q_j(g)\right\}_{j\in J_n}; \tag{35}$$

$$B(x,g)=\left\{h_j(x)=h_j(g)\right\}_{j\in J_n}. \tag{36}$$

Лемма 1. Система функций (33) может быть получена рекуррентно с использованием функций (31) следующим образом:

$$h_j(x)=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x),\ j\in J_n \tag{37}$$

с базой $h_0(x)$, $q_1(x)$, где $q_1(x)$ определяется из (32).

Доказательство.

a. При $j=1$ формула (37) приобретает вид:

$$h_1(x)=\sum_{i=1}^{1} q_i(x)\cdot h_{1-i}(x)=q_1(x)$$

и справедлива, поскольку, согласно (31), (33):

$$h_j(x)=h_1(x)=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=1}}\prod_{i\in\omega} x_i=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=1}} x_i=\sum_{i=1}^{n} x_i=q_1(x). \tag{38}$$

b. Для $j=2$ (34) имеет вид:

$$h_j(x)=h_2(x)=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=2}}\prod_{i\in\omega} x_i=\sum_{i<i'} x_i x_{i'}. \tag{39}$$

Формула (37) приобретает форму:

$$h_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}q_i(x)\cdot h_{2-i}(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(q_1(x)\cdot h_1(x)-q_2(x)\cdot h_0(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(q_1(x)\cdot h_1(x)-q_2(x)\right). \tag{40}$$

Покажем, что (40) справедлива. С учетом (32), (38), (39), имеем:

$$\frac{1}{2}\left(q_1(x)\cdot h_1(x)-q_2(x)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(q_1(x)\right)^2-q_2(x)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i<i'}x_ix_{i'}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\sum_{i<i'}x_ix_{i'}=h_2(x),$$

что и требовалось доказать.

c. $j=3$:

$$h_j(x)=h_3(x)=\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=3}}\prod_{i\in\omega}x_i=\sum_{i<i'<i''}x_ix_{i'}x_{i''}. \qquad (41)$$

Докажем справедливость (37) в этом случае. Для этого покажем, что выполнено:

$$h_3(x)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i-1}q_i(x)\cdot h_{3-i}(x)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(q_1(x)\cdot h_2(x)-q_2(x)\cdot h_1(x)+q_3(x)\cdot h_0(x)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(q_1(x)\cdot h_2(x)-q_2(x)\cdot h_1(x)+q_3(x)\right). \qquad (42)$$

Преобразуем правую часть (42) с учетом (32), (41):

$$\frac{1}{3}\left(q_1(x)\cdot h_2(x)-q_2(x)\cdot h_1(x)+q_3(x)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=2}}\prod_{i'\in\omega}x_{i'}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{\substack{\omega\subseteq J_n\\|\omega|=1}}\prod_{i'\in\omega}x_{i'}+\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i'<i''}x_{i'}x_{i''}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i'=1}^{n}x_{i'}+\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\left(\sum_{\substack{i'<i''\\i\in\{i',i''\}}}x_{i'}x_{i''}+\sum_{\substack{i'<i''\\i\neq i',i''}}x_{i'}x_{i''}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(x_i+\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^{n}x_{i'}\right)+\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{\substack{i'<i''\\i\neq i',i''}}x_{i'}x_{i''}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{\substack{i'<i''\\i\in\{i,i'\}}}x_{i'}x_{i''}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^{n}x_{i'}\right)+\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i<i'<i''}x_ix_{i'}x_{i''}+\sum_{i'<i<i''}x_ix_{i'}x_{i''}+\sum_{i'<i''<i}x_ix_{i'}x_{i''}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{\substack{i'<i''\\i=i'}}x_{i'}x_{i''}+\sum_{\substack{i'<i''\\i=i''}}x_{i'}x_{i''}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^{n}x_{i'}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\cdot\sum_{i<i'<i''}x_ix_{i'}x_{i''}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\sum_{i<i''}x_{i''}+\sum_{i'<i}x_{i'}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^{n}x_{i'}\right)\right)=$$
$$=\sum_{i<i'<i''}x_ix_{i'}x_{i''}+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\left(\sum_{i'\neq i}x_{i'}-\sum_{i'\neq i}x_{i'}\right)=\sum_{i<i'<i''}x_ix_{i'}x_{i''}=h_3(x).$$

Получена левая часть (42), что и требовалось доказать.

Для $3<j\leq n$ доказательство аналогично.

Следствие 2. Система функций (31) может быть получена из системы (33) с помощью рекуррентного соотношения:

$$q_j(x)=j\cdot(-1)^{-j+1}h_j(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-j+1}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x)\ ,j\in J_n. \qquad (43)$$

и базы $q_0(x)$, $h_1(x)$.

Доказательство. Сформируем систему (31), выражая из (37) функцию $q_j(x)$ через $\{h_i\}_{i\in J_j}$, $\{q_i\}_{i\in J_{j-1}}$:

$$0=j\cdot h_j(x)-\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x)=$$
$$=j\cdot h_j(x)+\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x)=$$
$$=j\cdot h_j(x)+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x)+(-1)^jq_j(x)\cdot h_0(x)=$$
$$=j\cdot h_j(x)+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i}q_i(x)\cdot h_{j-i}(x)+(-1)^jq_j(x).$$

Поделив обе части на $(-1)^j$, получим в точности (43), что и требовалось.

Теорема 1. Системы $A(x,g)$, $B(x,g)$ вида (35), (36) эквивалентны, т. е. x^* – решение (28) $\Leftrightarrow$ x^* – решение (29).

Доказательство.

Необходимость. Покажем, что если x^* – решение (28), то x^* – решение (29). В обозначениях (35), (36) это выглядит следующим образом:

$$q_j(x^*)=q_j(g)\ \left(j\in J_n\right)\overset{?}{\Rightarrow}$$
$$\overset{?}{\Rightarrow}\ h_j(x^*)=h_j(g)\ \left(j\in J_n\right). \qquad (44)$$

Перепишем системы (35), (36) в виде:

$$A(x,g)=\{A.j(x,g)\}_{j\in J_n},$$

$$A.j(x,g)=\left\{q_j(x)=q_j(g)\right\},\ j\in J_n; \qquad (45)$$

$$B(x,g)=\{B.j(x,g)\}_{j\in J_n},$$

$$B.j(x,g)=\left\{h_j(x)=h_j(g)\right\},\ j\in J_n. \qquad (46)$$

Заметим, что, учитывая обозначения (31), (33), левая часть (45), (46) совпадает с $Q(x)$, $H(x)$, правая – с $Q(g)$, $H(g)$, соответственно.

Введем в рассмотрение уравнения:

$$\text{(I)}\ \ f_I(x)=a,\ \text{(II)}\ \ f_{II}(x)=b,$$

а также операции умножения уравнения на число и умножения двух уравнений:

$$k \cdot (I): \; k \cdot f_I(x) = k \cdot a;$$

$$(I) \cdot (II): \; f_I(x) \cdot f_{II}(x) = a \cdot b. \qquad (47)$$

Будем формировать систему $B(x,g)$ по системе $A(x,g)$, осуществляя над уравнениями рекуррентные подстановки (37) при $x = g$ ((30)).

Поскольку последовательность преобразований (37) не зависит от x, для обеих частей уравнений (36) и над самими уравнений она идентична. С учетом (45)–(47) получаем, что система (36) может быть получена рекуррентно из системы (35) следующим образом:

$$B.j(x,g) = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1} A.i(x,g) \cdot B.\left(j-i\right)(x,g), \; j \in J_n. \qquad (48)$$

База $B.0(x,g)$, $A.1(x,g)$ системы (48) определяется из (45), (46):

$$B.0(x,g) = \left\{1 \equiv 1\right\};$$

$$A.1(x,g) = \left\{q_1(x) = q_1(g)\right\},$$

откуда имеем – если x^* удовлетворяет $A(x^*,g) \Rightarrow x^*$ удовлетворяет $B(x^*,g)$. Учитывая обозначения (45), (46), получаем (44), что и требовалось доказать.

Достаточность. Если x^* – решение (29), то x^* – решение (28).

В обозначениях (35), (36) это означает необходимость показать, что

$$h_j(x^*) = h_j(g) \; \left(j \in J_n\right) \overset{?}{\Rightarrow} q_j(x^*) = q_j(g) \; \left(j \in J_n\right).$$

Аналогично вышеприведенному и согласно (43), формируем систему (45) рекуррентно, используя (46):

$$A.j(x,g) = j \cdot (-1)^{-j+1} B.j(x,g) + \\ + \sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-j+1} A.i(x,g) \cdot B.(j-i)(x,g), \; j \in J_n. \qquad (49)$$

База системы (49), согласно (45), (46):

$$A.0(x,g) = \left\{1 \equiv 1\right\},$$

$$B.1(x,g) = \left\{h_1(x) = h_1(g)\right\}.$$

Аналогично вышесказанному, получаем – если x^* удовлетворяет $B(x^*,g) \Rightarrow x^*$ удовлетворяет $A(x^*,g)$, т.е. в обозначениях (45), (46) это означает справедливость (43).

Теорема доказана.

Теорема 2. Точка является элементом общего множества перестановок $E_{nk}(G)$ тогда и только тогда, когда она является решением (28), т. е.

$$x \in E = E_{nk}(G) \Leftrightarrow x \in D,$$

$$D = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^j = \sum_{i=1}^{n} g_i^j\right\}_{j \in J_n}. \qquad (50)$$

Доказательство. С учетом теоремы 1, можно перейти к рассмотрению эквивалентной к (28) системы (29) и доказать:

$$x \in E = E_{nk}(G) \Leftrightarrow x \in D', \qquad (51)$$

$$D' = \left\{x \in R^n : \sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega| = j}} \prod_{i \in \omega} x_i = \sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega| = j}} \prod_{i \in \omega} g_i\right\}_{j \in J_n} = \\ = \left\{x \in R^n : H(x) = H(g)\right\}. \qquad (52)$$

Необходимость:

$$x \in E = E_{nk}(G) \overset{?}{\Rightarrow} x \in D'. \qquad (53)$$

Согласно [19], произвольный симметричный полином $P(x)$ на $E_{nk}(G)$ принимает постоянное значение, равное $P(g)$, $P(x) \underset{E_{nk}(G)}{=} P(g)$.

Поскольку (34) – система симметричных многочленов, имеем:

$$\forall x \in E_{nk}(G) \;\; h_j(x) \underset{E_{nk}(G)}{=} h_j(g) \; (j \in J_n)$$

или, в обозначениях (33), $H(x) \underset{E_{nk}(G)}{=} H(g)$.

Откуда, учитывая (52), получаем (53).

Достаточность. Проверим справедливость:

$$x \in D' \overset{?}{\Rightarrow} x \in E = E_{nk}(G). \qquad (54)$$

Доказательство проводится в 2 этапа. На *Этапе 1* показываем, что координаты допустимых векторов $x \in D'$ являются элементами мультимножества G; на *Этапе 2* – что координаты этих векторов в точности образуют G, т. о. эти вектора – элементы евклидового комбинаторного множества общих перестановок из G.

Этап 1. Перепишем систему (46) в явном виде, используя (34):

$$B(x,g) = \{B.j(x,g)\}_{j \in J_n},$$

$$B.j(x,g) = \left\{h_j(x) = h_j(g)\right\} = \\ = \left\{\sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega| = j}} \prod_{i \in \omega} x_i = \sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega| = j}} \prod_{i \in \omega} g_i\right\}, j \in J_n.$$

Учитывая, что $\varpi \subseteq J_n$ содержит лишь различные индексы, а также выражение (34), запишем эту систему в форме:

$$B.1(x,g)=\left\{\sum_i x_i = h_1(g)\right\};$$

$$B.2(x,g)=\left\{\sum_{i<i'} x_i x_{i'} = h_2(g)\right\};$$

$$B.3(x,g)=\left\{\sum_{i<i'<i''} x_i x_{i'} x_{i''} = h_3(g)\right\};\ldots ;$$

$$B.(n-2)(x,g)=\left\{\sum_i \prod_{\substack{i'<i''\\ i\neq i',i''}} x_i = h_{n-2}(g)\right\};$$

$$B.(n-1)(x,g)=\left\{\sum_i \prod_{i\neq i'} x_{i'} = h_{n-1}(g)\right\};$$

$$B.n(x,g)=\left\{\prod_i x_i = h_n(g)\right\}.$$

Сформируем из $B.n(x,g)$ уравнение n-го порядка по отношению к переменной

$$x = x_1\,, \tag{55}$$

исключая последовательно оставшиеся переменные с помощью $B.j(x,g),\ j\in J_{n-1}$ и используя следующее свойство:

$$\forall i'\in J_n\ \prod_{\substack{i\in\varpi,|\varpi|=j\\ i\neq i'}} x_i = h_j(g) - x_{i'}\sum_{|\varpi|=j-1}\prod_{\substack{i\in\varpi\\ i'\notin\varpi}} x_i\,. \tag{56}$$

В качестве i' используем 1, в результате чего (56) приобретет вид:

$$\prod_{\substack{i\in\varpi,|\varpi|=j\\ i\neq 1}} x_i = h_j(g) - x_1\sum_{|\varpi|=j-1}\prod_{\substack{i\in\varpi\\ 1\notin\varpi}} x_i\,,\ j\in J_n\,. \tag{57}$$

Индекс j в $B.j(x,g)$ меняем последовательно, начиная с n и заканчивая 1. Так для $j=n$ рассматривается уравнение $B.n(x,g)$, которое может быть переписано, с использованием (57), в виде:

$$0 = h_n(g) - \prod_i x_i \underset{j=n}{=} h_n(g) -$$

$$-x_1\prod_{i\neq 1} x_i \underset{j=n-1}{=} h_n(g) - x_1\left(h_{n-1}(g) - x_1\sum_{|\varpi|=n-2}\prod_{\substack{i\in\varpi\\ 1\notin\varpi}} x_i\right)\underset{j=n-2}{=}$$

$$= h_n(g) - x_1\left(h_{n-1}(g) - x_1\left(h_{n-2}(g) - x_1\sum_{|\varpi|=n-3}\prod_{\substack{i\in\varpi\\ 1\notin\varpi}} x_i\right)\right) = \ldots \underset{j=1}{=}$$

$$= h_n(g) - x_1\left(h_{n-1}(g) - x_1\left(h_{n-2}(g) - x_1\left(h_{n-3}(g) - x_1\left(\ldots\left(h_1(g) - x_1\right)\right)\right)\right)\right).$$

Упрощая последнее выражение, получаем:

$$0 = h_n(g) - h_{n-1}(g)\cdot x_1 -$$
$$-x_1\left(-x_1\left(h_{n-2}(g) - x_1\left(h_{n-3}(g) - x_1\left(\ldots\left(h_1(g) - x_1\right)\right)\right)\right)\right) =$$
$$= h_n(g) - h_{n-1}(g)\cdot x_1 + h_{n-2}(g)\cdot x_1^2 -$$
$$-h_{n-3}(g)\cdot x_1^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x_1^n.$$

С учетом (55), имеем:

$$x^n - h_1(g)\cdot x^{n-1} +$$
$$+h_2(g)\cdot x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot h_1(g) = 0. \tag{58}$$

Корни $x^{(k)},\ k\in J_n$, уравнения (58) определяются по формуле Виета и, в силу (34), они в точности образуют мультимножество G:

$$\left\{x^{(k)}\right\}_{k\in J_n} = \left\{g_i\right\}_{i\in J_n} = G\,,$$

т. о. первая координата x_1 принимает n значений

$$x_1 \in \left\{x_1^{(k)}\right\}_{k\in J_n} = G\,.$$

Выбирая в (55) вместо переменной x_1 остальные переменные, $x = x_j, j\in J_n\setminus\{1\}$, получим идентичные результаты. В итоге имеем:

$$\forall j\in J_n\ x_j \in \left\{x_j^{(k)}\right\}_{k\in J_n} = G\,. \tag{59}$$

Таким образом, показано, что координаты векторов-решений (52) суть элементы G, т. е.

$$x\in D' \Rightarrow x_j\in G,\ j\in J_n\,. \tag{60}$$

Этап 2. Покажем, что точка $x=(x_i)_i\in D'$ не только удовлетворяет (60), но и является перестановкой из G, т. е.

$$x\in D' \overset{?}{\Rightarrow} \left\{x_j\right\}_{j\in J_n} = G\,. \tag{61}$$

Поскольку, согласно теореме 1, области (50) и (52) совпадают ($D=D'$), вместо (61) можно показать справедливость

$$x\in D \overset{?}{\Rightarrow} x\in E_{nk}(G)\,.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, $x^*\in D,\ x_i^*\in G,\ i\in J_n$, при этом $x^*\notin E_{nk}(G)$, т. е.

$$\left\{x_j^*\right\}_{j\in J_n} \neq G\,. \tag{62}$$

Сформируем мультимножество координат $x^*: X^* = \{x_i^*\}_{i\in J_n}$. С учетом предположения (62), имеем:

$$|G'| = |G\cap X^*| = n' < n;$$

$$|G''| = |G\setminus G'| = n'' = n - n' > 0.$$

Не ограничивая общности, считаем, что последние n' координат x^* являются подмножеством G, иначе переменные перенумеровываются.

Условие (62) теперь можно переписать в виде:

$$x^* \in D,\ x_i^* \in G,\ i \in J_n,$$

$$\exists n'' \in J_n:\ \left\{x_i\right\}_{i\in J_n \setminus J_{n''}} =$$

$$= G' \subset G,\ \left\{x\ \right\}_{i\in J_{n''}} = G'' \neq \left\{\varnothing\right\}. \qquad (63)$$

Рассмотрим подсистему первых n'' уравнений (28):

$$\sum_{x_i^* \in G''} x_i^{*j} + \sum_{x_i^* \in G'} x_i^{*j} = \sum_{i=1}^{n} g_i^j,\ j \in J_{n''}.$$

Учитывая (63), имеем:

$$\sum_{x_i^* \in G''} x_i^{*j} + \sum_{g_i \in G'} g_i^j = \sum_{g_i \in G''} g_i^j + \sum_{g_i \in G'} g_i^j,\ j \in J_{n''}$$

или

$$\sum_{x_i^* \in G''}^{n} x_i^{*j} = \sum_{g_i \in G''}^{n} g_i^j,\ j \in J_{n''},$$

т. е. получаем систему вида (28) для мультимножества $G'' = \{g_i^{''}\}_{i\in J_{n''}}$:

$$\sum_{i=1}^{n''} x_i^{*j} = \sum_{i=1}^{n''} g_i^{''j},\ j \in J_{n''}. \qquad (64)$$

Согласно первой части теоремы, примененной к G'' и $x'' \in R^{n''}$, имеем:

$$\forall x'' \in D'' = \left\{ \sum_{i=1}^{n''} x_i^{''j} = \sum_{i=1}^{n''} g_i^{''j}, j \in J_{n''} \right\} \Rightarrow x_i^{''} \in G'',\ i \in J_{n''}.$$

Возьмем в качестве $x'' = (x_i^*)_{i\in J_{n''}}$, откуда, в силу (64), получаем:

$$x_i^* \in G'',\ i \in J_{n''}. \qquad (65)$$

(65) противоречит (63), что и доказывает вторую часть теоремы 2.

Объединяя результаты теорем 1,2, получаем:

$$x \in E_{nk}(G) \Leftrightarrow x \in D \Leftrightarrow x \in D',$$

где D, D' определяется из (50), (52), соответственно.

Как видно, получено два строгих представления (28) и (29) множества $E_{nk}(G)$, которые в обозначениях (11) записываются следующим образом:

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^j - \sum_{i=1}^{n} g_i^j = 0,\ j \in J_n; \qquad (66)$$

$$f_j(x) = \sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega|=j}} \prod_{i\in\omega} x_i - \sum_{\substack{\omega \subseteq J_n \\ |\omega|=j}} \prod_{i\in\omega} g_i = 0,\ j \in J_n. \qquad (67)$$

Отметим, что в оба этих представления входит (22), выражающее известное свойство точек $E_{nk}(G)$ расположенности на данной гиперплоскости. Помимо этого, в представление (66) входит также уравнение (21), выражающее вписанность $E_{nk}(G)$ в гиперсферу.

Остановимся детальнее на представлении (66) и проклассифицируем его (п. 4): по типу функций $\left\{f_j(x)\right\}_j$ это нелинейное, непрерывное, дифференцируемое, более того гладкое представление.

Четные степени представления (66) $\left\{f_{2j'}(x)\right\}_{j'\in J_{\left[\frac{n}{2}\right]}}$ – выпуклые функции; нечетные степени $\left\{f_{2j'-1}(x)\right\}_{j'\in J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$ – выпуклые R^{n+} при выполнении (27), откуда видно, что (66) – выпуклое представление $E_{nk}(G)$ в двух случаях:

a) при $n=2$ $\forall G$ в R^n;

b) при $n>2$ $\forall G$ вида (27) в R^{n+} (замечание 2).

Поскольку $m = m' = n$, представление (66) – строгое ((15)).

Замечание 3. На вопрос о неизбыточности (66) нельзя дать однозначный ответ, т.к., с одной стороны, для $G = J_4$ оно будет таковым и E_4. С другой стороны, для $G = \left\{0,0,0,1\right\}$ поверхности M_3, M_4 вида (13) вписаны в сферу M_2. В свою очередь, M_4 вписана в M_3, т. о. (66) – избыточное, из которого может быть сформированы неизбыточные представления исключением некоторых ограничений (67).

Подобно следствию 1, на базе представлений (66), (67) могут быть построены целые семейства строгих представлений заменой $x_i \to x_i - a,\ i \in J_n$.

Следствие 3. $\forall a \in R$ каждая из следующих систем:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^j - \sum_{i=1}^{n} \left(g_i - a\right)^j = 0,\ j \in J_n, \qquad (68)$$

$$\sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \left(x_i - a\right)^j -$$

$$- \sum_{\omega \subseteq J_n, |\omega|=j} \prod_{i\in\omega} \left(g_i - a\right)^j = 0,\ j \in J_n, \qquad (69)$$

задает строгое представление $E_{nk}(G)$.

В частности, в (68) содержит уравнение S^{min} при a, определяемом из (26).

6. 4. Анализ функциональных представлений $E_{nk}(G)$

Все четыре представления – (19), (20) (**П1**), (21)–(24) (**П2**), (66) (**П3**) и (67) (**П4**) – непрерывные, нелинейные, дифференцируемые, гладкие. Среди них два, П1–П2, нестрогие, остальные, П3-П4, строгие. Ограниченными являются П2, П3, т. к. они содержат уравнение ограниченного множества (21). Они же выпуклые представления, причем П2 выпукло в R^n, а П3 выпукло в R^{n+} (п. 6. 3). Неизбыточными являются П1-П2, неизбыточность П3-П4 требует дальнейшего исследования.

Продемонстрируем представления П3,П4 для множества $n=3$-перестановок

$$E_{33}(G)=E_3(G),\ G=\{0,1,3\}, \quad (70)$$

на следующих примерах.

Пример 1. Функциональное представление (66) множества (70) –

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 4;\ \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 10;\ \sum_{i=1}^{3} x_i^3 = 28.$$

Как видно на рис. 1, $E_3(G)$ образовано в пересечении трех поверхностей, т. е. данное представление неизбыточное и пересекающееся. Также видно, что

$$f_3(x)=\sum_{i=1}^{3} x_i^3 - 28$$

и, соответственно, все представление выпукло в R^{3+}. Это представление также включает уравнение сферы, т. е. является ограниченным.

Пример 2. Представление (67) множества (70) –

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 4;\ x_1x_2 + x_1x_2 + x_1x_2 = 3;\ x_1x_2x_3 = 0$$

изображено на рис. 2. Как видно, $E_3(G)$ также образовано в пересечении трех поверхностей, плоскости и двух невыпуклых поверхностей второго и третьего порядков, соответственно. Таким образом, оно невыпуклое и неизбыточное. В отличие от предыдущего (пример 1), данное представление неограниченно, поскольку не включает ни одного уравнения ограниченного множества.

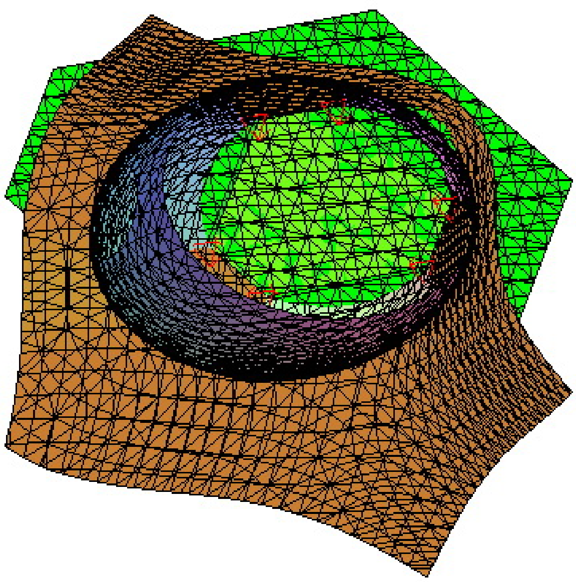

Рис. 1. Представление П3 для $E_3(G)$

Анализ результатов примеров 1–2 позволяет предположить, что, по крайней мере, для множества перестановок $E_n(G)$ непрерывные представления (66), (67) и, соответственно, (68), (69) – неизбыточные.

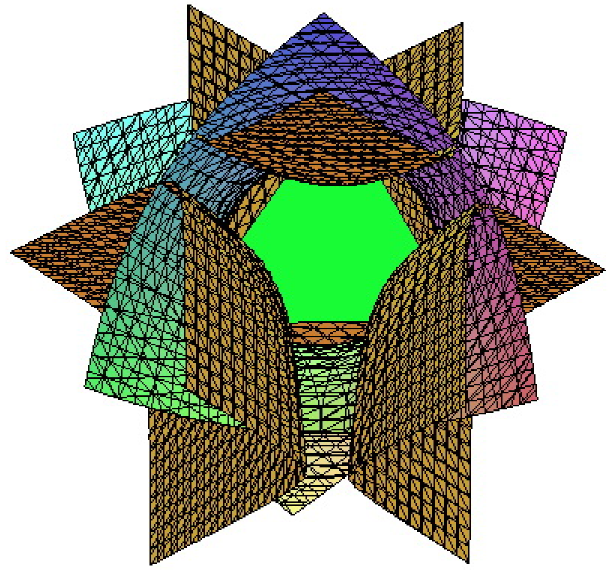

Рис. 2. Представление П4 для $E_3(G)$

7. Обсуждение результатов исследования

Данная работа продолжает и развивает два направления в евклидовой комбинаторной оптимизации – исследование свойств евклидовых комбинаторных множеств и изучение свойств функции на них. При этом связь между этими двумя направлениями устанавливается в понятии функционального представления множеств точек евклидового пространства, при помощи которых эти множества задаются аналитически. А именно, статья посвящена исследованию свойств симметричных полиномов на общем множестве перестановок и получению на их основе новых тополого-метрических свойств $E_{nk}(G)$.

В результате построен ряд функциональных представлений множества $E_{nk}(G)$, каждое из которых может служить основой для множества непрерывных релаксаций исходной задачи и имеет свою область применения.

Так полиэдрально-сферическое представление (24) может быть использовано как для решения безусловных нелинейных задач на $E_{nk}(G)$ при помощи таких методов как полиэдрально сферический метод [17], так и для решения условных линейных задач:

$$cx \underset{E_{nk}(G)}{\rightarrow} \min,\ x \in M=\{x: Ax \le b\}, \quad (71)$$

такими методами как метод комбинаторных отсечений [21]. Оба эти метода относятся к классу точных релаксационных. Так, например, в полиэдрально сферическом методе используются полиэдральная, $f(x) \underset{P_{nk}(G)}{\rightarrow} \min$, и сферическая, $f(x) \underset{S_r(O)}{\rightarrow} \min$, релаксации. В то же время, метод комбинаторных отсечений для решения задач на вершинно расположенных множествах [21] основан на отсутствии допустимых точек внутри многогранника и его граней произвольной размерности и использует полиэдральную релаксацию задачи (71) вида $cx \underset{P_{nk}(G)\cap M}{\rightarrow} \min$. Рассмотрение представления

(24) приводит к сферической релаксации $cx \underset{S_r(a)\cap M}{\rightarrow} \min$, применение которой, в совокупности с отсутствием допустимых точек внутри шара $C_r(a)$, позволяет формировать как комбинаторные, так и сферические отсечения и, тем самым, усовершенствовать метод комбинаторных отсечений [21].

Отметим, что главный недостаток практического применения представления (24) состоит в сравнимом с мощностью $E_{nk}(G)$ количестве ограничений системы $P_{nk}(G)$. Одним из способов его преодоления является разработка подходов, позволяющих использование несущественного числа ограничений многогранника, например метод последовательных подсоединений ограничений [2]. Полиэдрально-сферический метод [17] – еще один подход к частичному использованию системы ограничений многогранника в вычислительных схемах.

Строгие представления (66), (67) множества $E_{nk}(G)$, полученные в данной работе, позволяют взглянуть на данную проблему с другой точки зрения – они содержат число ограничений, равное размерности пространства, при этом все эти ограничения, за исключением одного, нелинейны. Таким образом, основной сферой применения строгих представлений видятся нелинейные задачи $f(x)\underset{E_{nk}(G)}{\rightarrow}\min$, которые могут быть эквивалентно переформулированы как непрерывные в пространстве R^{2n}:

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_j \lambda_j f_j(x)\rightarrow \min , \qquad (72)$$

где $\{f_j(x)\}_{j\in J_n}$ определяются из (66) или (67), соответственно. Тот факт, что при этом размерность задачи увеличивается несущественно, является явным преимуществом (72) по сравнению с другими эквивалентными переформулировками, в которых размерность задачи может быть увеличена до R^{n^2} [10]. Задача (72) может быть решена методом множителей Лагранжа и его модификациями [9], а также служит основой для применения метода штрафных функций [16].

Полученные строгие представления служат также основой для новых релаксационных методов, основанных на использовании части ограничений этих представлений. В этой связи интересным направлением дальнейшего исследования является получение неизбыточных представлений $E_{nk}(G)$ в зависимости от мультимножества G. Это задача является обобщением задачи поиска неизбыточной системы ограничений с комбинаторного многогранника на случай произвольного множества точек пространства, в т. ч. евклидовых комбинаторных множеств. Так, например, неизбыточное полиэдрально-сферическое сферическое представление $E_{nk}(G)$ получено ((24)) и содержит от $n+2$ до 2^n ограничений, т. е. его использование снимает в отдельных случаях проблему размерности системы ограничений комбинаторного многогранника. Решение задачи формирования неизбыточных представлений из (66), (67) тоже может снизить размерность задачи (72), достигая нижней границы $n+2$, если комбинаторное множество $E_{nk}(G)$ формируется в результате касания двух поверхностей (замечание 3). Неизбыточные функциональные представления множеств не только позволяют сократить в отдельных случаях размерность задачи (72), но они и гарантируют, что извлечение различных наборов ограничений из этих представлений дает разные релаксации исходной задачи, что может быть использовано в новых релаксационных алгоритмах.

Основным же направлением дальнейших исследований нам представляется получение новых функциональных представлений комбинаторных множеств, в частности, таких обобщений общего перестановочного множества, аналитический вид многогранников которых неизвестен, как перестановки перестановок, перестановки кортежей и т. п.

Теоретические результаты, приведенные в статье, имеют широкое практическое применение, поскольку множество задач размещения, расписания, упаковки и т. п. формулируются как задачи на перестановках [1–3, 8, 15, 20].

8. Выводы

1. Введено понятие функциональных представлений евклидовых комбинаторных множеств в виде нелинейных систем уравнений и неравенств. Приведена классификация этих представлений: по типу составляющих их функций (выпуклые, непрерывные, ограниченные и т. п.); по соотношению числа уравнений и неравенств (строгие и нестрогие); в зависимости от наличия несущественных ограничений (неизбыточные и избыточные).

2. Представлено два подхода – полиэдрально-поверхностный и поверхностно-многогранный – к построению функциональных представлений комбинаторных множеств. Проведен их сравнительный анализ, очерчены области применения в оптимизации и продемонстрированы преимущества неизбыточных и строгих функциональных представлений евклидовых комбинаторных множеств. Оба подхода продемонстрированы на примере общего перестановочного множества $E_{\eta k}(G)$, в частности приведено его неизбыточное полиэдрально-сферическое представление и построено два строгих представления на основе анализа свойств симметричных полиномов на этом множестве.

3. Основным результатом работы является представление множества $E_{\eta k}(G)$ системой нелинейных уравнений и обоснование, тем самым, возможности его строгих представлений. Это открывает широкие возможности использования непрерывной, в т. ч. выпуклой, оптимизации к решению традиционно считающихся сложными задач на общем перестановочном множестве. Полученные строгие представления позволяют новые эквивалентные непрерывные переформулировки задач оптимизации на $E_{\eta k}(G)$, в которых решена проблема размерности. Также они порождают множество непрерывных релаксаций $E_{\eta k}(G)$, которые могут быть положены в основу новых релаксационных методов на этом множестве.

4. Представленная методология функционально-аналитического представления множеств может быть применена к другим евклидовым комбинаторным множествам. Это будет способствовать всестороннему развитию евклидовой комбинаторной оптимизации, поскольку позволит решать в комплексе основные ее задачи: исследование свойств евклидовых комбинаторных множеств и функций на них с последующим построением на их основе комбинаторных методов.

Литература

1. Стоян, Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К.: Наук. Думка, 1986. – 268 с.
2. Стоян, Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Текст] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. – 188 с.
3. Емеличев, В. А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) [Текст] / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 344 с.
4. Elte, E. L. The semiregular polytopes of the hyperspaces [Text] / E. L. Elte. – Groningen : Gebroeders Hoitsema, 1912. – 136 p.
5. Polytopes – combinatorics and computation [Text]: Proceedings of DMV Seminar, 29. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. – 225 p. doi: 10.1007/978-3-0348-8438-9
6. Brualdi, R. A. Combinatorial matrix classes [Text] / R. A. Brualdi. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 544 p.
7. Пичугина, О. С. Методы и алгоритмы решения некоторых задач оптимизации на множествах сочетаний и размещений [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О. С. Пичугина. – Х., 1996. – 169 с.
8. Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems [Text] / P. M. Pardalos (Ed.). – Springer, 2000. – 581 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3145-3
9. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность [Текст] / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц; пер. с англ. – НД.: Прентис-Холл; М.: Мир, 1984. – 512 с.
10. Hillier, F. S. Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems [Text] / F. S. Hillier, G. Appa, L. Pitsoulis, H. P. Williams, P. M. Pardalos, O. A. Prokopyev, S.Busygin. – Handbook on Modelling for Discrete Optimization, 2006. – P. 1–39.
11. Balinski, M. L. Polyhedral Combinatorics: Dedicated to the Memory of D. R. Fulkerson [Text] / M. L. Balinski, A. J. Hoffman. – New York: Elsevier Science Ltd, 1978. – 242 p.
12. Pulleyblank, W. R. Edmonds, matching and the birth of polyhedral combinatorics [Text] / W. R. Pulleyblank // Documenta Mathematica. – 2012. – Extra Volume ISMP. – P. 181–197.
13. Henk, M. Basic properties of convex polytopes [Text] / M. Henk, J. Richter-Gebert, G. M. Ziegler. – Handbook of Discrete and Computational Geometry. – FL, USA: CRC Press, Inc, 1997. – P. 243–270.
14. Postnikov, A. Permutohedra, Associahedra, and Beyond [Text] / A. Postnikov // IMRN: International Mathematics Research Notices. – 2009. – Vol. 6. – P. 1026–1106. doi: 10.1093/imrn/rnn153
15. Косолап, А. И. Методы глобальной оптимизации [Текст]: монография / А. И. Косолап. – Днепропетровск: Наука и образование, 2013. – 316 с.
16. Murray, W. An algorithm for nonlinear optimization problems with binary variables [Text] / W. Murray, K.-M. Ng // Computational Optimization and Applications. – 2008. – Vol. 47, Issue 2. – P. 257–288. doi: 10.1007/s10589-008-9218-1
17. Пичугина, О. С. Полиэдрально-сферический подход к решению некоторых классов комбинаторных задач [Текст]: пр. VI Міжн. школи-семінару / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев // Теорія прийняття рішень. – Ужгород: УжНУ, 2012. – С. 151–153.
18. Ємець, О. О. Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней [Текст] / О.О. Ємець, С. І. Недобачій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1998. – № 1. – С. 100–106.
19. Стоян, Ю. Г. Квадратичная оптимизация на комбинаторных множествах в Rn [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. В. Паршин // Кибернетика и системный анализ. – 1991. – № 4. – С. 97–104.
20. Яковлев, С. В. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів: монографія [Текст] / С. В. Яковлев, В. В. Грицик, А. І. Шевченко, О. М. Кісельова, С. В. Яковлев та ін. – Донецьк: Наука і освіта, 2012. – 480 с.
21. Ємець, О. О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації [Текст] / О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.