УДК 550.334

Два подхода в задаче лучевой сейсмической томографии

© *Т.А. Цветкова, 2015*

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 1 июля 2014 г.

Представлено членом редколлегии В.И. Старостенко

Наближення нелінійного геофізичного середовища до лінійного обґрунтовує перехід до геометричної сейсміки, в основі якої лежить геометрична оптика. Умови, необхідні і достатні для застосування геометричної оптики, приводять до можливості лінеаризації рівняння ейконалу і породжують два підходи в задачах сейсмічної томографії: класичну лінеаризацію Лаврентьєва—Романова і тейлорове наближення.

Ключові слова: геотомографія, нелінійність, геометрична сейсміка, лінеаризація Лаврентьєва—Романова, тейлорове наближення.

Введение. Изучение глубинного строения Земли тесно связано с задачами построения сейсмических изображений. В общем случае задача вычислительной томографии состоит в восстановлении структуры объекта по измеренным проекциям. С математической точки зрения это — задача интегральной геометрии, формулируемая следующим образом [Гельфанд и др., 1962].

Пусть $g(x)$ и $R(x, y)$ — достаточно гладкие функции, определенные в n-мерном и $(n+k)$-мерном пространствах, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$, $\{M(y)\}$ — некоторое семейство гладких многообразий. Известны интегралы

$$\int\limits_{M(x)} R(x, y)\, g(x)\, d\sigma = f(y)$$

и весовые функции R, $d\sigma$ — элемент меры на $M(x)$, $f(y)$ — измеренные проекции. Требуется найти $g(x)$.

Такой постановке задачи соответствуют задачи геотомографии, которые определяются как дистанционное зондирование недр Земли.

Физическая нелинейность задачи геотомографии. Основой представления о геосреде в настоящее время является аксиоматика, определяющая геофизическую среду как открытую, неравновесную, диссипативную, самоорганизующуюся, блочно-иерархическую [Садовский, 2004]. Следствием открытости, неравновесности, диссипативности геофизической среды является ее нелинейность, что подчеркивается в представлениях Андерсона, созвучных аксиоматике М.М. Садовского [Anderson, 2002] о том, что наша планета представляет собой нелинейную, неравновесную, самоорганизующуюся, диссипативную, открытую систему.

Фундаментальными свойствами геосреды, связанными со структурой и термодинамическими условиями, определяющими в совокупности развитие геодинамических процессов, являются физическая нелинейность и энергонасыщенность.

Основным требованием физической линейности является выполнение принципа суперпозиции.

Термин "нелинейный", согласно [Руденко, 2007], подчеркивается в тех случаях, когда:

— построена математическая модель физического явления, основанная на нелинейных уравнениях, при этом подчеркивается математический смысл;

— анализируются новые явления, основанные на нарушении принципа линейной суперпозиции или на взаимодействии физических объектов между собой. В этом случае подчеркивается физический смысл;

— идеи, методы, образы, сформировавшиеся в одном из разделов нелинейной физики, переносятся на другую область. Тут важен математический смысл, возможность использования аналогий;

— все реальные физические системы нелинейны, линейными их можно считать лишь приближенно — при малой интенсивности колебательных и волновых процессов.

Представления о нелинейной геофизической среде, согласно А. В. Николаеву [Николаев, 1997], могут быть сведены к следующим положениям.

1. Иерархическая неоднородная структура в широком диапазоне масштабов: от зерен минералов до глобальных неоднородностей.

2. Физическая нелинейность — развитие волновых и неволновых полей происходит, как правило, по нелинейным законам; нелинейные системы — колебательные (волновые) системы, процессы в которых не удовлетворяют принципу суперпозиции в отличие от линейных систем.

3. Горные породы не только поглощают, но и излучают энергию; активность проявляется в виде сейсмической, акустической, электромагнитной эмиссии, тепловых потоков и других процессов.

4. Временная изменчивость — характеристика, близкая по своей природе к нелинейности; взаимодействие полей чаще всего нелинейное.

Основные цели геофизической томографии (задачи), способствующие изучению глубинных (в том числе нелинейных) процессов Земли, могут быть сформулированы следующим образом:

- глобальная, региональная и локальная структуры физических параметров и термодинамических условий — скоростей сейсмических волн, плотности, электрического сопротивления, температуры и давления;
- детальная, тонкая структура скоростей сейсмических волн; глобальная, региональная и локальная пространственная структура статистических характеристик: характерные размеры неоднородностей и расстояния между ними, их зависимость от направления упорядоченности (квазианизотропия);
- контрастные включения — рассеиватели, структура трещинного пространства;
- интенсивность сейсмоакустической и электромагнитной эмиссии как показателя крипа, взаимного движения блоков горных пород, геохимических преобразований;
- нелинейность геофизических свойств горных пород, выраженная в нелинейной интерференции волн, взаимных влияний различных геофизических полей.

Общим для всех перечисленных положений является их нелинейный характер. Линейные законы, сколь многочисленны они бы не были, примеры их проявления — частный случай или приближение нелинейных.

В общем случае геотомография интегральна и может быть рассмотрена как задача построения многомерных изображений земных недр, геологических и других объектов, характеристик динамических процессов и физических условий. Сейсмические методы исследований соотносятся с нелинейными волновыми процессами, классическими примерами которых являются распространение волн в трещинных и флюидонасыщенных средах. Сейсмическая томография, исследующая приведенные выше характеристики в различных масштабах по глубине и латерали, для решения задач сейсморазведки, глубинного зондирования и изучения глубоких недр Земли (мантия Земли) использует геометрическую оптику, в основе которой лежит принцип суперпозиции, что определяет линейное приближение волнового процесса.

Задачей сейсмической томографии является определение распределения скорости распространения волн в Земле по временам пробега сейсмических волн, проходящих от источников к расположенным на поверхности пунктам наблюдения. В общем случае она может быть представлена как задача лучевой (трансмиссионной) либо дифракционной, а также эмиссионной томографии. Объектом данной работы является лучевая томография. Используемые для этих целей многомерные обратные линеаризированные задачи кинематической сейсмики активно развиваются как для изучения глубинных (геодинамических) процессов Земли, так и для запросов нефтегазовой отрасли. По сравнению с 90—2000-ми годами в настоящее время при решении задач сейсмической томографии наблюдается уменьшение применения метода лучевой сейсмической томографии. Это можно объяснить недостаточным развитием систем наблюдений, что приводит к отсутствию возможности повышения детальности результатов, а также более активным развитием методов дифракционной томографии, томографии, основанной на поверхностных волнах, сейсмическом шуме, томографии анизотропных сред. Современное состояние методов решения многомерной лучевой томографии детально рассмотрено в работах [Liu, Gu, 2012; Foulger et al., 2013]. В них приведена обширнейшая библиография. Не будем ее повторять и добавим не вошедшие в первый обзор статьи: С. А. Тихоцкого [Tikhotsky, Achauer, 2008; Тихоцкий и др., 2011], Т.Б. Яновской [Яновская, 2012], И.Ю. Кулакова [Kulakov et al., 2009; Яковлев и др., 2012]. В работах С.А. Тихоцкого предложен активно развивающийся метод адаптивной параметризации среды на основе вэйвлет-функций, что позволяет получать более точное приближение решения. В работе Т.Б. Яновской [Яновская, 2012] рассмотрен технологичный метод решения задачи, связанный с представлениями о гладкости искомой двумерной функции и априорного разбиения разреза среды по глубине и позволяющий работать с явными представлениями лучей. В работе И.Ю. Кулакова [Kulakov et al., 2009] учтена поправка за кору, соответствующая модели EUCRUST-07, более отвечающая реальному скоростному строению коры изучаемого региона (Средиземноморье, Центральная и Западная Европа). Во втором обзоре [Foulger et al., 2013] обсуждаются особенности представления результатов сейсмической томографии и возможных связей последних с глубинной геохимией и геодинамикой. Внимание обращается на достоверность представления результатов сейсмической томографии (телесейсмической томографии в частности), плюмов, анизотропных сред. Общим выводом является призыв авторов более осторожно относиться к интерпретации результатов томографии при переходе к геодинамическим и геохимическим исследованиям.

Геометрическая оптика как основа геометрической сейсмики. Изучение глубоких недр Земли (мантии) связывается с обратной кинематической задачей сейсмики, как известно, в общем случае нелинейной [Лаврентьев и др., 1980]. Задача построения сейсмических скоростных изображений среды состоит из двух этапов:

- решения обратных кинематических задач сейсмики с целью получения скоростной модели среды;
- решения прямых кинематических задач сейсмики, использующих результаты первого этапа и позволяющих получить изображение среды.

Каждая из задач сложна, имеет свои особенности и свои пути развития.

В сейсмике параметры, характеризующие распространение сейсмических волн, принято разделять на динамические и кинематические. Кинематические связаны с изучением фронтов, лучей, времен распространения волн. Динамические характеризуют форму волны (как преломленной, так и отраженной) во всем многообразии позиций ее рассмотрения. Соответственно базовые сейсмические методы, основанные на понятии фронтов волн и лучей, относятся к геометрической (кинематической) сейсмике, тесно связанной с положениями геометрической оптики. Как отмечалось, требование выполнения принципа суперпозиции определяет объект исследований геометрической сейсмики как линейное приближение нелинейного волнового процесса. Имеется общая аналогия между распространением упругих и световых волн, поэтому понятия луча и волнового фронта вводятся в обоих случаях в одинаковом смысле. Волновые фронты определяются как геометрическое место точек, достигаемых импульсом данного типа в данный момент времени, луч — нормаль к фронту волны.

Существуют различные обоснования геометрических законов распространения волн. Согласно С.В. Гольдину [Гольдин, 2005], геометрические представления в той мере справедливы, в какой они выводятся из уравнений распространения электромагнитных, упругих и акустических колебаний. Нас будут интересовать базовые представления геометрической оптики как основы геометрической сейсмики. Геометрическая оптика в узком, лучевом, смысле изучает только способы построения изображений среды с помощью лучей, тогда как геометрическая оптика в широком, волновом понимании есть метод приближенного описания волновых полей, в том числе и сейсмических.

В основе геометрической сейсмики лежат следующие необходимые и достаточные условия применимости геометрической оптики [Кравцов, Орлов, 1980 а, б]. Следствием выполнения принципа суперпозиции является возможность представления нестационарных колебаний через наложение (суперпозицию) гармонических колебаний. Базовым представлением геометрической оптики является монохроматическая волна. По определению, монохроматическая волна — строго гармоническая (синусоидальная) с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой.

Монохроматическая волна описывается уравнением Гельмгольца:

$$\Delta u + k_0^2 n^2(r)\, u(r) = 0\,, \qquad (1)$$

где $k_0 = \omega / c$ — волновое число, c — скорость света в вакууме, ω — частота (зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$), $n(r)$ — коэффициент преломления, характеризует свойства среды, в которой распространяется волна, Δ — оператор Лапласа, $u(r)$ — смещение среды.

Уравнение (1) можно получить из волнового уравнения:

$$\partial^2 v / \partial t^2 = k_0^2 n^2 \Delta v,$$

для его решения в виде установившегося синусоидального режима заданной частоты (монохроматической волны) $v = e^{i\omega t} u$. В электродинамике уравнение (1) описывает характерные особенности поведения электромагнитных волн в изотропной среде, кроме поляризации. Уравнение (1) также описывает распространение звуковых волн, если принять $k_0 = \omega / \bar{c}$ и $n(r) = \bar{c} / c(r)$, где $c(r)$ — локальное значение скорости звука, $\bar{c}$ — некоторое характерное значение скорости звука в рассматриваемой области пространства, которое использовано для нормировки.

Решение уравнения Гельмгольца (1) в простейшем случае для плоской волны, распространяющейся в направлении орта $\mathbf{l}$ в однородной среде с $n = \mathrm{const}$, имеет вид

$$u(r) = A e^{i\Psi(r)}, \quad \Psi(r) = k_0 n (\mathbf{rl}),$$

где A — постоянная амплитуда волны, $\Psi(r)$ — фаза, причем волновой вектор $\mathbf{k} = \nabla\Psi$ постоянен и направлен вдоль орта $\mathbf{l}$ ($K = k_0 n l$). Если свойства волны либо среды изменяются, то это изменение происходит достаточно медленно (плавно) в масштабе длины волны. Отсюда можно предположить, что поле волны также будет изменяться достаточно медленно с расстоянием, оставаясь локально почти плоским. Эта гипотеза лежит в основе метода геометрической оптики для монохроматических волн и переносится для плоских (почти плоских) волн. Отметим, что на достаточном удалении от источника первоначального возмущения волны можно рассматривать как плоские [Джеффрис, 1960].

Решение уравнения (1) для почти плоской волны имеет вид

$$u(r) = A(\mathbf{r})\, e^{i\Psi(r)}, \tag{2}$$

где амплитуда $A(\mathbf{r})$ и локальный волновой вектор $\mathbf{k} = \nabla\Psi(\mathbf{r})$ мало изменяются на длине волны в среде $\tilde{\lambda}(r) = 1/|k(\mathbf{r})|$:

$$\tilde{\lambda}\,|\nabla A| << |A|, \quad \tilde{\lambda}\,|\nabla k_j| << |k_j|. \tag{3.1}$$

Здесь k_j — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, и $\tilde{\lambda} = \lambda / 2\pi$. Аналогичные требования предъявляются и к коэффициенту преломления $n(r)$:

$$\tilde{\lambda}\,(\nabla n) << n. \tag{3.2}$$

В среде с коэффициентом преломления n длина волны λ в n раз меньше, чем в свободном пространстве, т. е. $\lambda = \lambda_0 / n$, а условия (3.1) и (3.2) переходят в неравенства

$$\tilde{\lambda}_0 / n << |A| / |\nabla A| \equiv L_1, \; \tilde{\lambda}_0 / n << |k_j| / |\nabla k_j| \equiv L_2,$$

$$\tilde{\lambda}_0 / n << n / |\nabla n| \equiv L_3, \tag{3.3}$$

где $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 / 2\pi = \chi / \omega$. Эти условия, означающие малость изменения величин $A(r)$, $k(r)$, $n(r)$ в пределах области с размерами порядка $\tilde{\lambda}$, можно записать в виде одного неравенства:

$$\mu = 1 / k\mathbf{L} = 1 / k_0 n\mathbf{L} = \tilde{\lambda} / \mathbf{L} << 1, \tag{4}$$

где μ — малый параметр в методе геометрической оптики, а L — наименьший из характерных масштабов изменения A, $\mathbf{k}$ и n, т. е. $\mathbf{L} = \min(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3)$. Характерный масштаб $\mathbf{L}$ определяется как расстояние, на котором приращение некоторой величины сравнимо с самой величиной, т. е.

$$|n(\mathbf{r} + \mathbf{L}) - n(\mathbf{r})| \sim n(\mathbf{r}).$$

Заменяя приращение $|n(\mathbf{r}+\mathbf{L}) - n(\mathbf{r})|$ линейным по L членом разложения $n(\mathbf{r}+\mathbf{L})$ в ряд Тейлора, имеем $\mathbf{L}\nabla n \sim n$, откуда получаем $\mathbf{L} \sim n / |\nabla n|$, совпадающую с $\mathbf{L}_3$ в (3.3).

Основные уравнения геометрической оптики могут быть выведены различными способами. Введенный безразмерный малый параметр $\mu \sim 1 / k_0 L$ позволил С. М. Рытову [Рытов, 1940, 1938] провести разложение по нему амплитуды A:

$$(\nabla\Psi)^2 = n^2, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} 2(\nabla A_0 \nabla\Psi) + A_0 \nabla\Psi = 0, \\ \ldots \\ 2(\nabla A_1 \nabla\Psi) + A_1 \nabla\Psi = -L\nabla A_0, \\ \ldots \\ 2(\nabla A_m \nabla\Psi) + A_m \nabla\Psi = -L\nabla A_{m-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Функцию Ψ принято называть эйконалом, а уравнение (5) — уравнением эйконала. Эйконал Ψ имеет размерность длины и называется оптическим путем волны. Уравнения для амплитудных коэффициентов (6) называются уравнениями переноса приближений. При этом искомые амплитуды A_m и эйконал волны ψ будут иметь вид

$$\psi = \psi^0 + \int_0^\tau n^2\, d\tau = \psi^0 + \int_0^\sigma n\, dy, \tag{7.1}$$

$$A_m = A_m^0 / \sqrt{J} - 1/2D(\tau) \int_0^\tau D(\tau')\, \nabla A_{m-1}\, d\tau', \tag{7.2}$$

где $\psi^0=\psi(0)$, $A_m^0=A_m(0)$ — начальные значения эйконала и амплитуд при $\tau=0$. Интегрирование в (7.1) и (7.2) проводится вдоль лучей, определяемых системой уравнений

$$dr\,/\,d\tau = p, \quad dp\,/\,d\tau = 1\,/\,2\nabla n^2, \qquad (7.3)$$

где $d=\nabla\psi$, τ — параметр на луче, связанный с длиной луча соотношением $d\tau=d\sigma/n$. Величина J (расхождение луча) равна $D(0)/D(\tau)$, где $D(\tau)=\partial(x, y, z)/\partial(\varsigma, \eta, \tau)$ — якобиан перехода от декартовых координат x, y, z к лучевым координатам ς, η, τ. Подходы геометрической оптики существенно опираются на лучи, которые играют роль каркаса, несущего волновое поле.

Использование безразмерного параметра μ имеет определенные преимущества. Малость μ, необходимая для применимости лучевого метода, может быть достигнута не только за счет увеличения k (уменьшения длины волны), но и за счет увеличения $L\,(\mu=1/kL)$, что дает более плавное изменение свойств среды.

Неравенство (4), где μ — малый параметр в методе геометрической оптики, при выполнении которого волну можно считать почти плоской, а среду — почти одномерной, является необходимым, но не достаточным условием применимости метода геометрической оптики. При этом под геометрооптическим приближением поля понимается только поле нулевого приближения $u_0(r)$.

Достаточные условия должны учитывать накапливающиеся погрешности, обусловленные тем, что поле нулевого приближения $u_0(r)$ не является точным решением уравнения эйконала $u_0(r)=A_0\,e^{ik_0\psi}$ [Гольдин, 2005]. Действительно, если $\breve{\mathbf{u}}=u-u_0$, то оно удовлетворяет уравнению

$$\Delta\,\breve{\mathbf{u}} + k_0^2\,n^2\,\breve{\mathbf{u}} = -\,\mathbf{e}^{ik_0\psi}\,\Delta A_0.$$

Достаточные условия применимости геометрической оптики связаны с представлениями о френелевском объеме. Исходя из того, что френелевский объем определяет область, которая формирует поле в заданной точке, т. е. является областью локализации луча, формулируются два условия применимости геометрической оптики в случае плоской либо почти плоской волны.

1. Параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы), не должны заметно изменяться в поперечном сечении френелевского объема.

2. Френелевские объемы лучей, приходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться друг с другом.

Следует делать различие между математическим лучом (бесконечно тонкая линия, удовлетворяющая уравнению луча) и физическим лучом, который имеет конечную толщину, определяемую френелевым объемом. В случае плоской волны, распространяющейся в однородной среде ($n=\text{const}$), выражение для радиуса первой зоны Френеля определяется как

$$a_f=\sqrt{\lambda_0}\;r/n,$$

где r — расстояние между источником и приемником.

Исходя из тесной связи геометрических сейсмики и оптики, приведенных общих положений геометрической оптики, прежде всего требования выполнения принципа суперпозиции, можно сделать вывод о том, что решение как обратных многомерных кинематических задач сейсмики, так и прямых должно соотноситься с требованием выполнения, приведенных выше, необходимых и достаточных условий применимости метода геометрической оптики.

Необходимые условия: если свойства волны либо среды изменяются, то это изменение происходит достаточно медленно (плавно) в масштабе длины волны. Отсюда можно предположить, что поле волны также будет изменяться достаточно медленно с расстоянием, оставаясь локально почти плоским.

Достаточные условия: 1) параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно изменяться в поперечном сечении френелевского объема; 2) френелевские объемы лучей, приходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться друг с другом.

Связь с задачами лучевой сейсмической томографии. Лучевая томография основывается на волнах, длины которых меньше, чем размеры исследуемых неоднородностей, что позволяет использовать лучевой метод. Роль принципа медленности в геометрической сейсмике определяется сформулированным С. В. Гольдиным [Гольдин, 2005] соответствующим принципом локальности геометрической сейсмики: v (скорость распространения фронта волны) в любой совокупности экспериментов зависит только от свойств среды в малой окрестности точки x и не от чего больше. Еще раз подчеркнем, что точно указанные свойства выполняются лишь в случае плоской волны. Как указывалось, на достаточном удалении от источника первоначального возмущения волны можно рассматривать как плоские. Обращают на себя внимание вопросы, связанные с устойчивостью геометрооптических решений (лучей) при малых возмущениях параметров среды, границ раздела и (или) начальных условий задачи. Как показано в работе [Кравцов, Орлов, 1980 б], проблема устойчивости геометрооптических решений состоит в том, что при слабых мелкомасштабных возмущениях могут нарушаться условия применимости геометрической оптики.

Как уже упоминалось, уравнение эйконала может быть получено различным образом, учитывая особенности конкретных сред. В основе лучевого метода лежат необходимые и достаточные условия геометрической оптики, связанные с требованием медленности изменения основных параметров волны: амплитуды, волнового числа и коэффициента преломления в масштабе длины волны. Выполнение принципа медленности позволяет провести линеаризацию уравнения эйконала. Возможны два подхода.

Первый — линеаризация относительно некоторой референтной модели, что и лежит в основе классического метода сейсмической томографии (обратной многомерной линеаризированной задачи сейсмики), предложенного М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым [Лаврентьев, Романов, 1966].

Второй подход определяется линеаризацией уравнения эйконала, связанной с разложением медленности в ряд Тейлора в окрестности данной точки [Гейко, 1997; Geyko, 2004].

В общем случае [Лаврентьев и др., 1980] строгая постановка обратной многомерной кинематической задачи сейсмики в изотропной среде сводится к решению нелинейного операторного уравнения первого рода:

$$F(n) = t, \tag{8.1}$$

где F — вполне непрерывный оператор, $n \in N$, $t \in T$, а N и T — полные метрические пространства и пространство N такие, что никакой шар в нем не является компактом. С точки зрения математической физики задача состоит в решении интегрального уравнения первого рода:

$$F(n) = \int_{\gamma(x^0,\, x^1)} n(x)\,|dx| = t(x^0, x^1) \tag{8.2}$$

относительно римановой метрики $n(x)\,|dx|$ в замкнутой области D эвклидового пространства R^m, $m \geq 2$, переменной $x\,(x_1 \dots x_n)$ с гладкой границей S через ее расстояния $T(x^0, x^1)$, x^0, $x^1 \in S$, вдоль геодезических $\gamma\,(x_1 \dots x_m)$, соединяющих точки поверхности S.

В 1977 г. Р.Г. Мухаметов [Мухаметов, 1977] показал, что в двумерном случае корректность по Адамару для данной задачи возможна в предположении полноты и регулярности семейства лучей. Регулярность лучей и полнота понимается следующим образом [Гольдин, 1997]. Пусть задана исследуемая область D и система лучей Q. Под регулярностью понимается следующее: любая пара точек области D соединяется одним и только одним лучом, являющимся частью луча из Q. Система Q полна относительно кривой λ, если любые две точки этой кривой соединены лучом либо принадлежащим Q, либо являющимся частью луча из Q. Если кривая λ ограничивает изучаемую область D и система лучей на D регулярна, то Q полна на D, т. е. через каждую точку области D и в каждом направлении проходит луч, принадлежащий Q.

Пусть
$$n(x) = n_0(z) + n_1(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = x_3$ — глубина, $n_0(z)$ — одномерная реферативная медленность и $n_1(x)$ — ее малое возмущение. Если выполняется условие

$$\| n_1(x) \|_{C^2(D)} << \| n_0(z) \|_{C^2(D)},$$

то имеет место приближенное равенство

$$t(x^0, x^1) = t_0(x^0, x^1) + t_1(x^0, x^1) + O(n_1^2),$$

где время пробега в референтной модели

$$t_0(x^0, x^1) = \int_{\gamma^0(x^0,\, x^1)} n_0(x)\,|dx|$$

и его возмущение на геодезической $\gamma_0(x^0, x^1)$ референтной модели

$$t_1(x^0, x^1) = \int_{\gamma^0(x^0,\, x^1)} n_1(x)\,|dx|$$

В сейсмологии, начиная с [Aki et al., 1977], чаще используется линеаризация уравнения

$$\Phi(v) \equiv \int_{\gamma(x^0,\, x^1)} \frac{|dx|}{v(x)} = t\left(x^0, x^1\right),$$

которое связывает времена пробега со скоростью. Пусть

$$\nu(x) = \nu_0(z) + \nu_1(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = x_3$ — глубина, $\nu_0(z)$ — одномерная референтная скорость, $\nu_1(x)$ — ее малое возмущение. Неравенство

$$\| \nu_1(x) \|_{C^2(D)} << \| \nu_0(z) \|_{C^2(D)}$$

приводит к приближенному равенству

$$t(x^0, x^1) = t_0(x^0, x^1) + \\ + t_1(x^0, x^1) + O((\nu_1 / \nu_0^2)^2),$$

где время пробега в референтной модели

$$t_0\,(x^0, x^1) = \int \nu_0\,(x)\,|dx|, \quad \gamma_0\,(x_0\,, x_1)$$

и его возмущение на геодезической $\gamma_0\,(x^0, x^1)$ референтной модели

$$t_1\,(x^0, x^1) = \int (\nu_1\,(x)\,/\,\nu_0^2)\,|dx|, \quad \gamma_0\,(x_0\,, x_1)\,.$$

Принцип медленности точно выполняется в случае плоской либо почти плоской волны, которая распространяется в однородной либо почти однородной среде. Последнее позволяет при решении задачи сейсмической томографии в качестве одного из подходов использовать кусочно-постоянные функции скорости как параметры среды.

Выполнение принципа медленности

$$|n\,(\mathbf{r}+\mathbf{L}) - n\,(\mathbf{r})| \sim n\,(\mathbf{r})\,,$$

где L определено как расстояние, на котором приращение некоторой величины сравнимо с самой величиной, дает оценку для L:

$$L \sim n\,/\,|\nabla n|\,,$$

что и определяет область устойчивой линеаризации для уравнения эйконала.

Классический подход нашел широкое распространение при изучении глубинного строения коры и мантии Земли. Начиная с 90-х годов минувшего столетия, различными авторами представляются обзоры по этой теме. К ним относятся сборники статей [Сейсмическая …, 1990; Проблемы ..., 1997], работы [Гольдин, 1997; Liu, Gu, 2012; Foulger et al., 2013]. Основные акценты делаются на следующих вопросах:

1) проблема не единственности решения;
2) параметризация среды;
3) численные методы решения переопределенных систем высокого порядка и их корректность;
4) зависимость от референтной модели.

В рамках классического подхода, который разрабатывал С. В. Гольдин [Goldin, 2011], делается акцент на проблеме неполноты данных. Определение полноты и регулярности приведено выше. Используемое С.В. Гольдиным понятие квазиполноты семейства лучей связывается с представлением об освещенности линии: линия λ касательно освещена, если каждой ее точки касается луч из системы Q. Последняя считается квазиполной относительно некоторого семейства линий, если каждая линия этого семейства освещена.

Доказана следующая теорема [Гольдин, 1997].

Теорема. *Пусть в референтной модели скорость зависит только от z и носитель исследуемой неоднородности принадлежит области D. Предполагается, что $\min\{z : z \in D\} \equiv z_0 > -\infty$, область D может быть неограниченной, если: 1) найдется такое значение z_1, что при $z \le z_1$ заданное семейство рефрагированных (проходящих) лучей может быть расширено до инвариантно квазиполных относительно семейства горизонтальных линий $z = const$ $(z_0 \le z \le z_1)$; 2) функция u в D_0 принадлежит $L_2(D_0)$; 3) функция $v\,(z)$ на интервале $(z_0,\, z_1)$ кусочно-дифференцируема (разрывы могут совпадать только с изолиниями $z = const$) и монотонно возрастает; 4) семейство лучей в референтной модели регулярно (в обычном смысле). Тогда линеаризированная обратная задача имеет в D_0 единственное решение.*

Следствием сформулированной теоремы является следующее утверждение для трехмерного случая:

Если референтная скорость вертикально неоднородна, то в линеаризированной задаче луч является плоским и среду можно восстановить по совокупности плоских сечений. Достаточная система наблюдений определяется координатами $(x - l/2,\, y;\, x + l/2,\, y)$, где первые два числа — координаты источника, вторые два числа — координаты приемника, все три независимые величины изменяются так, чтобы обеспечить квазиполноту в требуемом интервале глубин.

Как уже отмечалось, второй подход определяется линеаризацией уравнения эйконала, связанной с разложением медленности в ряд Тейлора в окрестности данной точки [Гейко, 1997, Geyko, 2004]. Тейлорово приближение нелинейности волнового уравнения и уравнения эйконала заключается в следующем [Geyko, 2004].

Пусть в эвклидовом пространстве R^3 переменных $\mathbf{x},\ z$, $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)$, где ось глубин z направлена вниз, задана область $D = \{(\mathbf{x},\, z) : |\,\mathbf{x}\,| < \infty,\ 0 \le\ z < \infty\}$ с поверхностью $S : z = 0$. Условимся, что область D заполнена средой, в которой $n\,(\mathbf{x},\ z)$ — медленность распространения P- или S-волны. Предположим, что функция n: а) положительна; б) ограничена; в) принадлежит пространству $C^2\,(D)$; г) монотонно убывает как функция переменной z; д) такая, что

$$\|\,n\,\|_{C^2\,(0,\,\infty)} >> \|\,n\,\|_{C^2\,(-\infty,\,\infty)\times C^2\,(-\infty,\,\infty)}\,, \quad (9)$$

де $\|\,n\,\|$ — норма n как функции z слева и как функции $\mathbf{x}$ — справа.

Пусть преломленная P- или S-волна распространяется из источника $\mathbf{x}^0 \in\ S$ в точку $\mathbf{x}^1 \in\ S$ (или наоборот) с медленностью n вдоль геодезической $\gamma(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$. Обозначим через $t(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$ время передачи сигнала и через $U(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \tau)$ — его сейсмограмму. Введем новые переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ X и φ:

$$\xi_1 = \frac{x_1^0 + x_1^1}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2^0 + x_2^1}{2},$$

$$X = \sqrt{\left(x_1^1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2^1 - x_2^0\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan} \frac{x_2^1 - x_2^0}{x_1^1 - x_1^0}.$$

Функции $U(\xi, X, \varphi, \tau)$ и $t(\xi, X, \varphi)$ инвариантны относительно взаимного положения источника и приемника сигнала.

Предположим, что функции U и t по переменной ξ принадлежат пространству $C^2(S)$, непрерывны и однозначны по переменной X при каждом $\varphi \in [0, \pi)$ и что функция U по переменной времени τ принадлежит пространству $C^2[0, \infty)$.

Условимся, что на поверхности S волновое возмущение $U(\xi, X, \varphi, \tau)$, порождаемое преломленной волной, и время $t(\xi, X, \varphi)$ продвижения его фронта (временное поле), с одной стороны, и медленность $n(\mathbf{x}, z)$, с другой, связаны уравнениями типа волнового уравнения и уравнения эйконала соответственно, а именно:

$$\Delta\vec{U}(\xi, X, \tau) = \vec{n}^2(\mathbf{x}, z)\frac{\partial^2\vec{U}(\xi, X, \tau)}{\partial\tau^2}, \quad (10)$$

$$\left|\nabla\vec{t}(\xi, X)\right|^2 = \vec{n}^2(\mathbf{x}, z), \quad (11)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$ — операторы Лапласа и Гамильтона соответственно, а через $U_\varphi(\xi, X, \tau) = \vec{U}(\xi, X, \tau)$, $t_\varphi(\xi, X) = \vec{t}(\xi, X)$, $\vec{n}^2(\mathbf{x}, z)$ обозначены соответствующие функции $U(\xi, X, \varphi, \tau)$, $t(\xi, X, \varphi)$, $n^2(\mathbf{x}, z)$ при каждом фиксированном азимуте φ, $\varphi \in [0, \pi)$.

Приблизим функции $\vec{n}^2(\mathbf{x}, z)$ и $\vec{U}(\xi, X, \tau)$, $\vec{t}(\xi, X)$ по переменным x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 соответственно рядами Тейлора в окрестности точки $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in S$, ограничившись только членами нулевого порядка. Имеют место формулы Тейлора:

$$\vec{n}^2(\mathbf{x}, z) = \vec{n}_\zeta^2(z) + R_1\left(\vec{n}^2\right),$$

$$\vec{U}(\xi, X, \tau) = \vec{U}_\zeta(X, \tau) + R_2\left(\vec{U}\right),$$

$$\vec{t}(\xi, X) = \vec{t}_\zeta(X) + R_3\left(\vec{t}\right),$$

в которых

$$R_1\left(\vec{n}^2\right) = (x_1 - \zeta_1)\left.\frac{\partial\vec{n}^2}{\partial x_1}\right|_{\zeta_1 + (x_1 - \zeta_1)\theta_1} + (x_2 - \zeta_2)\left.\frac{\partial\vec{n}^2}{\partial x_2}\right|_{\zeta_2 + (x_2 - \zeta_2)\theta_2},$$

$$R_2\left(\vec{U}\right) = (\xi_1 - \zeta_1)\left.\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi_1}\right|_{\zeta_1 + (\xi_1 - \zeta_1)\theta_3} + (\xi_2 - \zeta_2)\left.\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi_2}\right|_{\zeta_2 + (\xi_2 - \zeta_2)\theta_4},$$

$$R_3\left(\vec{t}\right) = (\xi_1 - \zeta_1)\left.\frac{\partial\vec{t}}{\partial\xi_1}\right|_{\zeta_1 + (\xi_1 - \zeta_1)\theta_5} + (\xi_2 - \zeta_2)\left.\frac{\partial\vec{t}}{\partial\xi_2}\right|_{\zeta_2 + (\xi_2 - \zeta_2)\theta_6}$$

суть остаточные члены в разложениях соответствующих функций и $\theta_1, \ldots, \theta_6 \in (0, 1)$. Очевидно, эти разложения верны, если справедливы асимптотические оценки

$$R_1\left(\vec{n}^2\right) = o\left(|\mathbf{x} - \zeta|\right), \quad \mathbf{x} \to \zeta, \quad (12)$$

$$R_2\left(\vec{U}\right) = o\left(|\xi - \zeta|\right), \quad \xi \to \zeta, \quad (13)$$

$$R_3\left(\vec{t}\right) = o\left(|\xi - \zeta|\right), \quad \xi \to \zeta. \quad (14)$$

Подставив формулы Тейлора функций $\vec{n}^2$, $\vec{U}$ и $\vec{t}$ в введенные волновое уравнение (10) и уравнение эйконала (11), получим

$$\frac{\partial^2\vec{U}_\zeta(X, \tau)}{\partial z^2} = \vec{n}_\zeta^2(z)\frac{\partial^2\vec{U}_\zeta(X, \tau)}{\partial\tau^2} + \Phi\left(\vec{n}, \vec{U}\right), \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{t}_\zeta(X)}{\partial z}\right)^2 = \vec{n}_\zeta^2(z) + F(\vec{n},\vec{t}), \qquad (16)$$

где

$$\Phi(\vec{n},\vec{U}) = R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\xi_1^2} -$$

$$-\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\xi_2^2} - \frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial z^2} +$$

$$+R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 \vec{U}_\zeta(X,\tau)}{\partial\tau^2} + \vec{n}_\zeta^2(z)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2} =$$

$$= R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2} - \boldsymbol{\Delta} R_2(\vec{U}) +$$

$$+R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 \vec{U}_\zeta(X,\tau)}{\partial\tau^2} + \vec{n}_\zeta^2(z)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2},$$

$$F(\vec{n},\vec{t}) = R_1(\vec{n}^2) - \left(\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial\xi_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial\xi_2}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial \vec{t}_\zeta(X)}{\partial z}\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial z} = R_1(\vec{n}^2) -$$

$$-\left|\nabla R_3(\vec{t})\right|^2 - 2\frac{\partial \vec{t}_\zeta(X)}{\partial z}\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial z}.$$

Если предположить, что остаточные члены разложений функций $\vec{U}$, $\vec{n}^2$ и $\vec{t}$, $\vec{n}^2$, как сами функции, удовлетворяют введенным уравнениям (9) и (10) соответственно, т. е.

$$\boldsymbol{\Delta} R_2(\vec{U}) = R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2}, \qquad (17)$$

$$R_1(\vec{n}^2) = \left|\nabla R_3(\vec{t})\right|^2, \qquad (18)$$

то выражения Φ и F редуцируются к виду

$$\Phi(\vec{n},\vec{U}) = R_1(\vec{n}^2)\frac{\partial^2 \vec{U}_\zeta(X,\tau)}{\partial\tau^2} +$$

$$+\vec{n}_\zeta^2(z)\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2},$$

$$F(\vec{n},\vec{t}) = -2\frac{\partial \vec{t}_\zeta(X)}{\partial z}\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial z}.$$

Теорема. *Если справедливы предположение (9), уравнения (17) и (18), формулы (14)—(17) и следующие асимптотические оценки:*

$$\frac{\partial^2 R_2(\vec{U})}{\partial\tau^2} = o\left(\vec{n}_\zeta^{-2}(z)\right), \quad \xi\to\zeta,$$

$$\frac{\partial R_3(\vec{t})}{\partial z} = o\left(\left(\frac{\partial \vec{t}_\zeta(X)}{\partial z}\right)^{-1}\right), \quad \xi\to\zeta,$$

то в окрестности точки $\boldsymbol{\zeta}\in S$ справедливы следующие тейлоровы приближения нулевого порядка введенных волнового уравнения (10) и уравнения эйконала (11):

$$\frac{\partial^2 \vec{U}_\zeta(X,\tau)}{\partial z^2} = \vec{n}_\zeta^2(z)\frac{\partial^2 \vec{U}_\zeta(X,\tau)}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{d\vec{t}_\zeta(X)}{dz} = \vec{n}_\zeta(z).$$

Как показано в работе [Geyko, 2004], метод

1) дает ощутимый выигрыш в точности приближения нелинейности;

2) справедлив при более слабых ограничениях на скорость;

3) не требует задания референтной скорости как начального приближения;

4) является корректной задачей по Тихонову;

5) значительно сокращает размерность задачи численного обращения;

6) в равной мере справедлив как для рассмотренного решения в прямоугольной декартовой системе координат, так и в полярной системе, благодаря известному конформному отображению шара на полупространство [Gerver, Markushevich, 1966].

Указанный метод может быть применен в случае обращения 3D сейсмологических как 3D, так и 2D данных ГСЗ о временах пробега преломленных волн и для интерпретации отражений от субгоризонтальных границ раздела.

Сопоставление метода тейлорового приближения и приведенных результатов С. В. Гольдина приводит к алгоритму, предполагающему построение обобщенного поля времен, совокупности годографов-сечений обобщенного поля времен (совокупности плоских сечений) с последующим обращением полученных годографов преломленной волны. При этом понятно, что область применимости метода, как и в случае классического подхода, определяется длинами использованных волн и френелевскими объемами лучей.

Решение задач лучевой сейсмической томографии, кроме общей оценки применимости метода, требует и оценки погрешности исходных данных. Вопрос этот крайне неоднозначен. Основной погрешностью применяемых методов является приближенное выполнение необходимых и достаточных условий геометрической оптики. Прежде всего, это замена возможных нелинейных волновых процессов линейными, точная применимость метода только для однородных либо почти однородных сред, плоских или почти плоских волн. Напомним, что волновой процесс определяется как линейный, если для него выполняется принцип суперпозиции, который является базовым в геометрической оптике.

Второй причиной возникновения погрешностей являются погрешности, возникающие при обработке сейсмических записей на станциях. Как известно, в первые вступления приходит самая быстрая волна, ее идентификация связывается с принятыми для обработки референтными моделями сферически симметричной Земли (для системы ISC — стандартные модели AK-135 и Джеффриса—Буллена), которые могут быть различными на каждой из станций наблюдения. Наблюденные времена пробега содержат случайные ошибки наблюдения, связанные с фактическими наблюдениями, систематические ошибки, связанные с определениями координат гипоцентров и отклонениями, связанными с отклонениями от модели сферически симметричной Земли. Для оценки погрешностей входных данных желательно иметь минимальные длины волн для каждой из использованных записей. Последние оценки, как правило, не проводятся.

Существенным моментом при учете погрешностей является известный факт, что погрешности времен прихода волн не соответствуют нормальному гауссовскому распределению [Буллен, 1966; Сейсмическая ..., 1990]. Отметим, что истинная погрешность для каждого времени прихода есть сумма всех погрешностей, которые приобретает луч, проходя через различные слои Земли. Исходя из центральной предельной теоремы статистики, следует, что если погрешность есть сумма нескольких погрешностей, то вне зависимости от распределения вероятностей погрешностей их сумма при увеличении числа отдельных составляющих приближается к гауссовскому распределению. Отсюда можно предположить, что истинные погрешности определения времени распределены нормально. Нормальное распределение погрешностей позволяет при решении задач сейсмической томографии искать решения в пространстве L^2 и не только.

К вопросу анализа исходных данных относятся и проблемы, связанные с системами наблюдений в целом. Решения задач томографии требуют как можно более полной для исследуемого региона системы наблюдений, использование результатов наблюдений, полученных в разное время для различных регионов. Корректные решения таких задач требуют идентичной аппаратуры, единства методов измерений, обработки и интерпретации данных, что соответствовало бы решению части проблем, связанных с погрешностью исходных данных.

Вопросы, связанные с погрешностью исходных данных, неоднократно обсуждались различными авторами. Нельзя не согласиться с Т. Б. Яновской и не только с ней, что в настоящее время реальную оценку погрешностей провести крайне затруднительно [Яновская, 1997].

Выводы. Подводя итог, отметим, что лучевая томография основывается на положениях геометрической сейсмики, использующей основные положения геометрической оптики, на волнах, длины которых меньше, чем размеры исследуемых крупных неоднородностей, что позволяет использовать лучевой метод. Алгоритмы решения задач лучевой сейсмической томографии должны учитывать не только достаточные, но и необходимые условия применимости метода геометрической сейсмики (оптики). В то же время применение многомерной лучевой сейсмической томографии осложняется явлениями поглощения, рассеяния и нелинейными искажениями. Тем не менее до настоящего времени лучевая сейсмическая томография остается одним из немногих методов, позволяющих изучать глубины на уровне мантии Земли и, несомненно, нуждается в дальнейшем развитии.

Список литературы

Буллен Л.Е. Введение в теоретическую сейсмологию. Москва: Мир, 1966. 460 с.

Гейко В.С. Тейлорово приближение волнового уравнения и уравнения эйконала в обратных сейсмических задачах. *Геофиз. журн.* 1997. Т. 19. № 3. С. 48—68.

Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер. Обобщенные функции. Москва: Физматгиз, 1962. Вып. 5. 656 с.

Гольдин С.В. Введение в геометрическую сейсмику. Новосибирск: Изд. Новосибирск. гос. ун-та, 2005. 265 с.

Гольдин С.В. Обратные задачи лучевой сейсмической томографии. *Геология и геофизика*. 1997. Т. 38. № 5. С. 981—998.

Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.

Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. Москва: Наука, 1980 а. 305 с.

Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Границы применимости метода геометрической оптики и смежные вопросы. *Успехи физ. наук*. 1980 б. Т. 133. Вып. 3. С. 475—496.

Лаврентьев М.М., Романов В.Г. О трех линеаризированных обратных задачах для гиперболических уравнений. *Докл. АН СССР*. 1966. Т. 171. С. 1279—1281.

Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некоторые проблемы математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 286 с.

Мухаметов Р.Г. Задача обращения двумерной римановой метрики интегральная геометрия. *Докл. АН СССР*. 1977. Т. 232. С. 32—45.

Николаев А.В. Проблемы геотомографии. В сб.: *Проблемы геотомографии*. Москва: Наука, 1997. С. 4—38.

Проблемы геотомографии. Под ред. А.В. Николаева. Москва: Наука, 1997. 336 с.

Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения. *Успехи физ. наук*. 2007. Т. 177. № 4. С. 374—383.

Рытов С.М. Модулированные колебания и волны. *Труды ФИАН*. 1940. Т. 2. № 1. С. 3.

Рытов С.М. О переходе от волновой к геометрической оптике. *Докл. АН СССР*. 1938. Т. 18. № 2. С. 263—266.

Садовский М.А. Избранные труды. Геофизика и физика взрыва. Москва: Наука, 2004. 440 с.

Сейсмическая томография. Под ред. Г. Нолетта. Москва: Мир, 1990. 416 с.

Тихоцкий С.А., Фокин И.В, Шур Д.Ю. Активная лучевая сейсмическая томография с использованием адаптивной параметризации системой вэйвлет-функций. *Физика Земли*. 2011. № 4. С. 67—86.

Яковлев А.Б, Бушмина Н.А., Кулаков И.Ю., Добрецов Н.Л. Структура верхней мантии Арктического региона по данным региональной сейсмотомографии. *Геология и геофизика*. 2012. № 10. С. 1261—1272.

Яновская Т.Б. Методика трехмерной лучевой томографии, основанной на предположении о гладкости латеральных вариаций скорости. *Физика Земли*. 2012. № 5. С. 3—15.

Яновская Т.Б. Проблемы сейсмической томографии. В сб.: *Проблемы геотомографии*. Москва: Наука, 1997. С. 86—98.

Aki K., Christofersson A., Husebye E.S., 1977. Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere. *J. Geophys. Res.* 82, 277—296.

Anderson D.L., 2002. Plate tectonics as far-from-equilibrium self-organized system. Plate boundary zones. Geodynamic series. Mon. 30. *Amer. Geophys. Union*. 411—425.

Geyko V.S., 2004. A general theory of the seismic travel-time tomography. *Geofizicheskiy zhurnal* 26 (2), 3—32.

Gerver M., Markushevich V., 1966. Determination of a seismic wave velocity from the travel-time curve. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 11, 165—173.

Goldin S.V., 2011. Ray reflection tomography: review and comments. В кн.: *Теория интерпретации в сейсморазведке и в сейсмологии*. Новосибирск: ИНГГ СО РАН. С. 247—265.

Foulger G.R., Panza G.F, Artemieva I.M, Bastow I.D., Cammarano F., Evans R., Hamilton W.B, Julian B.R., *Lustrino M., Thybo H., Yanovskaya T.B.*, 2013. Caveats on tomographic images. *Terra Nova* 25 (4), 259—281.

Kulakov I., Kaban M.K., Tesouro M., Cloetingh S., 2009. *P*- and *S*-velocity anomalies in the upper mantle beneath Europe from tomographic inversion of the ISC-data. *Geophys. J. Int.* 179, 345—366.

Liu Q., Gu Y.J., 2012. Seismic imaging: From classical to adjoint tomography. *Tectonophysics* 566-567, 31—66.

Tikhotsky S., Achauer U., 2008. Inversion of controlled-source seismic tomography and gravity data with the self-adaptive wavelet parameterization of velocities and interface. *Geophys. J. Int.* 172, 619—630.

Two approaches to the problem of ray seismic tomography

© *T. A. Tsvetkova, 2015*

Approximation of nonlinear geophysical medium as a linear one substantiates a transition to geometrical seismics based on geometric optics. Conditions, necessary and sufficient for application of geometrical optics bring possibility of linearization the eikonal equation and produce two approaches in the problems of seismic tomography: a classical Lavrentyev—Romanov linearization and the Taylor approximation.

Key words: geotomography, nonlinearity, geometrical seismics, Lavrentyev—Romanov linearization, the Taylor approximation.

References

Bullen L. E., 1966. Introduction to theoretical seismology. Moscow: Mir, 460 p. (in Russian).

Geyko V.S., 1997. Teylor's approximation of the wave equation and the eikonal equation in inverse seismic problems. *Geofizicheskiy zhurnal* 19 (3), 48—68 (in Russian).

Gel'fand I.M., Graev M.I., Vilenkin N.Ya., 1962. Integral geometry and representation theory. Ser. of generalized functions. Moscow: Fizmatgiz, is. 5. 656 p. (in Russian).

Goldin S. V., 2005. Introduction to geometric seismic. Novosibirsk: NSU Publ., 265 p. (in Russian).

Goldin S.V., 1997. Inverse problems of radiation of seismic tomography. *Geologiya i geofizika* 38 (5), 981—998 (in Russian).

Jeffries G., 1960. Earth, its origin, history, and structure. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 485 p. (in Russian).

Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I., 1980 a. Geometrical optics of inhomogeneous media. Moscow: Nauka, 305 p. (in Russian).

Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I., 1980 b. Limits of applicability of the method of geometric optics and related matters. *Uspehi fizicheskih nauk* 133 (is. 3), 475—496 (in Russian).

Lavrentiev M.M., Romanov V.G., 1966. On three linearized inverse problems for hyperbolic equations. *Doklady AN SSSR* 171, 1279—1281 (in Russian).

Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P., 1980. Some problems of mathematical physics and analysis. Moscow: Nauka, 286 p. (in Russian).

Mukhametov R.G., 1977. Task of handling two-dimensional Riemannian metric integral geometry. *Doklady AN SSSR* 232, 32—45 (in Russian).

Nikolaev A.V., 1997. Problems geotomography. In: *Issues geotomography*. Moscow: Nauka, 4—38 (in Russian).

Geotomography problems, 1997. Ed. A.V. Nikolaev. Moscow: Nauka, 336 p. (in Russian).

Rudenko O.V., 2007. Nonlinear waves: some biomedical applications. *Uspehi fizicheskih nauk* 177 (4), 374—383 (in Russian).

Rytov S. M., 1940. Modulated Waves. *Proceedings of the Lebedev Physics Institute* 2 (1), P. 3 (in Russian).

Rytov S. M., 1938. On the transition from wave to geometrical optics. *Doklady AN SSSR* 18 (2), 263—266 (in Russian).

Sadowskiy M. A., 2004. Selected works. Geophysics and physics of the explosion. Moscow: Nauka, 440 p. (in Russian).

Seismic tomography, 1990. Ed. G. Nolett. Moscow: Mir, 416 p. (in Russian).

Tichotskiy S. A., Fokin I. V., Shur D. Yu., 2011. Active radiation seismic tomography using adaptive wavelet parameterization of the system functions. *Fizika Zemli* (4), 67—86 (in Russian).

Yakovlev A. B., Bushmina N. A., Kulakov I. Yu, Dobretsov N. L., 2012. Structure of the upper mantle of the Arctic region according to regional seismic tomography. *Geologiya i geofizika* (10), 1261—1272 (in Russian).

Yanovska T. B., 2012. Methodology three-dimensional ray tomography based on the assumption of smoothness of lateral velocity variations. *Fizika Zemli* (5), 3—15 (in Russian).

Yanovska T. B., 1997. Problems seismic tomography. In: *Issues geotomography*. Moscow: Nauka, 86—98 (in Russian).

Aki K., Christofersson A., Husebye E. S., 1977. Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere. *J. Geophys. Res.* 82, 277—296.

Anderson D. L., 2002. Plate tectonics as far-from-equilibrium self-organized system. Plate boundary zones. Geodynamic series. Mon. 30. *Amer. Geophys. Union*. 411—425.

Geyko V. S., 2004. A general theory of the seismic travel-time tomography. *Geofizicheskiy zhurnal* 26 (2), 3—32.

Gerver M., Markushevich V., 1966. Determination of a seismic wave velocity from the travel-time curve. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 11, 165—173.

Goldin S. V., 2011. Ray reflection tomography: review and comments. В кн.: *Теория интерпретации в сейсморазведке и в сейсмологии*. Новосибирск: ИНГГ СО РАН. С. 247—265.

Foulger G.R., Panza G.F, Artemieva I.M, Bastow I.D., Cammarano F., Evans R., Hamilton W.B, Julian B.R., Lustrino M., Thybo H., Yanovskaya T. B., 2013. Caveats on tomographic images. *Terra Nova* 25 (4), 259—281.

Kulakov I., Kaban M. K., Tesouro M., Cloetingh S., 2009. *P*- and *S*-velocity anomalies in the upper mantle beneath Europe from tomographic inversion of the ISC-data. *Geophys. J. Int.* 179, 345—366.

Liu Q., Gu Y. J., 2012. Seismic imaging: From classical to adjoint tomography. *Tectonophysics* 566-567, 31—66.

Tikhotsky S., Achauer U., 2008. Inversion of controlled-source seismic tomography and gravity data with the self-adaptive wavelet parameterization of velocities and interface. *Geophys. J. Int.* 172, 619—630.