

Моделирование волновых полей для сред с жидкими и анизотропными упругими слоями на основе метода Хаскелла—Томсона

© В. Ю. Роганов, 2013

Институт кибернетики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 20 сентября 2012 г.

Представлено членом редколлегии Ю. К. Тяпкиным

Запропоновано стійкий метод розрахунку хвильового поля для середовища, що складається з рідких і твердих анізотропних горизонтальних шарів. Метод ґрунтується на комбінуванні методу відбиття з Δ -операторною технікою.

A stable method for calculating of the wavefield for a medium consisting of fluid and solid anisotropic horizontal layers, based on a combination of the reflectivity method with the Δ -operator technique is offered.

Введение. Моделирование волновых полей является важным инструментом при построении миграционных изображений, интерпретации и инверсии сейсмических данных, проектировании систем наблюдений. В настоящее время поиск резервуаров выполняется в сложных геологических условиях, где необходимо учитывать эффекты поглощения, анизотропии, наличие жидких слоев. Слой жидкости может располагаться вверху как в случае моря, так и между твердыми слоями, например при покрытом льдом океане или при наличии линз магмы в районах развития вулканов.

Матричный метод Хаскелла—Томсона [Thomson, 1950; Haskell, 1953] широко применяется для моделирования в акустических и твердых горизонтально-слоистых средах. При моделировании в акустической среде используются вертикальная компонента скорости смещения u_3 волнового поля и давление P . На границах слоев эти параметры непрерывны. При моделировании в горизонтально-слоистых твердых анизотропных средах используются компоненты скоростей смещений u_1 , u_2 , u_3 и напряжений τ_{13} , τ_{23} , τ_{33} , которые также непрерывны на границах. В обоих случаях непрерывность параметров позволяет рассчитывать матрицу рассеяния для пачки слоев, основываясь на технике Δ -операторов [Dunkin, 1965; Роганов, 2009а, б] или применяя рефлективный метод [Kennett, 1983; Fuchs, Muller, 1971; Роганов, Роганов, 2011]. На границе между твердой и жидкой (аку-

стической) средами остаются непрерывными только компонента u_3 скорости смещения и давление P . Давлению P с противоположной стороны границы соответствует значение компоненты тензора напряжений $\tau_{33} = -P$. Кроме того, на такой границе выполняются равенства $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$ [Аки, Ричардс, 1983]. Указанные краевые условия на границе между жидкостью и твердой средой создают трудности в прямом применении матричного метода для комбинированных жидко-твердых сред и делают невозможным построение в обычном смысле пропагатора [Молотков, 1984]. Однако остается возможность рассчитывать матрицу рассеяния для такой среды на основе Δ -операторов и рефлективного метода.

Для жидких и твердых упругих изотропных сред Δ -операторный метод при расчете коэффициентов отражения сводится к согласованию минорных пропагаторов для твердой среды, представленных матрицами 6×6 или 5×5 с пропагаторами для жидкой среды, представленных матрицами 2×2 . Для этого на границах между твердыми и жидкими слоями в произведение вставляются вспомогательные матрицы 6×2 , 5×2 , 2×6 , 2×5 . Коэффициенты преломления представляются дробями, знаменатели которых такие же, как у дробей для коэффициентов отражения, а числители — элементы матриц преломления. Матрицы преломления являются произведениями пропагаторов только твердых частей упруго-жидкой пачки, между которыми вставляются матрицы 4×4 с одним отличным от нуля эле-

ментом [Молотков, 1976; Молотков, Хило, 1983; Молотков, 1984]. В книге [Kennett, 1983] предлагается способ применения рефлективного метода для расчета волновых полей в упруго-жидких средах.

В настоящей статье выводятся формулы для элементов матрицы рассеяния анизотропной упруго-жидкой среды, позволяющие их рассчитывать на основе комбинирования Δ -операторной техники и рефлективного метода. Предложенный порядок задания элементов в пропагаторах для твердых частей упруго-жидкой пачки позволяет получить простые формулы для матриц рассеяния при обоих способах расчета, комбинируя их между собой.

Использование комбинирования Δ -операторной техники с отражательным методом является актуальным в связи с прогрессом высокопроизводительных вычислений на графических картах общего назначения (GPU). Умножение матриц высокого порядка при использовании Δ -операторной техники хорошо распараллеливается на большое количество независимых подзадач, позволяя выполнять вычисления параллельно на разных блоках графической карты без существенного увеличения временных затрат.

Теория. Рассмотрим среду, состоящую из полупространств 0 и $(n+1)$, между которыми находятся n слоев с мощностями h_i ($i=1, \dots, n$) и плоскими горизонтальными границами раздела (рис. 1).

Обозначим S_{ae} матрицу рассеяния пачки слоев, для которой слои $0-k$ заполнены жидкостью, а слои $(k+1)-(n+1)$ — твердой анизотропной породой (ж/т). Аналогично, пусть S_{ea} означает матрицу рассеяния для случая, когда слои $0-k$ состоят из твердой анизотропной породы, а слои $(k+1)-(n+1)$ заполнены жид-

костью (т/ж). Статья посвящена выводу формул для элементов матриц S_{ae} и S_{ea} на основе Δ -операторной техники [Dunkin, 1965; Роганов, 2009а, б] и с использованием отражательного метода [Fuchs, Muller, 1971; Kennet, 1983; Роганов, Роганов, 2011]. Более сложное чередование жидких и твердых слоев сводится к комбинации этих двух случаев.

При описании распространения волн в жидких слоях используются плотности $\rho^{(i)}$, скорости волн в жидкости $v^{(i)}$ и мощности слоев h_i . Твердые анизотропные слои характеризуются плотностями $\rho^{(i)}$, упругими постоянными $\lambda_{mp,nq}^{(i)}$ и мощностями h_i . В обоих случаях плоская волна

$$\mathbf{f}(x_3, p_1, p_2, \omega) \exp(j\omega(x_1 p_1 + x_2 p_2 - t)) \quad (1)$$

с частотой ω и горизонтальными медленностями p_1, p_2 , распространяющаяся в i -м слое, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{f}}{dx_3} = j\omega \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{f}(x_3). \quad (2)$$

Матрицы $\mathbf{M}^{(i)}$ и векторы $\mathbf{f}(x_3)$ имеют разный вид и размерность в зависимости от заполнения i -го слоя. Если i -й слой заполнен жидкостью, то

$$\mathbf{M}^{(i)} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \frac{p_1^2 + p_2^2}{\rho^{(i)}} \\ \rho^{(i)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x_3) = \begin{pmatrix} u_3 \\ \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\lambda = \rho^{(i)} v^{(i)2}$, u_3 — вертикальная компонента вектора скоростей смещений, $\tau_{33} = -P$, P — давление [Аки, Ричардс, 1983].

Если i -й слой заполнен твердой породой, то

$$\mathbf{M}^{(i)} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_{33}^{-1} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_{33}^{-1} (p_1 \mathbf{C}_{31} + p_2 \mathbf{C}_{32}),$$

$$\mathbf{B} = \sum_{m,n=1,2} p_m p_n (\mathbf{C}_{m3} \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{3n} - \mathbf{C}_{mn}) + \rho \mathbf{I},$$

$$\mathbf{C}_{lm} [j, n] = \lambda_{j,lm}^{(i)},$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор скоростей смещений, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33})^T$ — вектор, составленный из компонент тензора напряжений [Stroh, 1962].

Собственными числами матрицы $\mathbf{M}^{(i)}$ являются вертикальные медленности ξ_α плоских волн, распространяющихся в жидкости, или



Рис. 1. Горизонтально-слоистая среда, состоящая из жидких и твердых анизотропных слоев.

qP, S_1, S_2 -волн, распространяющихся в твердой анизотропной среде с горизонтальными медленностями (p_1, p_2) вниз (d) или вверх (u). Соответствующие собственные векторы $\mathbf{v}_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \boldsymbol{\tau}_\alpha)^T$ нормируются так, чтобы $|\mathbf{a}_\alpha| = 1$, и объединяются в матрицу \mathbf{E} . Для жидкого (акустического) случая получается 2×2 матрица

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v}^d, \mathbf{v}^u), \quad (5)$$

а для твердой анизотропной породы — матрица размера 6×6 :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v}_{qP}^d, \mathbf{v}_{S_1}^d, \mathbf{v}_{S_2}^d, \mathbf{v}_{qP}^u, \mathbf{v}_{S_1}^u, \mathbf{v}_{S_2}^u)^T. \quad (6)$$

На границах между слоями z_i при $i \neq k$ выполняется условие непрерывности решения $\mathbf{f}(z_i - 0) = \mathbf{f}(z_i + 0)$. На границе z_k между жидким и твердым слоями выполняются соотношения непрерывности вертикальных компонент скоростей смещений $u_3(z_k - 0) = u_3(z_k + 0)$ и напряжений $\tau_{33}(z_k - 0) = \tau_{33}(z_k + 0)$, а также отсутствие касательных напряжений $\tau_{13}(z_k) = \tau_{23}(z_k) = 0$.

В пределах интервалов глубин $(0, z_k)$ и (z_k, z_{kn}) , на которых расположены слои с одинаковым заполнением (жидкость или твердая порода), можно определить матрицы-пропэгаторы

$$\mathbf{P}^{(k0)} = \exp(j\omega \mathbf{M}_k) \dots \exp(j\omega \mathbf{M}_1); \quad (7)$$

$$\mathbf{P}^{(nk)} = \exp(j\omega \mathbf{M}_n) \dots \exp(j\omega \mathbf{M}_{k+1}), \quad (8)$$

связывающие между собой решения на кровлях и подошвах соответствующих интервалов:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_k - 0) &= \mathbf{P}^{(k0)} \mathbf{f}(z_0), \\ \mathbf{f}(z_n) &= \mathbf{P}^{(nk)} \mathbf{f}(z_k + 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Однако общего пропэгатора, линейно связывающего решения $\mathbf{f}(z_0)$ и $\mathbf{f}(z_n)$, не существует. Не смотря на это, матрица рассеяния, содержащая коэффициенты отражения и преломления для всей упруго-жидкой пачки слоев, определена корректно.

Матрицы рассеяния \mathbf{S}_{ae} для случая, когда жидкость находится над твердой анизотропной средой (ж/т), и для случая, когда твердая анизотропная среда находится над жидкостью (т/ж), имеют размер 4×4 и состоят из всех коэффициентов отражения и преломления, возможных для этих случаев:

$$\mathbf{S}_{ae} = \begin{pmatrix} T_{d1} & R_{u11} & R_{u12} & R_{u13} \\ T_{d2} & R_{u21} & R_{u22} & R_{u23} \\ T_{d3} & R_{u31} & R_{u32} & R_{u33} \\ R_d & T_{u1} & T_{u2} & T_{u3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{ea} = \begin{pmatrix} T_{d1} & T_{d2} & T_{d3} & R_u \\ R_{d11} & R_{d12} & R_{d13} & T_{u1} \\ R_{d21} & R_{d22} & R_{d23} & T_{u2} \\ R_{d31} & R_{d32} & R_{d33} & T_{u3} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Метод вычисления матрицы рассеяния для пачки, состоящей из жидких и изотропных упругих слоев, с использованием минорных матриц размера 6×6 , 5×5 и матриц преломления размера 4×4 , подробно изложен в работах [Молотков, 1976, 1984; Молотков, Хило, 1983].

В данной статье этот метод обобщается и применяется к расчету матрицы рассеяния для пачек, содержащих жидкие и анизотропные упругие слои. В процессе расчета используются матрицы-пропэгаторы для упругих и жидких частей пачки, приводящие к простым формулам в обоих случаях как при Δ -операторной технике, так и при использовании рефлексивного метода. Это позволяет комбинировать оба метода при расчете волнового поля.

Обозначим амплитуды волн, участвующих в рассеянии для сред типов ж/т и т/ж, соответственно

$$\mathbf{b}^{(n+1)} = (\mathbf{b}_d^{(n+1)}, \mathbf{b}_u^{(n+1)})^T, \quad \mathbf{b}^{(0)} = (b_d^{(0)}, b_u^{(0)})^T, \quad (11)$$

$$b^{(n+1)} = (b_d^{(n+1)}, b_u^{(n+1)}), \quad \mathbf{b}^{(0)} = (\mathbf{b}_d^{(0)}, \mathbf{b}_u^{(0)})^T. \quad (12)$$

Амплитуды волн схематически изображены на рис. 2. Задание одной отличной от нуля и равной единице координаты вектора $(b_d^{(0)}, \mathbf{b}_u^{(n+1)})^T$ для случая ж/т или координаты вектора $(\mathbf{b}_d^{(0)}, b_u^{(n+1)})^T$ для случая т/ж позволяет вычислить соответствующий столбец матрицы рассеяния. Этот столбец состоит из амплитуд рассеянных волн. Они определяются вектором $(\mathbf{b}_d^{(n+1)}, b_u^{(0)})^T$ для случая ж/т и вектором $(b_d^{(n+1)}, \mathbf{b}_u^{(0)})^T$ для случая т/ж.

Введем пропэгаторы, связывающие амплитуды волн в полупространствах со значениями скоростей смещений \mathbf{u} и напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на границе z_k по формулам

$$\mathbf{Q}^{(nk)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_d^{(n+1)} \\ \mathbf{b}_u^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(k0)} \begin{pmatrix} b_d^{(0)} \\ b_u^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{33} \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

для среды типа ж/т и

$$\mathbf{F}^{(nk)} \begin{pmatrix} u_3 \\ \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_d^{(n+1)} \\ b_u^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(k0)} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_d^{(0)} \\ \mathbf{b}_u^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \quad (14)$$

для среды типа т/ж.

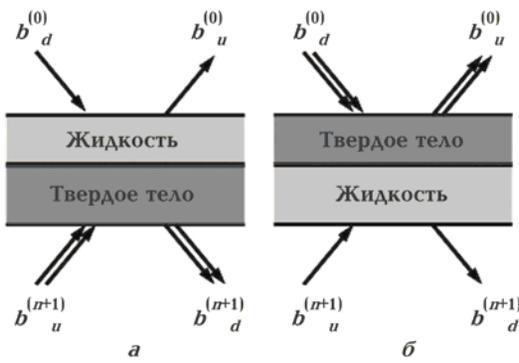


Рис. 2. Типы волн, возникающих при рассеянии на интерфейсе жидкость — анизотропная упругая среда: *a* — жидкость сверху, твердая порода снизу; *b* — жидкость снизу, твердая порода сверху.

Отметим, что в формулах (13) и (14) компоненты векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\tau}$ располагаются по-разному. Выбранное расположение компонент приводит к значительно более простым и естественным рекуррентным формулам отражательного метода для обоих случаев взаимного расположения твердой породы и жидкости.

Матрицы $\mathbf{F}^{(k0)}$, $\mathbf{Q}^{(nk)}$, $\mathbf{Q}^{(k0)}$ и $\mathbf{F}^{(nk)}$ можно выразить через обычные пропагаторы, связывающие скорости смещений и напряжения на разных глубинах, соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(k0)} &= \tilde{\mathbf{P}}^{(k1)} \mathbf{E}^{(0)}, \quad \mathbf{Q}^{(nk)} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \tilde{\mathbf{P}}^{(nk)}, \\ \mathbf{Q}^{(k0)} &= \mathbf{P}^{(k1)} \mathbf{E}^{(0)}, \quad \mathbf{F}^{(nk)} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{P}^{(nk)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где символы \sim и \approx обозначают операции перестановки 3×3 подматриц, определяемые по правилу:

если

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \\ \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{11} \\ \mathbf{X}_{22} & \mathbf{X}_{21} \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц $\mathbf{F}^{(k0)}$ и $\mathbf{F}^{(nk)}$ будем обозначать f_{ij} ($i, j=1, 2$), а элементы матриц $\mathbf{Q}^{(k0)}$ и $\mathbf{Q}^{(nk)}$ — символами q_{ij} ($i, j=1, \dots, 6$). Матрицы $\mathbf{Q}^{(k0)}$ и $\mathbf{Q}^{(nk)}$ разобьем на 4 подматрицы размером 3×3 и обозначим их \mathbf{Q}_{mn} , где $m, n=1, 2$.

Рассмотрим случай ж/т. Краевые условия для такой среды на границе $x_3=z_k$ записываются как система уравнений

$$\begin{cases} f_{11}b_d^{(0)} + f_{12}b_u^{(0)} = \tau_{33}, \\ f_{21}b_d^{(0)} + f_{22}b_u^{(0)} = u_3, \\ \mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{u} = \mathbf{b}_d^{(n+1)}, \\ \mathbf{Q}_{21}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{u} = \mathbf{b}_u^{(n+1)}, \end{cases} \quad (16)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\boldsymbol{\tau} = (0, 0, \tau_{33})^T$.

Подставляя значения τ_{33} и u_3 из первых двух уравнений в четвертое, получаем систему уравнений для определения $u_1, u_2, b_u^{(0)}$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} q_{44} & q_{45} & q_{43}f_{12} + q_{46}f_{22} \\ q_{54} & q_{55} & q_{53}f_{12} + q_{56}f_{22} \\ q_{64} & q_{65} & q_{63}f_{12} + q_{66}f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_u^{(0)} \end{pmatrix} = \\ & = - \begin{pmatrix} q_{43}f_{11} + q_{46}f_{21} \\ q_{53}f_{11} + q_{56}f_{21} \\ q_{63}f_{11} + q_{66}f_{21} \end{pmatrix} b_d^{(0)} + \mathbf{b}_u^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Эту систему уравнений решаем по правилу Крамера при различных значениях амплитуд волн, падающих на интерфейс ($b_d^{(0)} = 1, \mathbf{b}_u^{(n+1)} = \mathbf{0}$) и ($b_d^{(0)} = 0, \mathbf{b}_u^{(n+1)} = \mathbf{e}_i$) (см. рис. 2). В результате получаем элементы R_d и T_{uij} матрицы рассеяния \mathbf{S}_{ae} :

$$\begin{aligned} R_d &= - \frac{(\Delta_{456,345}f_{11} + \Delta_{456,456}f_{21})}{\Delta_0}, \\ T_{u1} &= \frac{\Delta_{56,45}}{\Delta_0}, \quad T_{u2} = - \frac{\Delta_{46,45}}{\Delta_0}, \quad T_{u3} = \frac{\Delta_{45,45}}{\Delta_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Delta_0 = \Delta_{456,345}f_{12} + \Delta_{456,456}f_{22}$ и $\Delta_{p,q}$ означает (p, q) -минор матрицы $\mathbf{Q}^{(nk)} = (q_{ij})_{i,j=1, \dots, 6}$.

Коэффициенты преломления T_{di} и коэффициенты отражения R_{uij} найдем из соотношения

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} q_{14} & q_{15} & q_{13}f_{12} + q_{16}f_{22} \\ q_{24} & q_{25} & q_{23}f_{12} + q_{26}f_{22} \\ q_{34} & q_{35} & q_{33}f_{12} + q_{36}f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_u^{(0)} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} q_{13}f_{11} + q_{16}f_{21} \\ q_{23}f_{11} + q_{26}f_{21} \\ q_{33}f_{11} + q_{36}f_{21} \end{pmatrix} b_d^{(0)} = \mathbf{b}_d^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

подставляя в него найденные значения u_1, u_2 и $b_u^{(0)}$ при разных амплитудах волн $b_d^{(0)}$ и $\mathbf{b}_u^{(n+1)}$, падающих на интерфейс. В результате получим формулы

$$\begin{aligned} T_{di} &= \frac{\Delta_{i456,345}\Delta_F}{\Delta_0}, \\ R_{ui1} &= \frac{(\Delta_{i56,345}f_{12} + \Delta_{i56,456}f_{22})}{\Delta_0}, \end{aligned}$$

$$R_{u_{i2}} = -\frac{(\Delta_{i46,345}f_{12} + \Delta_{i46,456}f_{22})}{\Delta_0},$$

$$R_{u_{i3}} = \frac{(\Delta_{i45,345}f_{12} + \Delta_{i45,456}f_{22})}{\Delta_0}. \quad (20)$$

Рассмотрим случай т/ж. Для такой среды краевые условия на границе $x_3=z_k$ состоят из уравнений (14), которые можно представить в виде

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}\mathbf{b}_d^{(0)} + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{b}_u^{(0)} = \mathbf{u}, \\ \mathbf{Q}_{21}\mathbf{b}_d^{(0)} + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{b}_u^{(0)} = \boldsymbol{\tau}, \\ f_{\ddot{u}\ddot{u}\ddot{u}} + f \boldsymbol{\tau} = b_d^{(n+1)}, \\ f_{\ddot{u}\ddot{u}\ddot{u}} + f \boldsymbol{\tau} = b_u^{(n+1)}, \end{cases} \quad (21)$$

где $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)^T$, $\boldsymbol{\tau}=(0, 0, \tau_{33})^T$.

Из уравнений (21) следует система уравнений для компонент вектора $\mathbf{b}_u^{(0)} = (b_{u1}^{(0)}, b_{u2}^{(0)}, b_{u3}^{(0)})$:

$$\begin{pmatrix} q_{44} & q_{45} & q_{46} \\ q_{\ddot{u}\ddot{u}\ddot{u}} & q & q \\ q_{34}f_{21} + q_{64}f_{22} & q_{35}f_{21} + q_{65}f_{22} & q_{36}f_{21} + q_{66}f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{u1}^{(0)} \\ b_{u2}^{(0)} \\ b_{u3}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} q_{41} & q_{42} & q_{43} \\ q_{\ddot{u}\ddot{u}\ddot{u}} & q & q \\ q_{31}f_{21} + q_{61}f_{22} & q_{32}f_{21} + q_{62}f_{22} & q_{33}f_{21} + q_{63}f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{d1}^{(0)} \\ b_d^{(0)} \\ b_{d3}^{(0)} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_u^{(n+1)} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Эта система уравнений решается по правилу Крамера при значениях $(\mathbf{b}_d^{(0)} = \mathbf{e}_i, b_u^{(n+1)} = 0)$ и $(\mathbf{b}_d^{(0)} = \mathbf{0}, b_u^{(n+1)} = 1)$ амплитуд падающих на интерфейс волн. В результате получим следующие элементы матрицы рассеяния \mathbf{S}_{ea} :

$$R_{d1j} = -\frac{(\Delta_{345,j56}f_{21} + \Delta_{456,j56}f_{22})}{D_0},$$

$$R_{d2j} = \frac{(\Delta_{345,j46}f_{21} + \Delta_{456,j46}f_{22})}{D_0},$$

$$R_{d3j} = -\frac{(\Delta_{345,j45}f_{21} + \Delta_{456,j45}f_{22})}{D_0},$$

$$T_{u1} = \frac{\Delta_{45,56}}{D_0}, T_{u2} = -\frac{\Delta_{45,46}}{D_0}, T_{u3} = \frac{\Delta_{45,45}}{D_0}. \quad (23)$$

Остальные элементы матрицы рассеяния \mathbf{S}_{ea} находим из равенства

$$\sum_{j=1}^3 [(q_{3j}f_{11} + q_{6j}f_{12})b_{dj}^{(0)} +$$

$$+ (q_{33+j}f_{11} + q_{63+j}f_{12})b_{uj}^{(0)}] = b_d^{(n+1)}. \quad (24)$$

Подставляя в (24) найденные значения $b_{uj}^{(0)}$ при $b_{dj}^{(0)} = 0$ и $b_u^{(n+1)} = 1$, получаем коэффициент отражения

$$R_u = \frac{(\Delta_{345,456}f_{11} + \Delta_{456,456}f_{12})}{D_0}. \quad (25)$$

При значениях $\mathbf{b}_d^{(0)} = \mathbf{e}_j$ и $b_u^{(n+1)} = 0$ находим коэффициенты преломления

$$T_{dj} = \frac{\Delta_{3456,j456}\Delta_F}{D_0}, \quad (26)$$

где $\Delta_F = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$, $D_0 = \Delta_{345,456}f_{21} + \Delta_{456,456}f_{22}$.

Формулы (18), (20), (23), (25), (26) можно обобщить для любой пачки слоев, содержащих жидкие и твердые анизотропные слои, воспользовавшись идеей из работы [Молотков, 1984]. Для определения коэффициентов отражения достаточно ввести переходную матрицу \mathbf{E}_{ef} размером 20×2 с отличными от нуля элементами $e_{345,1} = 1$, $e_{456,1} = 1$, а также матрицу $\mathbf{E}_{je} = \mathbf{E}_{ef}^T$ и вставлять их в произведение минорных матриц на месте границ (т/ж) и (ж/т) соответственно. Для определения коэффициентов преломления необходимо вычислить произведение пропагаторов для интервалов глубин, содержащих только твердые слои, вставляя между ними матрицы границы.

Однако проще получить матрицу рассеяния, если разбить пачку слоев на несколько пачек, в каждой из которых находится только одна граница ж/т или т/ж. Матрицу рассеяния для такой пачки можно рассчитать по формулам (18), (20), (23), (25) (26), а общую матрицу рассеяния найти по формулам отражательного метода, вычислив звездные произведения. В связи с небольшим количеством границ типа ж/т и т/ж это не отразится на скорости вычислений.

Рассмотрим отражательный метод для ж/т и т/ж типов сред. Введем обозначения матриц рассеяния для среды типа ж/т:

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}^{(nk)}) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{T}}}_d & \bar{\bar{\mathbf{R}}}_u \\ \bar{\bar{\mathbf{R}}}_d & \bar{\bar{\mathbf{T}}}_u \end{pmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{F}^{(k0)}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_d & \bar{\mathbf{r}}_u \\ \bar{\mathbf{r}}_d & \bar{\mathbf{T}}_u \end{pmatrix}, \quad (27)$$

и

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}^{(nk)}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_d & \bar{\mathbf{r}}_u \\ \bar{\mathbf{r}}_d & \bar{\mathbf{T}}_u \end{pmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{Q}^{(k0)}) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathbf{T}}}_d & \bar{\bar{\mathbf{R}}}_u \\ \bar{\bar{\mathbf{R}}}_d & \bar{\bar{\mathbf{T}}}_u \end{pmatrix} \quad (28)$$

для среды типа т/ж соответственно.

Матрицы рассеяния (27), (28) удовлетворяют уравнениям, полученным из (13), (14) пере-

становкой в них нижних подвекторов [Роганов, 2009а,б]. Эти уравнения для сред типов ж/т и ж/т соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_d & \bar{r}_u \\ \bar{r}_d & \bar{t}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_d^{(0)} \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{33} \\ b_u^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_d & \bar{\bar{R}}_u \\ \bar{\bar{R}}_d & \bar{\bar{T}}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ b_u^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_d^{(n+1)} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_d & \bar{\bar{R}}_u \\ \bar{\bar{R}}_d & \bar{\bar{T}}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_d^{(0)} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b_u^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_d & \bar{r}_u \\ \bar{r}_d & \bar{t}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ b_u^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_d^{(n+1)} \\ \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Из уравнения (29) (для случая ж/т) последовательно находят параметры τ_{33} , u_3 и $b_d^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \tau_{33} &= \bar{t}_d b_d^{(0)} + \bar{r}_u \bar{\bar{R}}_d \tau + \bar{\bar{T}}_u \mathbf{b}_u^{(n+1)}, \\ u_3 &= \bar{\bar{R}}_{d33} \tau_{33} + \bar{\bar{T}}_{u3} \mathbf{b}_u^{(n+1)}, \\ \mathbf{b}_d^{(n+1)} &= \bar{\bar{T}}_{d*3} \tau_{33} + \bar{\bar{R}}_u \mathbf{b}_u^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из этих соотношений следует формула для матрицы S_{ae} :

$$S_{ae} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_{d*3} & \bar{\bar{R}}_u \\ \bar{\bar{R}}_{d33} & \bar{\bar{T}}_{u3*} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{t}_d & \bar{r}_u \\ \bar{r}_d & \bar{t}_u \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где символ * в индексах матриц означает вектор-строку (3*) или вектор-столбец (*3), а вставленный между матрицами — звездное произведение матриц, разбитых на указанные блоки. Формулы для звездного произведения можно найти в работах [Kennet, 1983;

Ursin, 2003; Роганов, Роганов, 2011].

В случае т/ж из уравнений (30) следуют соотношения для u_3 и τ_{33} :

$$\begin{cases} \tau_{33} = \bar{r}_d u_3 + \bar{t}_u b_u^{(n+1)}, \\ u_3 = \bar{\bar{T}}_{d3*} \mathbf{b}_d^{(0)} + \bar{\bar{R}}_{u33} \tau_{33}. \end{cases} \quad (33)$$

Подставляя найденные значения u_3 и τ_{33} из (33) в равенства

$$\begin{aligned} b_d^{(n+1)} &= \bar{t}_d u_3 + \bar{r}_u b_u^{(n+1)}, \\ \mathbf{b}_u^{(0)} &= \bar{\bar{R}}_d \mathbf{b}_d^{(0)} + \bar{\bar{R}}_{u*3} \tau_{33}, \end{aligned} \quad (34)$$

получаем амплитуды всех рассеянных волн для случая т/ж. Результаты вычислений можно представить соотношением для матрицы рассеяния S_{ea} :

$$S_{ea} = \begin{pmatrix} \bar{t}_d & \bar{r}_u \\ \bar{r}_d & \bar{t}_u \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_{d3*} & \bar{\bar{R}}_{u33} \\ \bar{\bar{R}}_d & \bar{\bar{T}}_{u*3} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Отметим, что, применяя соотношения (32) и (35), можно рассчитать матрицу рассеяния для любой среды, состоящей из пачек жидких и твердых анизотропных пород. Для этого следует их применять к интервалам глубин, содержащих только одну границу жидкость — твердое тело, а затем полученные матрицы рассеяния снова перемножить по формуле звездного произведения.

Численные примеры. Применение комплексирования методов Δ -матриц с отражательным при вычислении волнового поля для горизонтально-слоистой жидко-упругой анизотропной среды продемонстрируем на двух примерах.

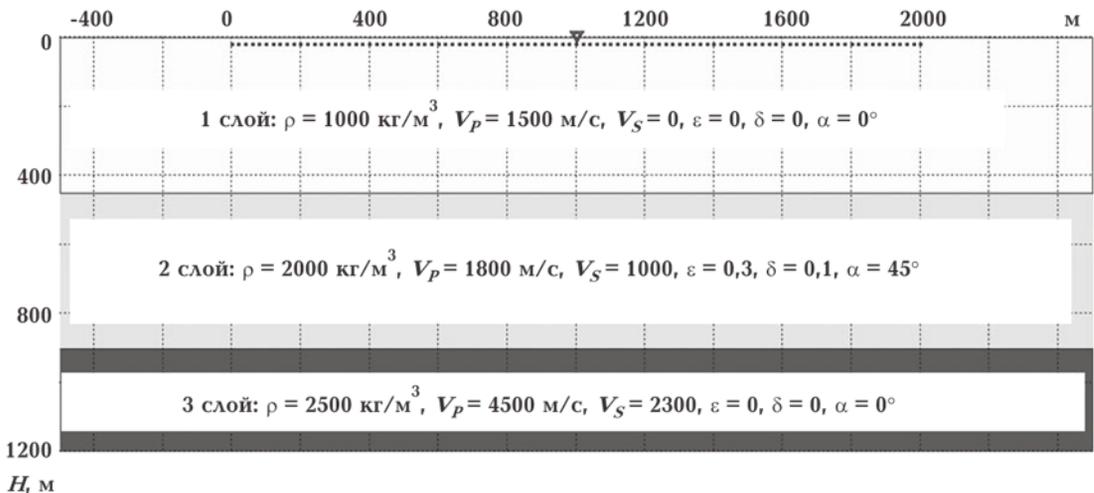


Рис. 3. Схема наблюдений и модель трехслойной среды, первый слой которой состоит из жидкости, второй — из твердой породы с ТТИ-анизотропией, третий — из твердой изотропной породы.

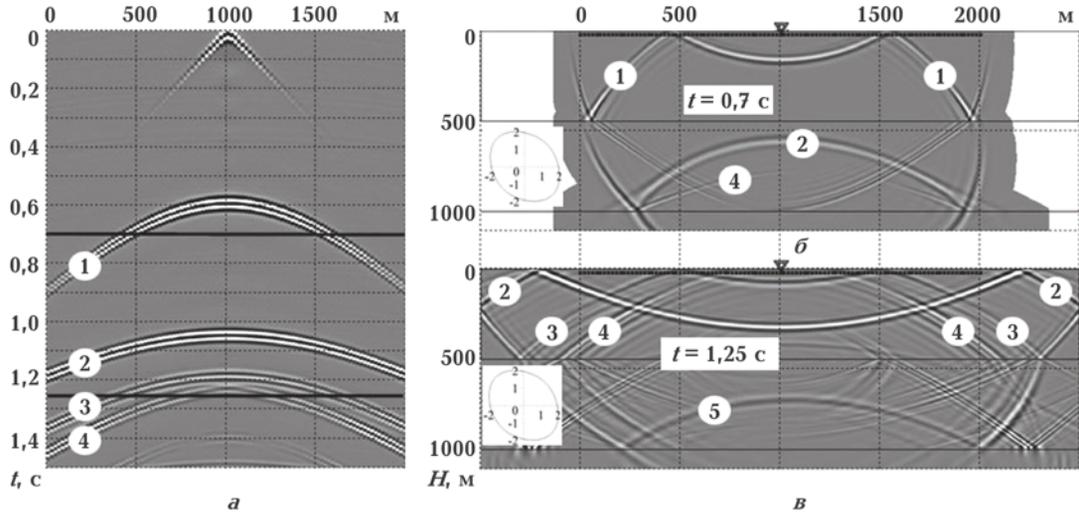


Рис. 4. u_3 -компонента волнового поля для трехслойной среды (а), зарегистрированная приемниками; срезы волнового поля (б, в) на временах $t=0,7$ с и $t=1,25$ с соответственно. Цифрами 1—5 обозначены разные типы волн, возникающих в процессе распространения.

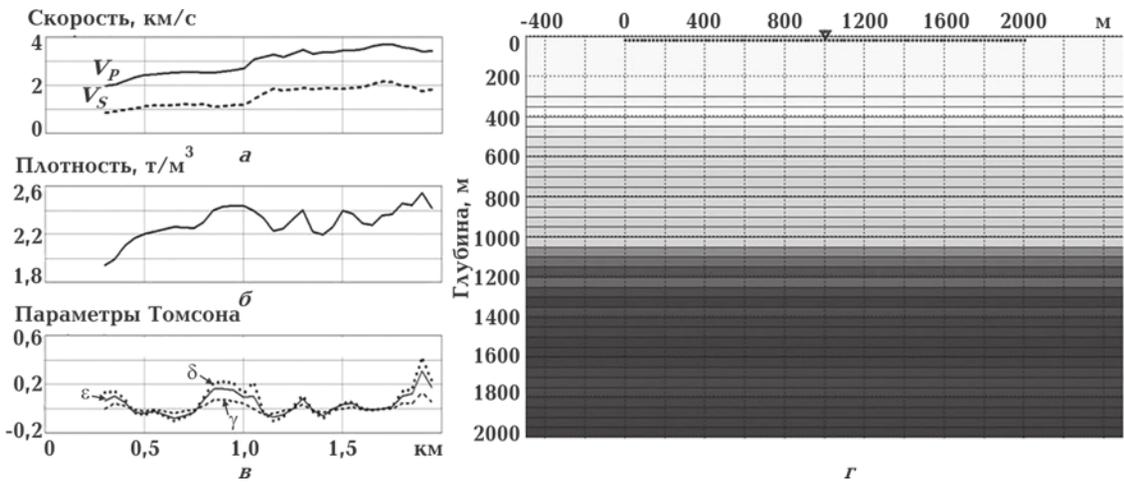


Рис. 5. Модель многослойной жидко-упругой среды с ВТИ-анизотропией, построенная по каротажным диаграммам для континентального шельфа Северного моря: а — кривые скоростей qP - и qSV -волн; б — кривые плотностей ρ ; в — кривые параметров Томсона ϵ , δ , γ ; г — вертикальное сечение среды и схема наблюдений.

Первый пример — это трехслойная модель среды, изображенная на рис. 3. В верхнем слое, состоящем из воды, под свободной поверхностью на глубине 10 м находится точечный источник, генерирующий волну с сигналом Риккера 45 Гц. Приемники расположены на глубине 20 м симметрично относительно источника от $x_1=0$ до $x_2=2000$ м с шагом $\Delta x=25$ м. Второй слой, граничащий с водой, состоит из трансверсально-изотропной (ТТИ) породы, параметры Томсона которой $\epsilon=0,3$; $\delta=0,1$; $\gamma=0$. Угол наклона оси симметрии к вертикали $\alpha=45^\circ$. Третий слой является изотропной упругой средой.

На рис. 4, а показана зарегистрированная сейсмограмма, а на рис. 4, б и 4, в — срезы волнового поля на временах $t=0,7$ с и $t=1,25$ с соответственно. Цифрами 1—5 обозначены разные типы отраженных волн: 1 — волна, отраженная от первой границы; 2 — qP -волна, отраженная от второй границы и ее акустическое продолжение в первом (жидком) слое; 3 — трехкратно-отраженная акустическая волна, распространяющаяся в первом слое по траектории источник — первая граница — свободная поверхность — первая граница; 4 — отраженная обменная qPS_1 -волна во втором слое. Эта волна продолжается в первом

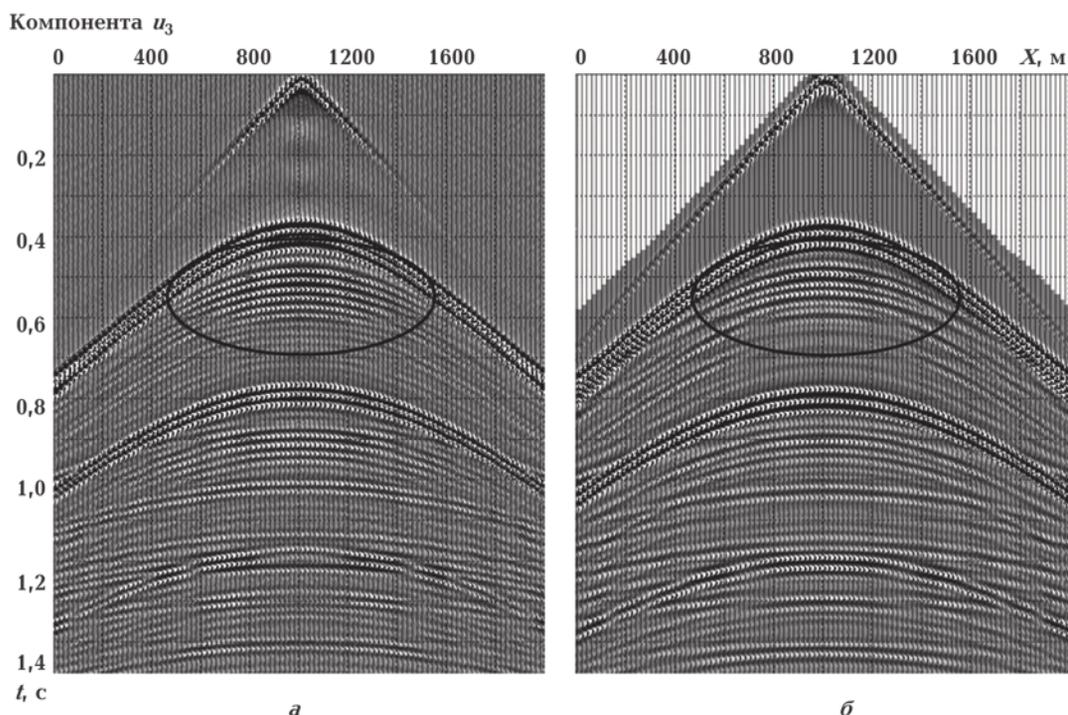


Рис. 6. Компонента u_3 зарегистрированного волнового поля, рассчитанная по методу Хаскелла—Томсона (а) и конечно-разностным методом (б). Овалами отмечены для сравнения отраженные волны от верхней части тонкослойистой пачки твердых слоев

слое как акустическая волна в жидкости и регистрируется приемниками; 5 — отраженная от второй границы qP -волна, инициализированная двукратно-отраженной волной из первого слоя, продолженной во второй слой как qP -волна. На рис. 4, а показана u_3 -компонента зарегистрированного волнового поля с идентификацией указанных выше волн. На срезах волнового поля рис. 4, б, в видно, что внутри второго слоя волновые фронты qP -волн 2 и 5 вытягиваются по направлению больших значений групповых скоростей (45°). Индикатрисы групповых скоростей показаны в левых частях рисунков.

Во втором примере представлен результат расчета сейсмограммы для модели среды, составленной по каротажным данным для континентального шельфа Северного моря. Скорости, плотности и параметры Томсона заблокированы осреднением Бакуса [Bakus, 1962] на интервалы 50 м (рис. 5, г). Глубина моря 300 м, слои твердой породы являются трансверсально-изотропными с вертикальной осью симметрии (ВТИ) и описываются скоростями, плотностями и параметрами Томсона из каротажных диаграмм, показанных на рис. 5, а—в.

Сейсмограмма с компонентой u_3 , рассчитанная на основе матрицы рассеяния для жидко-упругой анизотропной среды, представлена на рис. 6, а. Для сравнения, сейсмограмма для такой же модели была рассчитана конечно-разностным методом с шагом решетки 3 м (рис. 6, б). Сопоставляя рис. 6, а и рис. 6, б, можно убедиться, что они очень похожи. Это свидетельствует о том, что оба метода хорошо моделируют волновые поля для среды типа ж/т. Однако в обведенной овалом области на рис. 6, а оси синфазности более четко выражены, чем на рис. 6, б. Динамика волн на рис. 6, а правильнее, чем на рис. 6, б. В этом можно убедиться, уменьшая шаг решетки счета конечно-разностной схемы. Причина более грубого результата при конечно-разностном моделировании состоит, по-видимому, в сглаживании параметров модели в окрестности границ, на которых они разрывны.

Выводы. Предложен метод расчета волнового поля для среды, состоящей из жидких и твердых анизотропных горизонтальных слоев, основанный на комбинировании отражательного метода с Δ -операторной техникой. Метод продемонстрирован на двух примерах.

Список литературы

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. — Москва: Мир, 1983. — 519 с.
- Молотков Л. А. О коэффициентах отражения и преломления в случае упруго-жидких слоистых систем // Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1976. — **62**, № 8. — С. 154—167.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. — Ленинград: Наука, 1984. — 201 с.
- Молотков Л. А., Хило А. Е. Исследование распространения трехмерных волн в упругих и упруго-жидких слоистых системах // Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1983. — **128**, № 13. — С. 116—129.
- Роганов В. Ю. Вычисление волновых полей для анизотропных сред с использованием метода Хаскелла—Томсона // Геофиз. журн. — 2009а. — **31**, № 3. — С. 63—73.
- Роганов В. Ю. Вычисление матрицы рассеяния для анизотропной горизонтально-слоистой среды с поглощением // Геофиз. журн. — 2009б. — **31**, № 5. — С. 75—84.
- Роганов В. Ю., Роганов Ю. В. Расчет волновых полей для анизотропных сред с поглощением на основе отражательного метода // Геофиз. журн. — 2011. — **33**, № 4. — С. 115—124.
- Backus G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // J. Geophys. Res. — 1962. — **67**. — P. 4427—4440.
- Dunkin I. W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. Amer. — 1965. — **55**, № 2. — P. 335—358.
- Fuchs K., Muller G. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc. — 1971. — **23**. — P. 417—433.
- Haskell N. A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bul. Seismol. Soc. Amer. — 1953. — **43**, № 1. — P. 17—34.
- Kennett B. L. N. Seismic wave propagation in stratified media. — New York: Camb. Univ. Press., 1983. — 200 p.
- Stroh A. N. Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. — 1962. — **41**. — P. 77—103.
- Thomson W. T. Transmission of classic waves through a stratified solid material // J. Appl. Phys. — 1950. — **21**, № 1. — P. 89—93.
- Ursin B. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media // Geophysics. — 1983. — **48**, № 8. — P. 1063—1081.