

# Динамика прискважинной зоны во время бурения пороупругого пласта

© В. В. Шелухин<sup>1</sup>, И. Н. Ельцов<sup>2</sup>, 2012

<sup>1</sup>Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

Поступила 27 апреля 2012 г.

Представлено членом реждколлегии В. П. Коболевым

Запропоновано математичну модель динаміки напруженого стану, яка дає змогу визначити роль напружень і деформацій у фільтраційних течіях поблизу свердловини. Досліджено поведіння фронту проникнення та зростання глинистої кірки. Проведено порівняння з раніше отриманими результатами для жорсткого пористого скелета.

Mathematical model of strain state dynamics has been proposed, which makes possible to detect how stresses and strains impact filtration flows near the borehole. Behavior of both invasion front and mud-cake growth has been studied. Comparison with the earlier obtained results for a rigid rock frame has been made.

**Введение.** Основная идея работы — системный анализ процессов в сложной гетерогенной среде, каковой является горная порода. Если построить фундаментальную междисциплинарную теорию физических полей в таких средах, открывается перспектива создания реалистичных математических моделей нефтегазовых резервуаров и методов достоверной оценки их прогнозных параметров.

При вскрытии нефтяных пластов в прискважинную область внедряется буровой раствор, который имеет, как правило, иные физические свойства, чем пластовые флюиды. В результате образуется зона проникновения, характеристики которой отличаются от неизменной части пласта. Важно, что в результате геомеханических и фильтрационных процессов в прискважинной зоне изменяются электрические свойства среды, а современный инструментарий электромагнитного контроля и диагностики прискважинной области позволит в будущем интерпретировать электромагнитные измерения в нефтегазовых скважинах с учетом геомеханической и гидродинамической обстановки в окрестности скважины. Ранее вопрос о зоне проникновения рассматривался в работах [Кашеваров и др., 2003; Шелухин, Ельцов, 2004; Shelukhin, 2008] без учета напряжений в породе. Однако при бурении глубоких скважин из-за большого скважинного давления напряжения в породе могут значительно возрастать, что сказывается на проницаемости и динамике фронта проникновения.

В отличие от задач нефтедобычи, при бурении важную роль играет глинистая корка, которая образуется на стенке скважины за счет глинистых частиц бурового раствора при проникновении фильтрата в пласт. Корка растет и имеет, как правило, существенно более низкую проницаемость, чем пласт. Поэтому динамику корки необходимо учитывать при определении порового давления, напряжений в твердом скелете и при задании уравнения динамики фронта проникновения. Наиболее общие уравнения роста корки, в том числе и для горизонтальных скважин, получены в работе [Shelukhin, 2008]. В настоящей статье рассматриваются вертикальные скважины, для которых корка и фронт проникновения обладают осевой симметрией, что значительно облегчает вычисления.

**Уравнения механики пороупругих сред.** Напряженно-деформируемое состояние насыщенной пористой среды будем описывать в рамках теории Био [Biot, 1956], в которой композитная порода трактуется как однородная среда. Каждый бесконечно малый объем такой среды в точке  $x$  в момент времени  $t$  характеризуется двумя векторами  $\mathbf{u}_r(t, x)$ ,  $\mathbf{v}_r(t, x)$  и скалярной величиной  $p_r(t, x)$ . Вектор  $\mathbf{u}_r$  означает смещение твердого скелета, а вектор  $\mathbf{v}_r$  описывает смещение жидкой компоненты композита. Скаляр  $p_r$  имеет смысл порового давления. Предполагается, что в начальный момент времени среда находится в равновесии и

$$\mathbf{u}_r(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{v}_r(0, x) = 0, \quad p_r(0, x) = p_0(x).$$

Величины  $\mathbf{u}^0$ ,  $p_0$  находятся из уравнений равновесия:

$$\nabla p_0 = \rho_f \mathbf{g}, \quad 0 = \operatorname{div} \sigma_{0s} + \rho_s \mathbf{g},$$

$$\sigma_{0s} = \lambda_s \operatorname{div} \mathbf{u}^0 I + 2\mu_s \xi(\mathbf{u}^0).$$

Здесь  $E(\mathbf{u}^0)$  — тензор деформаций:

$$E(\mathbf{u}^0)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right),$$

$\rho_f$  — плотность жидкости,  $\rho_s$  — плотность твердой фазы,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения,  $\sigma_{0s}$  — тензор напряжений в твердой фазе,  $I$  — единичный тензор,  $\lambda_s$ ,  $\mu_s$  — модули упругости твердой фазы. К уравнениям равновесия следует добавить краевые условия, включая условия бокового распора вдали от скважины. Тензор напряжений однородной пороупругой среды  $\tau_r(t, x)$  в состоянии равновесия задается равенством

$$\tau_r(0, x) = -\varphi p_0 I + (1 - \varphi) \sigma_{0s},$$

где  $\varphi$  — пористость.

Обозначим  $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v} - \mathbf{u})$  и введем поля отклонений (приведенные поля):

$$p = p_r - p_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}^0,$$

$$\tau = \tau_r - (-\varphi p_0 I + (1 - \varphi) \sigma_{0s}).$$

Тогда уравнения Био для пороупругой среды примут вид [Biot, 1956]

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho_f \mathbf{w}_t = \operatorname{div} \tau, \quad \mathbf{w}_t = \frac{k}{\eta} (-\nabla p + p_f \mathbf{u}_t + m \mathbf{w}_t),$$

$$-p = a_c M \operatorname{div} \mathbf{u} + M \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad \tau = \sigma - \varphi p I,$$

$$\rho = \varphi \rho_f + (1 - \varphi) \rho_s,$$

$$\sigma = 2\mu E(\mathbf{u}) + [(\lambda_c - \varphi a_c M) \operatorname{div} \mathbf{u} + M(a_c - \varphi) \operatorname{div} \mathbf{w}] I,$$

где  $\eta$  — вязкость,  $m = T_* p_f / \varphi$  и  $1 < T_*$  — инерционный множитель.

**Квазистационарные уравнения.** Введем скорость фильтрации жидкости относительно скелета  $q = \mathbf{w}_r$ . Тогда уравнения Био допускают запись

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho_f \mathbf{q}_t = \operatorname{div} \tau, \quad \mathbf{q} = \frac{k}{\eta} (-\nabla p + \rho_f \mathbf{u}_t + m \mathbf{q}_t),$$

$$\tau = \sigma - \varphi p I,$$

$$-p_t = a_c M \operatorname{div} \mathbf{u}_t + M \operatorname{div} \mathbf{q},$$

$$\sigma = 2\mu E(\mathbf{u}) + [(\lambda_c - a_c \varphi M) \operatorname{div} \mathbf{u} + M(a_c - \varphi) \operatorname{div} \mathbf{w}] I.$$

Введем безразмерные переменные (со штрихом)

$$x = x_0 x', \quad p = \mu p', \quad \mathbf{w} = w_0 \mathbf{w}',$$

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{q}', \quad t = t_0 t', \quad \mathbf{u} = x_0 \mathbf{u}', \quad \tau = \mu \tau',$$

где параметры с индексом 0 — характерные размерные величины. Тогда уравнения примут вид

$$\left( \frac{\rho x_0^2}{\mu t_0^2} \right)_1 \mathbf{u}'_{t'} + \left( \frac{\rho_f x_0 q_0}{\mu t_0} \right)_2 \mathbf{q}'_t = \operatorname{div}' \tau', \quad (1)$$

$$\mathbf{q}' = - \left( \frac{k \mu}{\eta x_0 q_0} \right) \nabla' p' + \left( \frac{k \rho_f x_0}{\eta t_0^2 q_0} \right)_3 \mathbf{u}'_{t'} + \left( \frac{k m}{\eta t_0} \right)_4 \mathbf{q}'_{t'}, \quad (2)$$

$$- \left( \frac{\mu x_0}{M t_0 q_0} \right)_5 p'_t = \left( \frac{a_c M x_0}{M t_0 q_0} \right)_6 \operatorname{div}' \mathbf{u}'_t + \operatorname{div}' \mathbf{q}', \quad (3)$$

$$\tau' = \sigma' - \varphi p' I, \quad (4)$$

$$\sigma' = 2E'(\mathbf{u}') + \left[ \frac{\lambda_c - a_c \varphi M}{\mu} \operatorname{div}' \mathbf{u}'_t + \frac{M(a_c - \varphi)}{\mu} \operatorname{div}' \mathbf{w}' \right] I.$$

Когда характерное время процесса  $t_0$  велико, в системе (1)–(4) можно пренебречь членами уравнений с малыми безразмерными множителями  $(\dots)_i$ ,  $i = 1, 6$ . В этом случае уравнение принимает вид условия несжимаемости  $\operatorname{div}' \mathbf{q}' = 0$ . Так как  $\mathbf{q} = \mathbf{w}_r$ , то с условием несжимаемости согласуется и предположение  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ .

Таким образом, приходим к модели медленной фильтрации несжимаемой жидкости в упругом скелете, которая в размерных переменных имеет вид

$$\operatorname{div} \tau = 0, \quad \mathbf{q} = - \frac{k}{\eta} \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

$$\tau = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} I + 2\mu E(\mathbf{u}) - \varphi p I,$$

где  $\lambda = \lambda_c - a_c \varphi M$ .

В приложениях  $\lambda$  вычисляется по формуле [Gassmann, 1951; Palmer, 2009]

$$\lambda = P + Q - 2\mu,$$

где

$$P = \frac{4\mu}{3} + \frac{(1 - \varphi)[(1 - \varphi)K_s - K_b] + \varphi K_s K_b / K_f}{(1 - \varphi) - K_b / K_s + \varphi K_s / K_f},$$

$$Q = \frac{\varphi[(1 - \varphi)K_s - K_b]}{(1 - \varphi) - K_b / K_s + \varphi K_s / K_f}.$$

Здесь  $K_b$ ,  $K_f$ ,  $K_s$  — модули всестороннего сжатия для ненасыщенной (сухой) пористой среды, для поровой жидкости и для материала скелета пористой среды, а  $\mu$  — модуль сдвига. Далее в расчетах модули упругости берутся для трех искусственных образцов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и одного при-

родного Berea Sandstone, типичного песчаника для лабораторных исследований. Данные для этих образцов взяты из работы [Winkler et al., 1989].

Исключение  $q$  приводит к системе

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \varphi \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} = 0, \operatorname{div} \left( \frac{k}{\eta} \nabla p \right) = 0$$

для приведенного порового давления  $p$  и приведенного поля перемещений  $\mathbf{u}$ . Отметим, что в общем случае проницаемость  $k$  зависит от тензора напряжений  $\tau$  [Palmer, Manssori, 1998].

В ряде приложений необходимо определить поле напряжений вблизи вертикальной скважины радиуса  $r_w$  и осью, совпадающей с осью  $z$  (направленной вверх) цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ . В силу симметрии поле перемещений и поровое давление не зависят от угловой переменной  $\varphi$ .

Приведем краевые условия на стенке открытой скважины, которые представляют собой условия непрерывности давления, нормальных и касательных напряжений:

$$r = r_w: p = p_w, \tau_{rn} \equiv \mathbf{e}_r \tau \langle \mathbf{e}_r \rangle = -p_w, \tau_{rz} \equiv \mathbf{e}_z \tau \langle \mathbf{e}_r \rangle = 0,$$

где  $\mathbf{e}_r$  — вектор единичной нормали к скважине, направленный вдоль радиуса от центра скважины;  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор, направленный вдоль вертикальной оси;  $p_w$  — приведенное давление в скважине.

Вдали от скважины на расстоянии  $r_\infty$  выполняются краевые условия

$$r = r_\infty: p = p_\infty, \mathbf{u} = 0.$$

Анализ газовых скважин [Palmer, Manssori, 1998] показывает резкое повышение притока газа при снижении скважинного давления, которое нельзя объяснить законом Дарси без предположения, что проницаемость возрастает при депрессии. Поэтому по аналогии с работами [Palmer, 2009] и [Shi, Durucan, 2005] можно исходить из следующего уравнения состояния:

$$\frac{k}{k_0} = e^{-\alpha P/\mu}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — безразмерный коэффициент сжимаемости и  $P$  — отклонение эффективного давления от равновесного эффективного давления. Отметим, что в работах [Palmer, 2009] и [Winkler et al., 1989] вместо  $P$  в уравнении (5) стоит некоторое эффективное напряжение. По определению эффективного давления имеем

$$-P(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{S_\delta} \int_{S_\delta} \frac{n\tau(y) \langle n \rangle}{4\pi\delta^2} d\sigma_y =$$

$$= -\varphi p(x) + \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{tr} E(x).$$

Здесь поверхностный интеграл от нормальной составляющей вектора напряжений, соответствующего приведенному тензору  $\tau$ , берется по сфере  $S_\delta$  радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x$ . Способ вычисления константы  $\alpha$  будет предложен ниже.

Приведем формулировку задачи в полярных координатах. Введем радиальную и вертикальную компоненты вектора перемещений

$$\mathbf{u} = u(r, z)\mathbf{e}_r + w(r, z)\mathbf{e}_z.$$

Рассмотрим мощный пласт, в котором напряженное состояние одинаково во всех горизонтальных плоскостях, т. е. не зависит от вертикальной переменной  $z$ . В этом случае уравнение (5) сводится к следующему:

$$\frac{k}{k_0} = \exp \left\{ -\alpha \left[ \varphi \frac{p}{\mu} - \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) \left( u_r + \frac{u}{r} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Напряженное состояние в однородном пласте описывается системой для  $u(r), p(r)$ :

$$(\lambda + \mu) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r^2} \right) = \varphi \frac{dp}{dr},$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{rk}{\eta} \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad (7)$$

Краевые условия имеют вид

$$r = r_w: p = p_w, \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right) - \varphi p + 2\mu \frac{du}{dr} = -p_w;$$

$$r = r_\infty: p = p_\infty, u = 0. \quad (8)$$

Таким образом, напряженное состояние в однородном пласте описывается системой (6)—(8). Отметим, что случай  $\alpha = 0$  соответствует пороупругой среде с постоянной проницаемостью.

**Асимптотический анализ однородного слоя без учета глинистой корки. Напряженное состояние.** Сначала исследуем случай, когда глинистой коркой можно пренебречь. Отсутствие корки типично для задач добычи. Ищем решение задачи (6)—(8) в виде асимптотических рядов:

$$u = u^0 + \alpha u^1 + \dots, \quad p = p^0 + \alpha p^1 + \dots. \quad (9)$$

Подставляя ряды (9) в уравнения (7), используя представление

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha k_1 + \alpha^2 k_2 \dots,$$

$$k_1 = -\varphi \frac{p^0}{\mu} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) \left( \frac{du^0}{dr} + \frac{u^0}{r} \right)$$

и собирая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ , для главных членов  $u^0, p^0$  получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\eta} \frac{dp^0}{dr} \right) = 0, \quad p^0(r_w) = p_w, \quad p^0(r_\infty) = p_\infty$$

и краевую задачу

$$(\lambda + \mu) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru^0)}{dr} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du^0}{dr} \right) - \frac{u^0}{r^2} \right) = \varphi \frac{dp^0}{dr},$$

$$r = r_w : \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru^0)}{dr} \right) - \varphi p^0 + 2\mu \frac{du^0}{dr} = -p_w;$$

$$u^0(r_\infty) = 0.$$

При известных функциях  $u^0, p^0$ , находятся коэффициенты  $u^1, p^1$  и т. д.

Из формулы (6) следует

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha k_1(x) + o(\alpha),$$

$$k_1 = \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) (c_3 \ln x + c_4) - \frac{\varphi \Delta p}{\mu} (c_1 \ln x + c_2), \quad (10)$$

где  $x = r/\Delta r$ . Коэффициенты  $c_i$  вычисляются явным образом.

**Оценка коэффициента сжимаемости.** Обработка данных дебита газовых скважин показывает [Palmer, 2009], что увеличение проницаемости при снижении скважинного давления хорошо аппроксимируется уравнением

$$\frac{k(x_w)}{k_0} = e^{-3\beta p_w/\mu} = 1 - \frac{3\beta p_w}{\mu} + o\left(\frac{3\beta p_w}{\mu}\right). \quad (11)$$

Кроме того, из формул (10) следует

$$\lim_{r_w/r_w \rightarrow \infty} \frac{k(x_w)}{k_0} = 1 - \frac{4\alpha \varphi p_w}{3\mu(2 + \lambda/\mu)} + o\left(\frac{4\alpha \varphi p_w}{3\mu(2 + \lambda/\mu)}\right).$$

Поэтому «теоретическую» и «экспериментальную» константы  $\alpha$  и  $\beta$  можно связать равенством  $\frac{3\beta p_w}{\mu} = \frac{4\alpha \varphi p_w}{3\mu(2 + \lambda/\mu)}$ .

В работе [Palmer, 2009] приводится значение  $\beta/\mu = \frac{2,3}{6,895} \times 10^{-7}$  1/Па, которое соответствует кривой (11) при следующих значениях модуля Юнга, коэффициента Пуассона и пористости:  $E = 1,72 \cdot 6,895 \cdot 10^8$  Па,  $\nu = 0,39$ ,  $\varphi = 0,1$ . Так как  $2\mu + \lambda = E(1-\nu)(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$ , то  $\alpha = 1,775 \cdot 10^3$ . Это значение коэффициента сжимаемости и

используется в данной статье для всех вычислений.

**Фронт проникновения.** Так как соли растворяются лишь в водной фазе, то в предположении, что скорости фильтрации водной и нефтяной фазы совпадают и заданы вектором  $q$ , перенос соли с массовой концентрацией  $c$  описывается транспортным уравнением

$$\frac{\partial(\rho_f c)}{\partial t} + \text{div}(c \rho_f \mathbf{q}) = 0,$$

где  $\rho_f$  — (постоянная) плотность водной фазы. Запишем начальные и краевые условия для концентрации соли:

$$c|_{r=r_w} = c_*, \quad c|_{\tau=0} = c_0.$$

Очевидно,  $c$  принимает в зоне внедрения и в неизменной зоне значения  $c_*$  и  $c_0$  соответственно. Уравнение переноса соли в полярных координатах записывается в виде

$$\varphi c_t - \frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial r} = 0.$$

На плоскости переменных  $(r, t)$  характеристики этого уравнения находятся из уравнения

$$\frac{dy}{dt} = - \left( \frac{k}{\varphi \eta} \frac{\partial p}{\partial r} \right) (r, t) \Big|_{r=y}. \quad (12)$$

Очевидно,  $\frac{d}{dt} c(y(t), t) = 0$  т. е.  $c(r, t)$  постоянна вдоль каждой характеристики на плоскости переменных  $(r, t)$ . Глубина фронта проникновения в момент времени  $t$  задается равенством  $r = y(t)$ , где  $y$  — решение уравнения (12) с начальными данными  $y(0) = r_w$ .

Обращаясь к асимптотическим представлениям (9), получаем следующую задачу для отыскания фронта проникновения:

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{k_0}{\varphi \eta} \left\{ p_r^0 + a \left[ p_r^1 + \left( u_r^0 + \frac{u_0}{r} \right) p_r^0 \right] \right\} \Big|_{r=y},$$

$$y(0) = r_w. \quad (13)$$

Решение задачи (13) показывает, что при бурении из-за снижения проницаемости в пороупругой среде зона проникновения распространяется вглубь пласта медленнее, чем в недеформируемой пористой среде с той же пористостью.

**Асимптотический анализ однородного слоя с учетом глинистой корки. Оценка напряженного состояния.** Рассмотрим процесс бурения с учетом инфильтрации бурового раствора в пласт в условиях образования глини-

стой корки на стенке скважины и деформации скелета. Для вертикальной скважины глинистую корку можно считать осесимметричной. Если пренебречь изменением корки по высоте скважины, то рост корки подчиняется уравнению [Shelukhin, 2008]

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial t} = \Lambda \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_r \Big|_{r=r_c}, \quad r_c = r_w - \sigma_c.$$

Здесь  $\sigma_c(t, r)$  — толщина корки, зависящая от времени и расстояния от оси скважины  $r$ ;  $r_w$  — радиус скважины;  $r_c$  — координата фронта корки;  $\mathbf{e}_r$  — вектор внешней нормали к стенке скважины, направленный вдоль радиуса. Параметр  $\Lambda$  определяется свойствами бурового раствора и пористого скелета корки:

$$\Lambda = \frac{a_0 \rho_s^m \rho_f^c \varphi_s^m}{(\rho_s^c \varphi_s^c - \rho_s^m \varphi_s^m) \rho_f^m \varphi_f^m},$$

где  $\rho_s^m$  — плотность твердой фазы бурового раствора,  $\rho_f^m$  — плотность жидкой фазы бурового раствора,  $\rho_f^c$  — плотность пластовой жидкости,  $\rho_s^c$  — плотность твердых частиц корки,  $\rho_f^c$  — плотность фильтрата бурового раствора в корке,  $\varphi_s^m$  — объемная концентрация твердой фазы бурового раствора,  $\varphi_f^m$  — объемная концентрация жидкой фазы бурового раствора,  $\varphi_s^c$  — объемная концентрация твердой фазы корки,  $a_0$  — отношение скоростей твердой и жидкой фаз бурового раствора на стенке скважины. Способ расчета параметра  $a_0$  приведен в работе [Shelukhin, 2008]. Скорость фильтрации в корке определяется уравнениями

$$\mathbf{q} = -\frac{k_c}{\eta_c} \nabla p, \quad \text{div } \mathbf{q} = 0, \quad r_c < r < r_w.$$

Скорость фильтрации  $\mathbf{q}$  в пороупругом пласте  $r_w < r < r_\infty$  и перемещения скелета  $\mathbf{u}$  подчиняются уравнениям (1)—(4).

Если непрерывная функция  $f(r)$  терпит разрыв в точке  $r=\xi$ , то для предельных значений справа и слева и для скачка примем следующие обозначения:

$$f|_{\xi+}, f|_{\xi-}, [f] = f|_{\xi+} - f|_{\xi-}.$$

На скважине выполняются условия непрерывности давления и потоков:

$$r = r_w : [p] = 0 \quad [\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_r] = 0.$$

Кроме того, на стенке скважины совпадают нормальное напряжение пороупругой среды и поровое давление корки:

$$r = r_w : \tau_{nn} \equiv \mathbf{e}_r \cdot \tau \langle \mathbf{e}_r \rangle \Big|_{r_w+} = -p \Big|_{r_w-}.$$

К указанным условиям следует добавить внешние краевые условия

$$p|_{r_{c+}} = p_w, \quad p(r_\infty) = p_\infty, \quad u(r_\infty) = 0,$$

и начальные данные

$$\sigma_c|_{t=0} = 0.$$

Если исключить скорость фильтрации, то указанная задача сводится к отысканию трех функций  $u(r, t)$ ,  $p(r, t)$ ,  $\sigma_c(t)$ , которые удовлетворяют следующим условиям. На интервале  $r_w < r < r_\infty$  выполняются уравнения

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} \right) = \varphi \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rk}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (14)$$

где

$$\frac{k}{k_0} = \exp \left\{ -\alpha \left[ \varphi \frac{p}{\mu} - \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) \left( u_r + \frac{u}{r} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

На интервале  $r_c < r < r_w$ ,  $r_c = r_w - \sigma_c(t)$  требуется решить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rk_c}{\eta_c} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (16)$$

где  $\sigma_c(t)$  находится из уравнения

$$\frac{d\sigma_c}{dt} = -\frac{\Lambda k_c}{\eta_c} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_c+}. \quad (17)$$

Условия непрерывности давления и потоков на скважине имеют вид

$$r = r_w : [p] = 0, \quad \left[ \frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 0. \quad (18)$$

Кроме того, на скважине выполняется условие непрерывности нормального напряжения:

$$\left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} - \varphi p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r_w+} = -p \Big|_{r_w-}. \quad (19)$$

Наконец, внешние краевые условия и начальные данные формулируются в виде

$$p|_{r_{c+}} = p_w, \quad p(r_\infty) = p_\infty, \quad u(r_\infty) = 0, \quad \sigma_c|_{t=0} = 0. \quad (20)$$

Особенность сформулированной задачи (14)—(20) состоит в том, что функция  $p$  определяется в области с неизвестной границей. Оказывается, можно избавиться от этого, если проинтегрировать уравнение (16). Пусть  $p_c(r, t)$  — сужение  $p(r, t)$  на интервал  $r_c < r < r_w$ , тогда  $p_c = c_{12} \ln(r/\Delta r) + c_{13}$ , где постоянные  $c_{12}$ ,  $c_{13}$  зависят от времени. Используя условия  $p_c(r, t) = p_w$ ,  $p_c(r_w, t) = p(r_w, t)$ , находим постоянную  $c_{12}$ :



$$c_{12} = \frac{p(r_w) - p_w}{\ln(r_w/r_c)}$$

Теперь уравнение фронта корки (17) приобретает вид

$$r_c \frac{dr_c}{dt} = \frac{\Lambda k_c}{\eta_c} \frac{p(r_w, t) - p_w}{\ln(r_w/r_c)}, \quad r_c|_{t=0} = r_w, \quad (21)$$

а условие непрерывности скорости фильтрации допускает запись

$$\left( \frac{k}{\eta} p' \right) \Big|_{r_w} = \frac{k_c}{r_w \eta_c} \cdot \frac{p(r_w, t) - p_w}{\ln(r_w/r_c)}. \quad (22)$$

Таким образом, приходим к следующей начально-краевой задаче на фиксированном интервале  $r_w < r < r_\infty$ . Требуется найти функции  $u(r, t)$ ,  $p(r, t)$ ,  $r_c(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (14) и следующим краевым условиям. При  $r=r_w$  выполняются три условия: (21), (22) и условие (19), которое допускает запись

$$r = r_w : \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = (\phi - 1)p. \quad (23)$$

При  $r=r_\infty$  выполняются два условия

$$p(r_\infty) = p_\infty, \quad u(r_\infty) = 0. \quad (24)$$

**Асимптотическое решение нестационарной задачи.** Считая параметр  $\alpha$  малым, будем искать решение задачи (14), (21)—(24) в виде асимптотических рядов:

$$u = u^0 + \alpha u^1 + \dots, \quad p = p^0 + \alpha p^1 + \dots, \\ r_c = r_c^0 + \alpha r_c^1 + \dots$$

Функция  $p^0(r, t)$  является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rk_0}{\eta} \frac{\partial p^0}{\partial r} \right) = 0, \quad p^0|_{r=r_\infty} = p_\infty,$$

$$\frac{k_0}{\eta} \left( \frac{\partial p^0}{\partial r} \right) \Big|_{r_w} = \frac{k_c}{r_w \eta_c} \cdot \frac{p^0(r_w, t) - p_w}{\ln(r_w/r_c^0)},$$

где

$$r_c^0 \frac{dr_c^0}{dt} = \frac{\Lambda k_c}{\eta_c} \frac{p^0(r_w, t) - p_w}{\ln(r_w/r_c^0)}, \quad r_c^0|_{t=0} = r_w.$$

Функция  $u^0(r, t)$  удовлетворяет краевой задаче

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^0)}{\partial r} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u^0}{\partial r} \right) - \frac{u^0}{r^2} \right) = \phi \frac{\partial p^0}{\partial r},$$

$$r = r_w : \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^0)}{\partial r} \right) - \phi p^0 + 2\mu \frac{\partial u^0}{\partial r} = -p^0,$$

$$u^0(r_\infty) = 0.$$

Исходя из представлений

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha k_1(x, t) + o(\alpha), \quad k_1 = \\ = \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) \left( U'_0 + \frac{U_0}{x} \right) - \frac{\phi p_w \phi_0(x)}{\mu} = \\ = -\frac{m_1 \phi p_w}{\mu} \ln \frac{x}{x_\infty} + \left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) (m_3 \ln x + m_4) = \\ = -m_1 \left( k_{11} \ln \frac{x}{x_\infty} - k_{12} \right), \\ k_{11} = \frac{4\phi p_w}{(3\lambda + 6\mu)},$$

$$k_{12} =$$

$$= \frac{\left( \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3} \right) \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( p_w / \mu \right) \ln y + \phi \left( \frac{p_w}{\mu} \right) (y^2 - \ln y^2 - 1) / 2}{\left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} + y^2 \right) \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} \right)},$$

$$m_1(t) = \frac{r_w}{p_w} \frac{\partial p^0}{\partial r} \Big|_{r_w},$$

где  $y=r_\infty/r_w$ , можно определить динамику проницаемости пороупругой среды с учетом нарастания глинистой корки. Когда  $p_w > 0$ , в любой момент времени проницаемость монотонно возрастает с удалением от скважины, оставаясь всегда меньше величины  $k_0$  и принимая минимальное значение вблизи скважины. Решая задачу Коши (21), получаем распределение проницаемости в пласте для любого момента времени.

Вычислительные эксперименты показали следующие результаты. На рис. 1 изображено распределение проницаемости в пласте при удалении от стенки скважины вглубь пласта на три различных момента времени. На следующих рисунках показаны основные характеристики фильтрации в условиях напряженного состояния: на рис. 2 — поровое давление, на рис. 3. — эффективное напряжение и на рис. 4 — фронт проникновения.

**Закключение.** В рамках теории пороупругости Био предложена математическая модель формирования зоны проникновения фильтра бурового раствора при бурении скважин в условиях квазистатических напряжений. Модель учитывает рост глинистой корки на стенке скважины и ее влияние как на поровое давление, так и на деформацию пористого скелета.

Аналитическими методами найдены гидродинамические и напряженные характе-

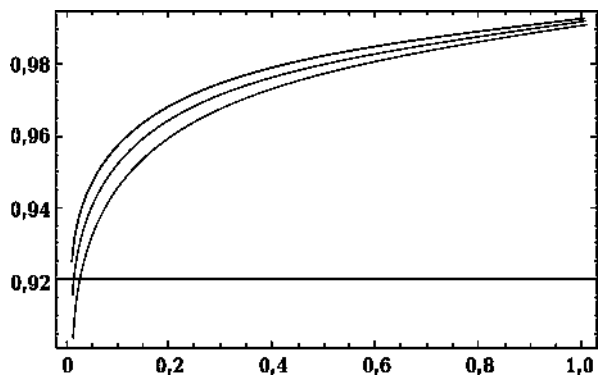


Рис. 1. Безразмерная проницаемость  $k/k_0$  в пороупругой среде в зависимости от  $r/\Delta r$  для трех различных моментов времени с учетом роста глинистой корки при  $p_w - p_\infty = 40$  атм. Кривые снизу вверх соответствует начальному моменту, 0,15 суток и 0,3 суток. Параметры пороупругой среды соответствуют породе «Berea SandStone». Здесь  $r$  — расстояние от центра скважины,  $\Delta r = r_\infty - r_w$ ,  $r_w = 10$  см,  $r_\infty = 900$  см. Корка имеет следующие параметры:  $\Lambda = 0,001$ ,  $k_c/k_0 = 0,1$ ,  $\eta/\eta_c = 1$ ,  $k_0 = 100$  мД,  $\eta = 1,8$  сП. Параметры пороупругой среды выбраны так, что  $\lambda/\mu = 0,51329$ ,  $\mu = 8,95$  ГПа,  $\phi = 0,21$ .

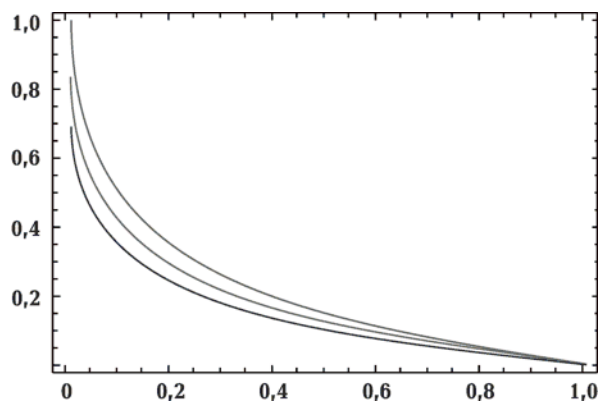


Рис. 2. Безразмерное поровое давление  $p/\Delta p$  в пороупругой среде в зависимости от  $r/\Delta r$  для трех различных моментов времени с учетом роста глинистой корки при  $p_w - p_\infty = 20$  атм. Здесь  $r$  — расстояние от центра скважины,  $\Delta r = r_\infty - r_w$ ,  $p = |p_w - p_\infty|$ ,  $p_\infty = 0$ . Верхняя кривая соответствует начальному моменту, средняя — моменту 0,3 суток, нижняя — 0,8 суток. Корка, пласт и скважина имеют те же параметры, что и на рис. 1.

ристики прискважинной зоны для различных давлений в скважине. Проведено сравнение с результатами для жесткого недеформируемого скелета.

Показано, что напряжения концентрируются вблизи скважины. Это ведет к снижению проницаемости в околоскважинной зоне при превышении скважинного давления над пластовым. Как результат, фронт проникновения в пороупругом пласте движется медленнее, чем в жестком. Это же верно и для корки: в случае упругого пласта глинистая корка растет мед-

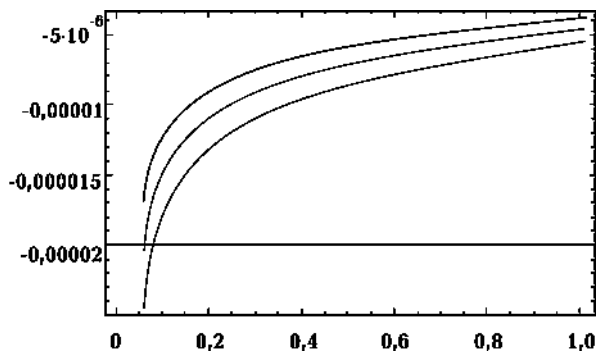


Рис. 3. Главная часть безразмерного приведенного нормального эффективного напряжения  $\tau_{mn}^0/\mu$  в зависимости от  $r/\Delta r$  для разных моментов времени с учетом роста глинистой корки при  $p_w - p_\infty = 20$  атм. Здесь  $r$  — расстояние от центра скважины,  $\Delta r = r_\infty - r_w$ . Нижняя кривая соответствует начальному моменту, средняя — моменту 0,3 суток, верхняя — 0,8 суток. Корка, пласт и скважина имеют те же параметры, что и на рис. 1.

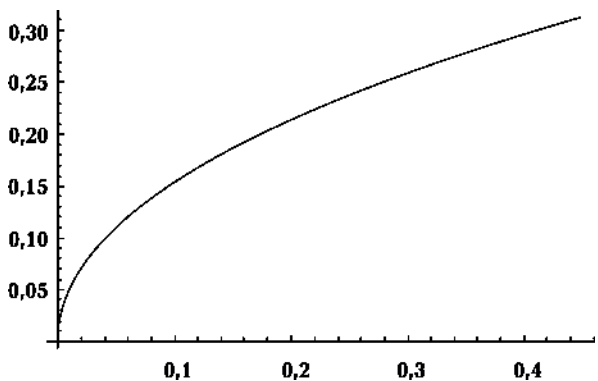


Рис. 4. Безразмерный фронт проникновения  $u/\Delta r$  в зависимости от времени (время в сутках) с учетом роста глинистой корки при  $p_w - p_\infty = 20$  атм. Корка, пласт и скважина имеют те же параметры, что и на рис. 1.

леннее. Вычисления обнаруживают релаксирующую роль корки: за счет нее поровое давление в пласте падает со временем, а абсолютная величина напряжений уменьшается. Упругие свойства коллектора необходимо учитывать, прежде всего, при бурении глубоких скважин, когда превышение скважинного давления над пластовым, особенно вблизи забоя, может быть значительным.

Полученные результаты должны учитываться при разработке интерпретационных схем электрического и электромагнитного каротажа, поскольку установлено значительное влияние напряженного состояния на фильтрацию и, следовательно, пространственное распределение флюидов с разной электропроводностью в околоскважинном пространстве.

Список литературы

- Кашеваров А. А., Ельцов И. Н., Эпов М. И. Гидродинамическая модель формирования зоны проникновения при бурении скважин // Прикл. механика и техн. физика. — 2003. — **44**, № 6. — С. 148—157.
- Шелухин В. В., Ельцов И. Н. Особенности зон внедрения при бурении горизонтальных скважин // Прикл. механика и техн. физика. — 2004. — **45**, № 6. — С. 72—82.
- Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. II // J. Acoustical Soc. Amer. — 1956. — **28**, № 2. — P. 168—191.
- Gassmann F. Über die Elastizität poröser Medien // Viertel. Naturforsch. Ges. — 1951. — **96**. — P. 1—23.
- Palmer I. Permeability changes in coal: analytic modeling // Int. J. Coal. Geol. — 2009. — **77**. — P. 119—126.
- Palmer I., Manssori J. How permeability depends on stress and pore pressure in coal beds: a new model // SPE Res. Eval. Eng. — 1998. — **1** (6). — P. 539—544.
- Shelukhin V. V. Invasion around a horizontal wellbore // Euro. J. Appl. Math. — 2008. — **19**. — P. 41—60.
- Shi J. Q., Durucan S. A model for changes in coalbed permeability during primary and enhanced methane recovery // SPE Res. Eval. Eng. — 2005. — P. 291—299.
- Winkler K. W., Liu H. L., Johnson D. L. Permeability and borehole Stoneley waves: comparison between experiment and theory // Geophysics. — 1989. — **54**. — P. 66—75.