

Особенности динамики сейсмической активности в моделях типа Фитцхью—Нагумо

© В. Б. Спиртус, 2011

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 6 февраля 2010 г.

Представлено членом редколлегии Б. Г. Пустовитенко

Для моделей типа Фитцхью—Нагумо, які застосовують для опису сейсмічної активізації, наведено приклади квазіперіодичної динаміки та існування гомоклінічних траєкторій, що відповідають біжучим імпульсам. Для двомодової бездифузійної моделі отримано динамічну систему рівнянь, що пов'язує амплітуди першої і третьої мод. Як фізичне пояснення явища сейсмічного затихання запропоновано конкуренцію мод.

This paper considers the models of the Fitzhugh—Nagumo type, used to description of seismic activation. The examples of quasi-periodic dynamics and existence of homoclinic trajectories proper to the travelling impulses are resulted. For a twomode nondiffusion model the dynamic system of equations, linking amplitudes of the first and third fashions, is got. As physical explanation of the phenomenon of seismic quiescence competition of fashions is offered.

Введение. Теоретические модели сейсмической активности (СА) должны заключать в себе потенциальные возможности описания надежно установленных в сейсмологии явлений: циклов повторения сейсмических событий определенного ранга [Смирнов, 2003], существования периодов затишья перед многими крупными землетрясениями [Wyss et al., 2004; Соболев, 2008], распространения деформационных волн сейсмогеодинамической активизации — «геонов» [Уломов, 1993].

В развиваемой нами концепции предполагается, что сейсмогенная среда является возбуждаемой, а уединенные волны миграции СА представляют собой автосолитоны [Спиртус, Пустовитенко, 2005; Спиртус, 2005; 2008]. Пространственно-временное развитие сейсмогеодинамических процессов неразрывно связано с изменением напряженно-деформированного состояния среды и энергетического потенциала ее структурных элементов. В базовой модели активной среды с восстановлением в качестве «ингибитора» предлагается использовать степень энергетической открытости среды. Ранее было показано, что в пренебрежении диффузией (точечная модель) можно выделить четыре «такта» сейсмического цикла, один из которых соответствует сейсмическому затишью [Спиртус, 2005]. В работах [Спиртус, Пустовитенко, 2005; Спиртус, 2008] продемонстрировано, что модели типа Фитцхью—Нагумо (ФХН) для одно-

мерного случая способны объяснить наблюдавшееся расщепление потока сейсмичности на две ветви после последнего крупного Крымского землетрясения 1927 г. ($M=6,8$) [Пустовитенко, Пустовитенко, 2002].

Как известно, математическими образами бегущих волн в фазовом представлении являются предельные циклы для волновых трейнов и гомоклинические траектории для волн-импульсов [Холодниок и др., 1991; Березовская, Карев, 1999]. Уединенные волны и волновые цуги (спиральные волны в двумерном случае) — типичная картина для экспериментальных и теоретических исследований возбуждаемой среды [Tyson, Keener, 1988; Cross, Nonenber, 1993]. В экологии трейны и импульсы имеют особое значение, так как соответствующие им режимы интерпретируются как пятна высокой популяционной плотности — «динамические паттерны» [Березовская, Карев, 1999]. Этот наблюдаемый для многих экосистем феномен имеет аналог в сейсмологии: волны сейсмогеодинамической активизации [Уломов и др., 2006]. Заметим, что в последней работе разнонаправленные тренды на некоторых профилях (особенно Кипр — Кавказ) создают квазипериодические осцилляции сейсмической активизации внутри пространственно-временных каналов.

В данной работе применительно к конкретным моделям типа ФХН показаны примеры квазипериодической динамики и существо-

вания гомоклинических траекторий. Также применительно к этим моделям возбудимой среды исследуются физические предпосылки возникновения эффекта сейсмического затихья.

Примеры волновых трейнов и уединенных волн в моделях типа ФХН. Уравнения модели реакция—диффузия имеют вид

$$\begin{aligned} u_t &= f(u, v) + \delta \nabla^2 u, \\ v_t &= g(u, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь предполагается, что диффузией второй переменной можно пренебречь.

В приложении к описанию сейсмической активности u — параметр, отражающий сейсмическую «температуру» на определенном масштабном (энергетическом) уровне, v характеризует степень энергетической открытости или неконсолидированности характерного блока среды [Спиртус, 2008].

Будем рассматривать две модели типа ФХН:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= au - u^3/3 - v, \\ g(u, v) &= \varepsilon(u - \gamma v + \beta), \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u(u-1)(\alpha-u) - v + p, \\ g(u, v) &= \varepsilon(u - \gamma v). \end{aligned} \quad (1б)$$

Исследуем сначала возможность периодических колебаний СА в модели ФХН (1), (1a). Параметр ε , определяющий соотношение временных масштабов полей u, v , выберем как управляющий, остальные считаются фиксированными, без ущерба для общности положим $a=1$. Нетрудно видеть, что число особых точек определяется вещественными корнями кубического полинома. Ограничимся случаем единственной особой точки (u_0, v_0) . Например, если $\gamma=0,5$, координаты особой точки будут

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\left(\left(\sqrt{1+9\beta^2} - 3\beta \right)^{2/3} - 1 \right)}{\left(\sqrt{1+9\beta^2} - 3\beta \right)^{1/3}}, \\ v_0 &= \frac{u_0 + \beta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Покажем с помощью численных расчетов существование предельных циклов в окрестности состояния равновесия, возникающих в результате субкритической бифуркации Хопфа.

Используя анзац $\xi = x - ct$, можно для движущейся со скоростью c системы отсчета получить обыкновенное дифференциальное уравнение

(ОДУ) третьего порядка:

$$u''' - Au'' - \frac{\varepsilon\gamma - 1 + u^2}{\delta} u' + F(u)/(c\delta) = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \varepsilon\gamma/c - c/\delta,$$

$$F(u) = \varepsilon \left(\frac{\gamma}{3} u^3 + (1-\gamma)u + \beta \right).$$

Стандартным способом уравнение (2) можно представить в виде системы трех ОДУ первого порядка:

$$\begin{aligned} u' &= z_1, \\ z_1' &= z_2, \\ z_2' &= Az_2 + \frac{z_1(\varepsilon\gamma - 1 + u^2)}{\delta} - \frac{F(u)}{c\delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) имеет стационарные решения вида $(u_0, 0, 0)$, где u_0 — корень уравнения $F(u)=0$. Нетрудно видеть, что при $\gamma = 0,5$ и $\beta < 0$ корень $u_0 > 0$ уравнения $u^3/6 + u/2 + \beta = 0$ будет единственным.

Рассмотрим линеаризацию системы (3) вблизи этого стационарного состояния. Обозначая $\tilde{u} = u - u_0$, получаем

$$F(\tilde{u}) = \varepsilon\tilde{u} \left(\tilde{u}^2/6 + u_0\tilde{u}/2 + q_2 \right),$$

$$z_2' = q_3\tilde{u} + q_1z_1 + Az_2 + \dots,$$

где многоточие соответствует нелинейным членам,

$$q_1 = \frac{\varepsilon\gamma - 1 + u_0^2}{\delta},$$

$$q_2 = u_0^2/2 - \frac{\beta}{u_0},$$

$$q_3 = \frac{\varepsilon q_2}{c\delta}.$$

Матрица линеаризации G преобразованной системы уравнений в окрестности соответствующей особой точки имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q_3 & q_1 & A \end{pmatrix}.$$

Известно, что качественное поведение фазовых траекторий системы ОДУ зависит от инвариантов, выражающихся через собственные значения матрицы G . Последние находятся из

характеристического уравнения

$$\text{Det}(G - \lambda E) = \lambda^3 - A\lambda^2 - q_1\lambda - q_3 = 0. \quad (4)$$

Бифуркации Хопфа соответствует случай, когда пара комплексно-сопряженных собственных значений становятся чисто мнимыми, при этом $\lambda_1 = A$, $\lambda_{2,3} = \pm Ki$. Отсюда

$$q_1 = \frac{-q_3}{\lambda_1}, \quad (5)$$

$$q_1 = -K^2. \quad (6)$$

Из условия (5) можно получить квадратное уравнение для нахождения параметра ε_H :

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon \left(\frac{7}{3}u_0^2 - \frac{c^2}{\delta} \right) + \frac{4c^2(1-u_0^2)}{\delta} = 0.$$

Численные расчеты показывают, что для этих значений ε_H даже при невыполнении условия (6), но малых $q_1 > 0$ в некоторой окрестности точки u_0 происходят квазипериодические колебания u (рис. 1, 2). В проекции на фазовую плоскость u, u' проявляется жесткая потеря устойчивости, связанная с субкритической бифуркацией Хопфа. Траектории вблизи особой точки плотные, близкие к замкнутым. Вычисленные для расчетных фазовых кривых односторонние спектры Фурье (рис. 1, б, 2, б) соответствуют квазигармоническим сигналам. С ростом скорости c растет амплитуда колебаний u , максимумы спектров смещаются в область низких частот.

Будем считать c скоростью распространения геона [Уломов, 1993], с прохождением которого в определенном регионе связаны вариации СА. Тогда приведенные выше расчеты допускают следующую физическую интерпретацию. Наиболее быстро раскачивается сейсмическая «температура» при имеющемся значительном начальном отклонении от стационарного состояния. Большие колебания u отвечают более высокоскоростным возмущениям и захватывают более крупные масштабы среды. На качественном уровне — это достаточно правдоподобные и осмысленные результаты. Разумеется, в рамках грубого приближения однородной среды трудно рассчитывать высветить какие-либо особо тонкие детали, они могут проявиться только при учете адекватных реальности начально-краевых условий.

Существование бегущих импульсов в системах реакция—диффузия известно достаточно давно [Tyson, Keener, 1988; Cross, Nonenber, 1993]. Для моделей ФХН типа (1), (1б) можно привести некоторые результаты из статьи

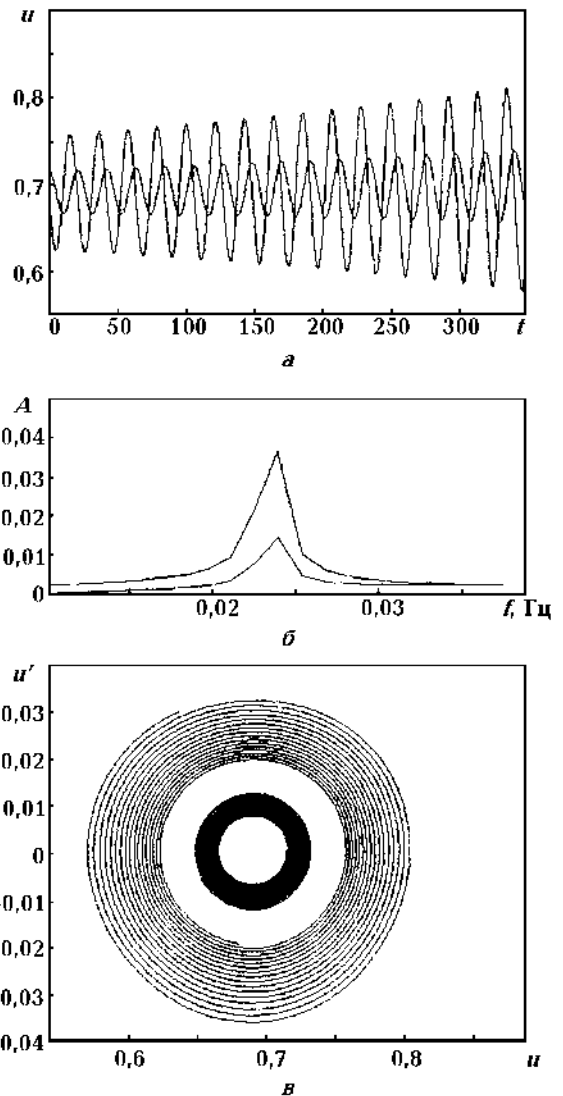


Рис. 1. Квазипериодические колебания u (а), односторонние спектры Фурье (б), фазовый портрет в плоскости u, u' (в) для системы (3) в окрестности особой точки вблизи бифуркации Хопфа. Значения параметров: $\gamma=0,5$; $\beta=-0,4$; $\delta=0,05$; $c=3$.

[Champneys et al., 2007]. В этой работе приняты такие значения параметров:

$$\delta = 5,0; \alpha = 0,1; \gamma = 1,0; \varepsilon = 0,01, \quad (7)$$

при вариации скорости волны s (отличается знаком от c) и параметра p . Последний имеет регулятивную функцию. Для мембран в биофизике — это величина приложенного стимулирующего тока. В приложении к сейсмологии, вероятно, можно ассоциировать параметр p со средней скоростью деформации в регионе, определяющей уровень СА.

Проведенное исследование показало, что

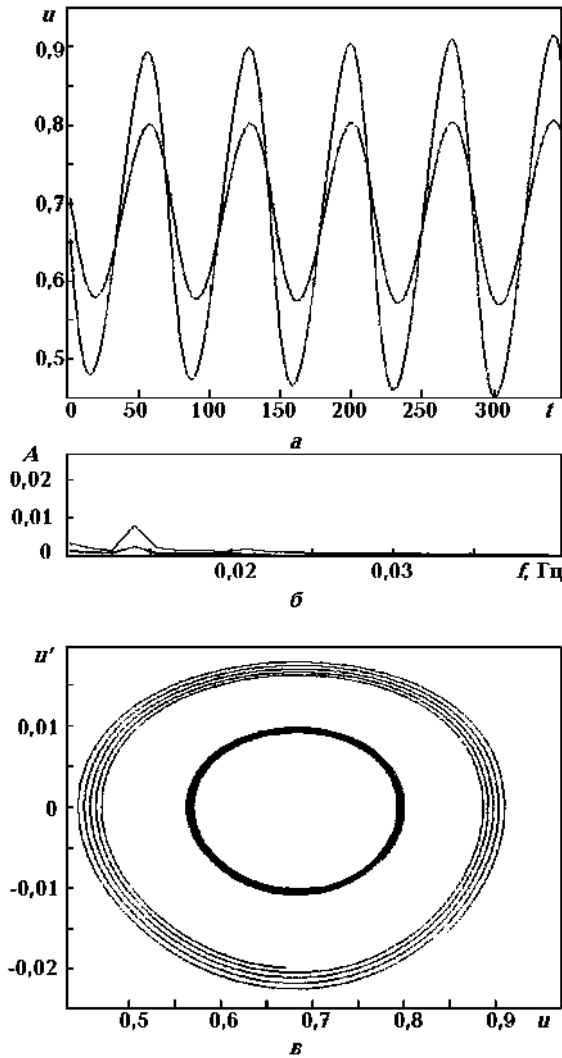


Рис. 2. То же, что и на рис. 1. Значения параметров, $\delta=0,2$, $c=10$.

уединенные импульсы лежат в параметрической плоскости на S -образной кривой слева от U -образной кривой бифуркаций Хопфа (рис. 3, а) [Champneys et al., 2007]. При этом из двух различных скоростей волн только импульсы на верхней, быстрой ветви S -кривой являются устойчивыми. Простейшая гомоклиническая орбита вблизи нижнего конца «банана» (рис. 3, б) может трансформироваться в более сложные формы.

Таким образом, для моделей ФХН типа (1), (16) существуют (при малых значениях параметра p) устойчивые бегущие импульсы, причем скорость их $s = s_{\text{Hom}}(p)$ растет с ростом p до определенного предела.

Возникновение сейсмического затишья в двухмодовой модели типа ФХН. Сейсмическое затишье — это аномальное снижение

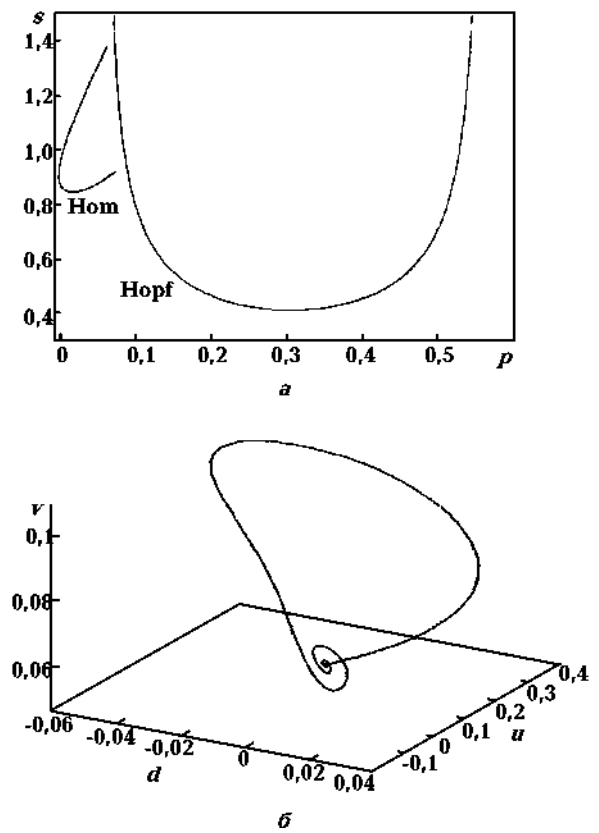


Рис. 3. Бифуркационные кривые для бегущих волн системы уравнений (1), (16) с параметрами (7) (а) и гомоклиническая орбита для $p \approx 0,06$, $s = 0,894386$, соответствующая одиночному импульсу (б) [Champneys et al., 2007].

СА в некоторой пространственно-временной области в период, предшествующий сильному землетрясению. Из многочисленных исследований, посвященных этой тематике, приведем две иллюстрации.

В работе [Wyss et al., 2004] показана реальность эффекта аномального затишья перед двумя крупными землетрясениями на острове Сахалин. Достоверность выводов не вызывает сомнений, поскольку она подтверждена независимыми методами: *RTL* и *Z*-картированием. Затишье наблюдалось в обоих случаях около 2,5 лет в областях порядка сотни километров. На рис. 4 отчетливо видно снижение сейсмичности перед Нефтегорским землетрясением 27 мая 1995 г. с $M_w = 7,6$.

Перед землетрясением с $M_w = 6,4$ 8 июня 2008 г. в западной Греции, если брать период в пять месяцев по сравнению с предшествующим десятилетием в масштабе всей Греции, наблюдалась резкая активизация СА в диапазоне магнитуд $M = 2,8 \div 4,0$ (рис. 5, а). Однако при рассмотрении сравнительно малого под-

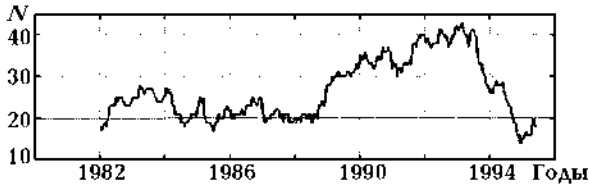


Рис. 4. Число землетрясений в точке (142,9°E, 52,85°N) — середине афтершоковой области Нефтегорского главного толчка 04.1995. Все события расположены в круге с центром в этой точке и удовлетворяют следующим условиям: $K_{\min} \geq 8,0$, $H \leq 80$ км, эпицентральное расстояние $r_i \leq R_{\max} = 2r_0 = 400$ км, $t-t_i \leq T_{\max} = 2t_0 = 2$ года [Wyss et al., 2004].

региона, содержащего очаг землетрясения, в этой же окрестности магнитуд уже налицо спад (рис. 5, б), т. е. проявляется эффект сейсмического затишья [Chouliaras, 2009]. Данный пример показывает важность локализации области исследуемого феномена.

Среди возможных причин сейсмического затишья фигурируют повышение прочности среды, изменение напряженного состояния в очаге вследствие развития неустойчивой деформации, изменение тензора тектонических напряжений из-за крипа на разломе, переход окружающей очаг среды в квазипластическое состояние [Соболев, 2008]. По замечанию Г. А. Соболева «к настоящему времени физические причины, обуславливающие явления

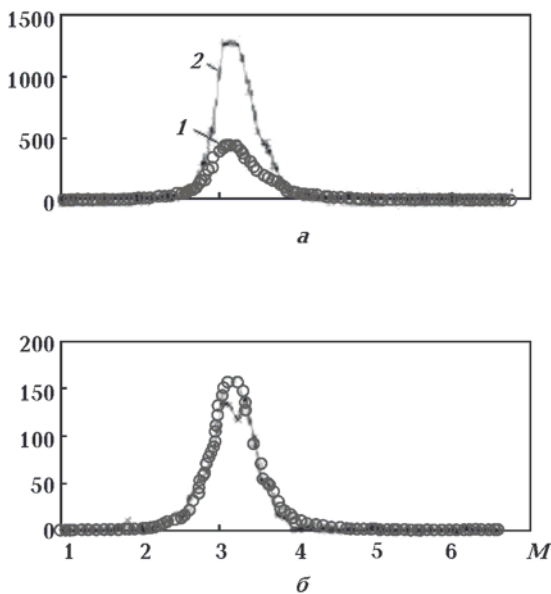


Рис. 5. Графики годового хода сейсмичности (некумулятивные) как функции магнитуды для двух периодов времени: а — для всей Греции (34°—42°N, 19°—29°E), б — подрегиона (37°—39°N, 20°—23,5°E); 1 — период с 1998 по 2008 гг., 2 — за пять месяцев 2008 г. [Chouliaras, 2009].

сейсмического затишья ... обсуждаются только на уровне гипотез» [Wyss et al., 2004].

Модель возбудимой среды, предлагая некоторое «сокращенное описание» напряженно-деформированного состояния сейсмогенной среды, должна на своем языке выражать сущность физических процессов, ведущих к эффекту возникновения сейсмического затишья. Приступая к реализации этого плана, запишем модель ФХН (1), (1а) без диффузии (точечная кинетика) в виде квазилинейной системы ОДУ второго порядка:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{u} + u = F(u, \dot{u}), \quad (8)$$

где F — нелинейная функция, ω_0 — собственная частота нелинейного осциллятора.

Здесь

$$\omega_0^2 = \varepsilon(1 - \gamma a),$$

$$F(u, \dot{u}) = k_1 \dot{u} - k_2 \dot{u}^2 + k_3 u^3 - \alpha_0, \quad (9)$$

$$k_1 = (a - \varepsilon \gamma) \omega_0^{-2}, \quad k_2 = \omega_0^{-2},$$

$$k_3 = \gamma a (1 - \gamma)^{-1} / 3, \quad \alpha_0 = \beta (1 - a \gamma)^{-1}.$$

В одномерном случае рассматривается краевая задача на отрезке $[0, L]$ с условиями Дирихле на его концах, так что решение можно представить в виде ряда Фурье по косинусам с волновыми числами, кратными $k = \pi/L$.

Известно, что в системах, содержащих кубическую нелинейность, наиболее эффективными являются взаимодействия между волнами с соотношением периодов 1:3 [Васильев и др., 1987]. Такого же порядка отношение размеров смежных по крупности блоков в иерархически упорядоченной блоковой среде [Садовский, Писаренко, 1991]. Поэтому для двухмодовой модели типа ФХН можно строить динамическую систему уравнений, связывающую амплитуды первой (A_1) и третьей (A_3) мод. На этом пути ищем решение в виде

$$u = A \cos \Psi (A_1 \cos kr + A_3 \cos 3kr), \quad (10)$$

где фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. Для получения укороченных уравнений используется метод Ван дер Поля [Рабинович, Трубецков, 2000].

Подставив выражение (10) в уравнение (8), для левой части его получим

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{u} + u = -\frac{2AA_1 \sin \Psi}{\omega_0} \cos kr -$$

$$-\frac{2A\dot{A}_3 \sin \Psi}{\omega_0} \cos 3kr + O(\mu^2), \quad (11)$$

где

$$\mu = \frac{\max [F(u, \dot{u})]}{A}.$$

Для расчета правой части уравнения (8) применяются следующие тождества:

$$\begin{aligned} (A_1 \cos kr + A_3 \cos 3kr)^2 &= A_1^2 \frac{1 + \cos 2kr}{2} + \\ &+ A_1 A_3 (\cos 2kr + \cos 4kr) + A_3^2 \frac{1 + \cos 6kr}{2}, \\ (A_1 \cos kr + A_3 \cos 3kr)^3 &= A_1^3 \frac{3 \cos kr + \cos 3kr}{4} + \\ &+ 3A_1^2 A_3 \frac{\cos kr + 2 \cos 3kr + \cos 5kr}{4} + \\ &+ 3A_1 A_3^2 \frac{2 \cos kr + \cos 5kr + \cos 7kr}{4} + \\ &+ A_3^3 \frac{3 \cos 3kr + \cos 9kr}{4}. \end{aligned}$$

Вычисляя выражение $\dot{u}u^2$ в функции F , получаем

$$\dot{u}u^2 = (D_1 \cos kr + D_3 \cos 3kr)(B_0 + B_2 \cos 2kr + B_4 \cos 4kr + B_6 \cos 6kr).$$

Здесь

$$D_1 = A(\cos \Psi \dot{A}_1 - \omega_0 \sin \Psi A_1),$$

$$D_3 = A(\cos \Psi \dot{A}_3 - \omega_0 \sin \Psi A_3),$$

$$B_0 = A^2 \cos^2 \Psi \frac{A_1^2 + A_3^2}{2}, \quad B_2 = \frac{A_1^2}{2} + A_1 A_3,$$

$$B_4 = A_1 A_3, \quad B_6 = \frac{A_3^2}{2}.$$

Отсюда, пренебрегая гармониками кроме первой и третьей, можно найти, что

$$\dot{u}u^2 = G_1 \cos kr + G_3 \cos 3kr,$$

$$\begin{aligned} F &= (k_1 D_1 - k_2 G_1 + k_3 B_1) \cos kr + \\ &+ (k_1 D_3 - k_2 G_3 + k_3 B_3) \cos 3kr - \alpha_0, \end{aligned}$$

где

$$G_1 = D_1 (B_0 + B_2/2) + D_3 (B_2 + B_4/2),$$

$$G_3 = D_3 (B_0 + B_6/2) + D_1 (B_2 + B_4/2),$$

$$B_1 = \frac{3}{4} (A_1^3 + A_1^2 A_3 + 2A_1 A_3^2),$$

$$B_3 = \frac{1}{4} (A_1^3 + 6A_1^2 A_3 + 3A_3^3).$$

Таким образом, результат подстановки выражения (10) в уравнение (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\left(k_1 D_1 - k_2 G_1 + k_3 B_1 + \frac{2A\dot{A}_1 \sin \Psi}{\omega_0} \right) \cos kr + \\ &+ \left(k_1 D_3 - k_2 G_3 + k_3 B_3 + \frac{2A\dot{A}_3 \sin \Psi}{\omega_0} \right) \cos 3kr = \alpha_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Умножим далее обе части уравнения (12) на $\sin \Psi$ и усредним по времени. Тогда нетрудно получить искомую систему амплитудных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_1 \left(\frac{a - \varepsilon \gamma}{2} - \frac{1}{8} (A_1^2 + 3A_1 A_3 + 4A_3^2) \right), \\ \dot{A}_3 &= A_3 \frac{a - \varepsilon \gamma}{2} - \frac{1}{8} (A_1^3 + 4A_1^2 A_3 + A_3^3). \end{aligned} \quad (13)$$

Легко убедиться, что при $q = a - \varepsilon \gamma > 0$ система имеет четыре состояния равновесия, которые являются устойчивыми узлами, причем три из них расположены в нефизической области (рис. 6). Два устойчивых узла расположены на оси A_3 . Эллипс $A_1^2 + 3A_1 A_3 + 4A_3^2 = 4q$ вместе с этой осью представляют две ветви изоклины первого уравнения (13). На пересечении эллипса с изоклиной второго уравнения (кривая третьего порядка) находятся два других устойчивых узла. Как видно из рис. 6, часть фазовых траекторий из физической области $A_1 > 0, A_3 > 0$ заканчи-

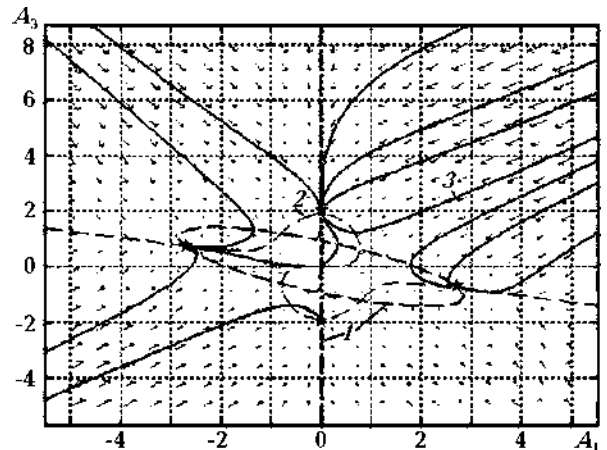


Рис. 6. Фазовый портрет системы амплитудных уравнений (12): 1 — две изоклины первого уравнения, 2 — изоклина второго уравнения, 3 — расчетные фазовые траектории. Звездочками отмечены устойчивые узлы. Поле направлений получено с помощью программы PPLANE6.

вается в устойчивом узле на оси A_3 , другая же часть уходит в нефизическую область, пересекая ось $A_3 = 0$.

Таким образом, двухчастотный режим для данного нелинейного осциллятора не устанавливается, а имеет место **конкуренция мод**, т. е. одна из мод подавляет другую. «Выживание» той или иной моды определяется начальными значениями. Подобный эффект известен как в

теоретической экологии, так и в радиоэлектронике: двухконтурный автогенератор способен в зависимости от параметров работать в режиме генерации одной или двух мод [Рабинович, Трубецков, 2000]. Представляется, что конкуренцию мод можно считать физическим объяснением возникновения сейсмического затишья в рассматриваемой модели возбудимой среды.

Список литературы

- Березовская Ф. С., Кареев Г. П. Бифуркации бегущих волн в популяционных моделях с таксисом // Успехи физ. наук. — 1999. — **169**. — № 9. — С. 1011—1024.
- Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. — Москва: Наука, 1987. — 240 с.
- Пустовитенко Б. Г., Пустовитенко А. А. Миграция очагов землетрясений Черноморского региона // Материалы 5 Севастопольского Междунар. семинара «Фундаментальные и прикладные проблемы мониторинга и прогноза природных, техногенных и социальных катастроф». — Севастополь, 2002. — С. 69—70.
- Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — Москва: Наука, 2000. — 560 с.
- Саговский М. А., Писаренко В. Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. — Москва: Наука, 1991. — 96 с.
- Смирнов В. Б. Оценка длительности цикла разрушения литосферы Земли по данным каталогов землетрясений // Физика Земли. — 2003. — № 10. — С. 13—32.
- Соболев Г. А. Сейсмологические особенности подготовки двух сильных землетрясений // Физика Земли. — 2008. — № 11. — С. 20—30.
- Спиртус В. Б. Исследование геосолитонов в Крымско-Черноморском регионе в моделях типа Фитцхью—Нагумо // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 5. — С. 91—100.
- Спиртус В. Б. Связь эволюции сейсмической активности с кинетикой энергонасыщенности сейсмической среды // Геофиз. журн. — 2005. — **27**, № 3. — С. 512—519.
- Спиртус В. Б., Пустовитенко Б. Г. Описание явления миграции сейсмической активности в рамках моделей возбудимых сред // Докл. НАН Украины. — 2005. — № 3. — С. 120—124.
- Уломов В. И. Волны сейсмогеодинамической активизации и долгосрочный прогноз землетрясений // Физика Земли. — 1993. — № 4. — С. 43—53.
- Уломов В. И., Данилова Т. И., Мегвегева Н. С., Полякова Т. П. О сейсмогеодинамике линейных структур горного обрамления Скифско-Туранской плиты // Физика Земли. — 2006. — № 7. — С. 17—33.
- Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — Москва: Мир, 1991. — 368 с.
- Champneys A. R., Kirk V., Knobloch E., Oldeman B. E., Sneyd J. When Shil'nikov meets Hopf in excitable systems // Siam J. on Appl. Dynamical Systems. — 2007. — **6**. — P. 663—693.
- Chouliaras G. Seismicity anomalies prior to 8 June 2008, $M_w=6,4$ earthquake in Western Greece // Natural Hazards and Earth System Sciences. — 2009. — **9**. — P. 327—335.
- Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. — 1993. — **65**. — P. 851—1112.
- Tyson J. J., Keener J. P. Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review) // Physica D. — 1988. — **32**. — P. 327—361.
- Wyss M., Sobolev G., Clippard D. Seismic quiescence precursors to two M7 earthquakes on Sakhalin Island, measured by two methods // Earth Planets Space. — 2004. — **56**. — P. 725—740.