

# Ответ на комментарий Я. М. Хазана к статье Г. Г. Кулиева «Анализ результатов интерпретации упругих параметров твердого ядра Земли с позиций современной геомеханики»

© Г. Г. Кулиев, 2017

Институт геологии и геофизики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан  
Поступила 2 марта 2017 г.

Выражаю большую благодарность Я. М. Хазану за глубокий анализ моей статьи и комментарий к ней.

В то же время я не согласен с его основным выводом относительно результатов статьи и с некоторыми его суждениями о нелинейной механике деформирования твердых тел.

В моей статье [Кулиев, 2017] на основе неклассического линеаризованного подхода (НЛП) сделаны следующие выводы.

1. Распределение упругих параметров во внутреннем ядре Земли нарушает требование прочности (упругое тело не может выдержать нагрузку  $P \geq \mu$  без разрушения).

2. Упругодеформированный твердый шар в условиях ядра Земли терпит внутреннюю неустойчивость.

3. В упругодеформированном твердом шаре, находящемся в условиях ядра Земли, не могут распространяться упругие волны (в том числе сейсмические) с действительной скоростью.

Таким образом, в данной статье показано, что распределение упругих параметров, соответствуя интегральным критериям, не удовлетворяет фундаментальным требованиям механики деформируемого твердого тела. Кстати, эти требования следуют из начальных

основ теории, которые в геофизической литературе получили название «из первых принципов». В механике [Трусделл, 1975] они связаны с законами сохранения количества движения (из которого следуют три уравнения движения), массы (из которого следуют условия неразрывности) и энергии (из которого следует баланс энергии). Математическое описание механического движения (в рассматриваемом случае — деформирования) замыкается с заданием уравнения состояния среды — одного из основных термодинамических уравнений. Для упругих тел необходимо выполнить некоторые дополнительные требования. В книге [Гузь, 1986] по этому поводу написано следующее: «Для упругого тела основным свойством является обратимость всех происходящих в нем процессов после снятия нагрузок, вызвавших эти процессы. Указанное свойство проявляется, с одной стороны, в полной восстанавливаемости формы тела после снятия нагрузок, а с другой — в полном возвращении энергии, которая была сообщена телу в процессе деформирования, также после снятия нагрузки. Отмеченные два проявления основного свойства упругих тел находят отражение и в двух подходах к мате-

матической формулировке соотношений между составляющими тензоров напряжений и деформаций. Первый подход, истоки которого начинаются от Коши, заключается в формулировке взаимоднозначных соотношений, связывающих составляющие тензоров напряжений и деформаций, с соблюдением тензорной размерности. При этом взаимоднозначность функциональных зависимостей обеспечивает полную восстанавливаемость формы тела после снятия нагрузки. Вторым подходом, истоки которого начинаются от Грина, заключается в представлении потенциальной энергии упругой деформации в виде функции от составляющих тензоров деформаций, которые при нулевых значениях компонентов тензора деформаций обращаются в нуль. Указанное представление обеспечивает полное возвращение энергии при снятии нагрузок». Обычно в рамках первого подхода используется термин «общее упругое тело», во втором подходе — «гиперупругое тело». В моей статье распределение упругих параметров твердого ядра Земли обсуждается в пределах теории гиперупругих тел с применением НЛП.

Считаю необходимым еще раз подчеркнуть, что вопросом обсуждения здесь является несоответствие между существующим общепринятым распределением упругих параметров твердого ядра Земли и основным требованием механики деформируемых твердых тел. Во всех теоретических структурных моделях Земли постулируется, что около 1—3 млрд лет существует твердое внутреннее ядро. Также имеются общепринятые данные о распределении по глубине ядра упругих свойств ее изотропной среды. Именно эта композиция внутреннего ядра в геофизике считается термодинамически

равновесной. В статье автора [Кулиев, 2017] вопросы возможных механизмов формирования такой среды ядра и распределения ее упругих параметров не рассматриваются — для обсуждаемых вопросов они имеют косвенное значение. В статье показано, что данная композиция с точки зрения механики деформируемых твердых тел невозможна.

В комментарии [Хазан, 2017] высказывается мнение о неприменимости «нелинейной упругой механики» (а следовательно, и НЛП) для описания равновесного состояния внутреннего ядра Земли. Прежде всего, отметим, что НЛП получен путем последовательной линеаризации общих нелинейных уравнений и соотношений со строгим соблюдением всех требований общих начал теории (которые приведены выше). В НЛП деформирования описываются различными упругими потенциалами в пределах методов Лагранжа или Эйлера. В моей статье использован метод Лагранжа. Применение НЛП к рассматриваемому кругу задач имеет определенное методологическое преимущество по сравнению с прямым использованием общей нелинейной теории, в том числе теории типа конечных деформаций Берча—Мурнагана [Birch, 1952; Буллен, 1978; Anderson, 1995] и т. п. Прежде всего нелинейная проблема сводится к линейным (неклассическим) и хорошо изученным математическим задачам. Опираясь на единую теоретическую базу, исследуются проблемы прочности, устойчивости (как по геометрическим формоизменениям, так и по «внутренней» неустойчивости) и распространения упругих волн в упругодеформируемых твердых средах. В случае однородных деформированных состояний получаются простые аналитические формулы, в структуре кото-

рых в явном виде выделяются вклады линейных (именно эти составляющие и должны называться упругими параметрами среды) и нелинейных воздействий на количественные показатели параметров упругих свойств (например, численные результаты, приведенные в табл. 3). Используя концепцию «продолжающегося нагружения» и квазистатического подхода [Гузь, 1986], можно исследовать вышеперечисленные задачи в упругопластической, вязкоупругой и других постановках. Более того, удастся строго теоретически определить области применимости полученных результатов (области, в которых определение физико-механических свойств и др. параметров реализуется в тех пределах деформаций, где исходные фундаментальные ограничения механики деформируемого твердого тела соблюдаются). Для решения данной задачи, в случае прямого применения общих нелинейных теорий, помимо математических и вычислительных осложнений возникает необходимость проведения дополнительных адекватных экспериментальных исследований. Такое обстоятельство снижает общность теоретических результатов и создает предпосылки для внесения в результаты дополнительных погрешностей и неопределенностей. Кроме того, не известны эксперименты по длительному деформированию шаровидного твердого тела в условиях, подобных тем, в которых находится внутреннее ядро Земли.

Здесь уместно остановиться на некоторых положениях комментария Я. М. Хазана относительно «нелинейной упругой механики» и, в частности, НЛП. Результаты, показанные на рис. 1, и их объяснение являются далеко не полными и достоверными. В НЛП за начальное состояние деформирования принимается весь процесс

деформирования до рассматриваемого актуального состояния (оно может быть линейным, нелинейным, упругим, пластическим и т. д.). В окрестности актуального состояния, рассматривая малые возмущения (для анализируемых задач нет необходимости исследования процесса деформирования после рассматриваемого актуального состояния), применительно к ним проводится специальная (отличающаяся от классического способа) линеаризация [Гузь, 1986]. Именно данное положение позволяет отнести все сложности изучения нелинейного процесса деформирования в начальное состояние и нелинейную задачу свести к линейным математическим задачам. При этом как упругие, так и нелинейные характеристики деформирования описываются коэффициентами, входящими в основные уравнения в виде **уже известных параметров**. Таким образом, считается, что все вопросы начального состояния известны или хотя бы известны метод их определения. В упомянутом комментарии отмечается, что в «естественном» состоянии упругие модули (наверняка речь идет о модулях упругости второго порядка) зависят от термодинамических параметров и не зависят от деформации. Добавим, что эти модули, в случае упругого деформирования (как на стадии малых, так и на стадии больших деформаций) должны быть также инвариантными относительно геометрии тела и вида напряженного состояния. В отличие от НЛП в многочисленных геофизических исследованиях, которым следует и Я. М. Хазан, процессы нелинейных упругих и вообще нелинейных деформирования описываются параметрами, зависящими от напряжений и деформаций. В частности, некоторым из них присваивается название модулей упру-

гости (например, модуль объемного сжатия  $K$ , модуль сдвига  $G$  и т. д., см. в работе [Anderson, 1995]), зависящих от напряжений и деформаций. Такой подход привел к серьезным осложнениям, порой к неточным выводам [Anderson, 1995]. Относительно определения модулей упругости второго порядка (модули Ламе или модули упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ) в линейной теории упругости [Кулиев, 2017] отмечено следующее: «Физические параметры деформируемых твердых сред — такие, как модули упругости, коэффициент Пуассона, скорости распространения объемных упругих волн и др. в механике определяются при соблюдении конкретных условий [Ляв, 1935; Сегов, 1970]. В классически линейной теории упругости изотропных однородных сред, в рамках которой интерпретируются указанные параметры во всех теоретических моделях Земли, требуется соблюдение условия малости равномерно распределенных однородных деформаций  $\varepsilon \ll 1$  и малости отношения  $P/\mu$  (где  $P$  — параметр нагружения, в частности давления;  $\mu$  — модуль сдвига среды;  $\varepsilon$  — параметр деформаций). Условие равномерного распределения однородных деформаций должно контролироваться также в процессе деформирования конкретных конструкций (в рассматриваемом случае — шара). При решении задач о распределении физико-механических параметров в недрах Земли, в частности в твердом ядре, в первую очередь необходимо добиться одновременного выполнения общепринятых требований механики для сред и конструкций». Поэтому правильный синтез упругих модулей среды из комплекса данных, относящихся к произвольно деформированным состояниям, требует выполнения аккуратной и серьезной научной

работы [Кулиев, 2000; Guliyev et al., 2016]. В НЛП весь процесс деформирования описывается модулями упругости различного порядка. Например, в случае применения упругого потенциала Мурнагана — модулями упругости второго и третьего порядков.

Во всех современных моделях Земли принято, что в ее структуре существует внутреннее твердое ядро в форме шара. Приводятся данные о его упругих параметрах и о распределении давления в нем. В пределах современных моделей комплексы сейсмологических и других геофизических и экспериментальных данных, относящихся к отдельным структурам Земли, включая и ее ядро, обработаны на основе линейной теории упругости (в этом можно убедиться простыми вычислениями данных, приведенных в существующих современных теоретических моделях Земли, например [Anderson, 2007]), которая не в состоянии учесть геодинамические изменения (т. е. деформирования) из-за необходимости выполнения вышеприведенного требования. В комментарии Я. М. Хазана отмечено, что сейсмические волны в твердом ядре проходят на стадии упругого деформирования (как будто каким-то образом сняты указанные во всех теоретических моделях Земли огромные давления и тело в течение 1—3 млрд лет находится там в недеформированном состоянии) и реальное деформирование на их прохождение никакого влияния не имеет. Как будто сейсмическая волна каким-то образом выбирает — когда и где проходить.

На самом деле в моей статье при решении рассматриваемых задач в пределах НЛП в качестве «начального» деформированного состояния приняты без каких-либо изменений данные современных теоретических моделей

Земли относительно твердого ядра в форме шара из изотропной среды (здесь не решается задача о деформировании от «естественного» состояния к «начальному», как утверждает Я. М. Хазан). Поставлен вопрос — может ли существовать твердый деформируемый изотропный шар с указанными распределениями упругих свойств в условиях внутреннего ядра Земли? Получен отрицательный ответ по всем трем требованиям механики деформируемого твердого тела. Причем для решения поставленных задач в данной статье не было никакой необходимости в знании «естественного» состояния и механизма перехода от этого состояния в рассмотренное «начальное» состояние. Тем более что в самой геофизике данный вопрос остается дискуссионным и до сих пор нерешенным. Примечательно, что в комментарии Я. М. Хазана утверждается следующее: *«внутреннее ядро никогда не испытывало и не могло испытывать подобного нагружения»*. Тогда как все данные о «начально» деформированном состоянии в теоретических моделях общеприняты?

Суждение о неравновесности термодинамического состояния деформируемой среды в условиях твердого внутреннего ядра также лишено реального смысла. Интересно, как можно снять давление, проследить за процессом возврата деформирований и сделать выводы о равновесности и неравновесности термодинамического состояния среды твердого ядра Земли в реальных условиях? Здесь, по мнению Я. М. Хазана, помогают результаты современных экспериментальных исследований и численных моделирований, базирующиеся на первичных квантово-механических представлениях. Возможно, на этом пути в ходе дальнейших исследований появятся

более убедительные результаты, но пока эти результаты не позволяют снять сомнения, приведенные в моей статье. Допустим, в условиях ядра Земли путем кристаллизации, согласно экспериментальным данным [Tateno et al., 2010 и др.], образуются огромные массы сплавов железа и формируется твердое ядро. Тогда по законам механики должно выполняться:  $P < \mu$ . Данные, приведенные в современных моделях, противоречат этому условию, что и показано в упомянутой статье. Вот и весь вопрос. Отсюда следует: или твердого ядра нет, или распределения упругих параметров рассчитаны не правильно.

Эксперименты проводятся [Tateno et al., 2010; Niu et al., 2015] с применением метода ударных волн в интервале порядка микросекунды. Размеры искусственно созданных испытуемых образцов не превышают 20 мкм. Полученные в таких скоротечных экспериментах и малых геометрических масштабах данные позволили авторам экспериментов сделать заключение о механизмах перехода упаковки решетки кристаллов из одной формы в другую, характеризующую более плотной упаковкой в термобарических условиях, подобных условиям внутреннего твердого ядра. На основе расчетов, проведенных [Vočadlo, 2007] в пределах численных моделей, утверждается, что распространение упругих волн в железе с указанной кристаллической структурой более или менее хорошо согласуется с сейсмологическими данными (для объяснения проблемы анизотропии сейсмических волн в твердом ядре). Несомненно, эти экспериментальные и численные результаты очень важные. Они дают основание для предположения о возможности образования твердого ядра в процессе кристаллизации плавной среды, но в то же время не

являются убедительным доказательством существования деформируемого твердого внутреннего ядра с радиусом порядка 1200 км (испытываемые микромасштабные образцы должны быть представительными в масштабе всего твердого ядра) и временными масштабами (1—3 млрд лет существования ядра). Вопросы анизотропии распространяющихся в деформируемых твердых средах сейсмических волн с большим периодом никак не могут в достаточной мере объясняться анизотропией микроструктуры (параметр  $c/a$  в работе [Vočadlo, 2007], где  $c$  — элементарное расширение ячейки вдоль гексагональной оси;  $a$  — размер грани шестиугольника) и поведением микросекундных волн. По-видимому, в вопросе сейсмической анизотропии основную роль играет квазианизотропия, связанная с неравномерным деформированием в твердом ядре Земли.

Вопрос определения скоростей упругих волн в деформированных средах аналогичен вопросу определения модулей упругости, который обсуждался выше. Эти скорости обычно определяются в экспериментах на недеформированных образцах. В то же время в рассматриваемых случаях они должны определяться специальным образом из геофизических реальных данных, которые уже подвержены влиянию деформированности среды. Например, в формулах (22), приведенных в моей статье, только первое слагаемое отвечает за скорость материала, а второе отражает вклад нелинейной

деформации. Поэтому параметры в левой части формул (22) нельзя, строго говоря, считать скоростями. В лучшем случае их можно назвать «квази» или «эффективной» скоростью. Поэтому вызывает удивление приведенные в современных моделях Земли данные относительно скоростей распространения сейсмических волн, которые рассчитаны по формулам линейной теории упругости с учетом только упругих данных, относящихся к недеформированному состоянию. В моей статье результаты табл. 3 показывают, что вклады нелинейной деформации значительны.

Наконец, полученные мной результаты никак не отрицают возможность существования твердого ядра Земли. В первую очередь они указывают на то, что в задаче о распределении упругих параметров среды обработка комплекса всевозможных реальных данных не соответствует требованиям механики деформируемого твердого тела. В связи с этим возникает сомнение в достоверности локальных (дифференциальных) распределений упругих и других физико-механических параметров. Поэтому в работе [Кулиев, 2017] сделано предположение (не утверждение!) о том, что возможным выходом может являться коррекция в принятом распределении давления во внутреннем ядре Земли. Более того, такая же коррекция на основе нелинейных теорий деформаций необходима и в распределении упругих и других физико-механических параметров.

### Список литературы

Буллен К. Е. Плотность Земли. Москва: Мир, 1978. 442 с.

Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.

- Кулиев Г. Г. Определение коэффициента Пуассона в напряженных средах. Докл. АН. 2000. Т. 370. № 4. С. 534—537.
- Кулиев Г. Г. Анализ результатов интерпретации упругих параметров твердого ядра Земли с позиций современной геомеханики. *Геофиз. журн.* 2017. Т. 39. №. 1 С. 79—96.
- Ляв А. И. Математическая теория упругости. Москва: ОНТИ, 1935. 676 с.
- Сегов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. Москва: Наука, 1970. 492 с.
- Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Москва: Наука, 1975. 529 с.
- Хазан Я. М. Комментарий к статье Г. Г. Кулиева «Анализ результатов интерпретации упругих параметров твердого ядра Земли с позиций современной геомеханики». *Геофиз. журн.* 2017. Т. 39. № 2. С. 145—149.
- Anderson D. L., 2007. New theory of the Earth. New York: Cambridge: University Press. 385 p.
- Anderson O. L., 1995. Equations of state of solids for geophysics and ceramic science. New York: Oxford University Press, 240 p.
- Birch F., 1952. Elasticity and constitution of the Earth's interior. *J. Geophys. Res.* 57(2), 227—286. doi:10.1029/JZ057i002p00227.
- Guliyev H. H., Aghayev Kh. B., Hasanova G. H., 2016. Determining the Elastic Moduli of the Third Order for Sedimentary Rocks Based on Well-Logging Data. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* 52(6), 836—843. doi:10.1134/S1069351316050062.
- Niu Z.-W., Zeng Z. Y., Cai L.-C., Chen X.-R., 2015. Study of the thermodynamic stability of iron at inner core from first-principles theory combined with lattice dynamics. *Phys. Earth Planet. Int.* 248, 12—19. <http://dx.doi.org/10.1016/j.pepi.2015.09.002>.
- Tateno S., Hirose K., Ohishi Y., Tatsumi Y., 2010. The Structure of Iron in Earth's Inner Core. *Science* 330, 359—361. doi:10.1126/science.1194662.
- Vočadlo L., 2007. Ab initio calculations of the elasticity of iron and iron alloys at inner core conditions: Evidence for a partially molten inner core? *Earth Planet. Sci. Lett.* 254(1-2), 227—232. doi:10.1016/j.epsl.2006.09.046.

## References

- Bullen K. E., 1978. The density of the Earth. Moscow: Mir, 442 p. (in Russian).
- Guz A. N., 1986. Fundamentals of three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Kyiv: Vyshcha shkola, 511 p. (in Russian).
- Kuliev G. G., 2000. Definition of Poisson's ratio in the stressed medium. *Doklady Akademii nauk* 370(4), 534—537 (in Russian).
- Guliyev H. H., 2017. Analysis of results of interpretation of elastic parameters of solid core of the Earth from the standpoint of current geomechanics. *Geofizicheskiy zhurnal* 39(1), 79—96 (in Russian).
- Lyav A. I., 1935. The mathematical theory of elasticity. Moscow: ONTI, 676 p. (in Russian).
- Sedov L. I., 1970. Mechanics of the continuum medium. Vol. 1. Moscow: Nauka, 492 p. (in Russian).
- Truesdell K., 1975. Initial course of rational mechanics of continuum media. Moscow: Nauka, 529 p. (in Russian).
- Khazan Ya. M., 2017. Commentary on the article by H. H. Guliyev «Analysis of results of interpretation of elastic parameters of solid core of the Earth from the standpoint of current geomechanics». *Geofizicheskiy zhurnal* 39(2), 145—149 (in Russian).

- Anderson D. L., 2007. *New theory of the Earth*. New York: Cambridge: University Press. 385 p.
- Anderson O. L., 1995. *Equations of state of solids for geophysics and ceramic science*. New York: Oxford University Press, 240 p.
- Birch F., 1952. Elasticity and constitution of the Earth's interior. *J. Geophys. Res.* 57(2), 227—286. doi:10.1029/JZ057i002p00227.
- Guliyev H. H., Aghayev Kh. B., Hasanova G. H., 2016. Determining the Elastic Moduli of the Third Order for Sedimentary Rocks Based on Well-Logging Data. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* 52(6), 836—843. doi:10.1134/S1069351316050062.
- Niu Z.-W., Zeng Z.-Y., Cai L.-C., Chen X.-R., 2015. Study of the thermodynamic stability of iron at inner core from first-principles theory combined with lattice dynamics. *Phys. Earth Planet. Int.* 248, 12—19. <http://dx.doi.org/10.1016/j.pepi.2015.09.002>.
- Tateno S., Hirose K., Ohishi Y., Tatsumi Y., 2010. The Structure of Iron in Earth's Inner Core. *Science* 330, 359—361. doi:10.1126/science.1194662.
- Vočadlo L., 2007. Ab initio calculations of the elasticity of iron and iron alloys at inner core conditions: Evidence for a partially molten inner core? *Earth Planet. Sci. Lett.* 254(1-2), 227—232. doi:10.1016/j.epsl.2006.09.046.