

Моделювання регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій: практичний аспект

Ю. П. Сумарук¹, Л. М. Янків-Вітковська², Б. Б. Джуман², 2019

¹Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, Київ, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
Надійшла 24 липня 2019 р.

Построение моделей геомагнитного поля и создание геомагнитных карт представляет собой одно из основных направлений геомагнитных исследований. Для построения глобальной модели в основном используют глобальные сферические функции Лежандра, однако для построения регионального магнитного поля такой подход применять нельзя, поскольку в таком случае сферические функции Лежандра теряют свою ортогональность и решение становится нестабильным. В данной работе апробирован метод построения регионального магнитного поля с использованием сферических функций Лежандра порядка действий и целой степени. Такие функции формируют ортогональную по весу систему функций на произвольной сферической трапеции, однако не имеют рекуррентных соотношений, в связи с чем для их вычисления необходимо использовать разложение в гипергеометрический ряд. Областью определения таких функций в сферической системе координат служит сферический сегмент. В качестве входных данных использованы измерения компонент геомагнитного поля B_x , B_y , B_z из 9 геомагнитных обсерваторий, размещенных в Центральной Европе на эпоху 2010. На данной территории есть как региональная, так и локальная составляющая, однако аномальное поле здесь слабоинтенсивное, поэтому в первом приближении можно считать его региональным. Построение региональной модели геомагнитного поля выполнено в рамках процедуры изъятие—вычисление—восстановление. Для этого необходимо сначала вычислить систематическую составляющую компонент с помощью глобальной модели. В качестве систематической составляющей использована глобальная модель International Geomagnetic Reference Field (IGRF) на эту эпоху. Вычислены аномальные значения компонент геомагнитного поля ΔB_x , ΔB_y , ΔB_z и найдены неизвестные коэффициенты модели с помощью метода наименьших квадратов. Для стабилизации решения введен параметр регуляризации Тихонова. Также вычислена дисперсия полученной модели. Приведены стандартные отклонения аномальных значений компонент геомагнитного поля, их модельных значений, а также различия между ними. Выполнена оценка точности полученной модели.

Ключевые слова: региональное магнитное поле, сферические функции, моделирование.

Вступ. Просторовий розподіл геомагнітного поля та його часових змін є одним із найважливіших складових у геофізичних дослідженнях. За допомогою аналітичної моделі можна визначити величини компонент геомагнітного поля у будь-якій точці простору. Для побудови глобальної мо-

делі геомагнітного поля та її подальшого застосування для отримання аномальних значень його компонент здебільшого використовують як базову систему функцій сферичні функції Лежандра [Thébault et al., 2015; Орлюк и др., 2017; Orlyuk et al., 2018]. У свою чергу, для побудови регіо-

нальної моделі геомагнітного поля можна використовувати сферичні функції Лежандра цілого степеня, але дійсного порядку. Існує багато методів, застосування яких ґрунтується на використанні такої системи функцій, наприклад, SCHA [Haines, 1985, 1988; Yankiv-Vitkovska, Dzhuman, 2017], ASHA [De Santis, 1992; Dzhuman, 2014], TOSCA [De Santis, 1991], R-SCHA [Thébault et al., 2006; Thébault, Gaya-Piqué, 2008] та ін. Ці методи застосовують для побудови регіональних магнітних, гравітаційних та іоносферних моделей [Beggan et al., 2013; De Santis, Torta, 1997; Düzgüt, Malin, 2000; Gao, Liu, 2002; Hwang, Chen, 1997].

У статтях [Dzhuman, 2017; Сумарук та ін., 2019] для моделювання регіонального геомагнітного поля запропоновано застосовувати таку базову систему функцій, якій властива ортогональність на довільній сферичній трапеції, що є значною перевагою порівняно зі всіма переліченими вище методами.

Мета статті — апробація запропонованого методу на даних, отриманих з геомагнітних обсерваторій Центральної Європи.

Дані з геомагнітних обсерваторій. Для апробації запропонованого в статті [Сумарук та ін., 2019] алгоритму побудови регіонального магнітного поля Землі як вхідні дані використано виміри компонент геомагнітного поля B_x, B_y, B_z із 9 геомагнітних обсерваторій на епоху 2010 (табл. 1, рис. 1, 2).

Таблиця 1. Компоненти B_x, B_y, B_z із геомагнітних обсерваторій

Назва	Географічні координати, град		B_x , нТл	B_y , нТл	B_z , нТл
	φ	λ			
BEL	51,84	20,79	18941	1701	46301
BFO	48,33	8,32	20926	445	43207
FUR	48,16	11,28	20935	757	43316
HLP	54,61	18,82	17525	1228	46980
KIV	50,72	30,30	19220	2364	46476
LVV	49,90	23,75	19922	1913	45450
NGK	52,07	12,68	18848	836	45412
THY	46,90	17,89	21488	1324	43054
WNG	53,74	9,07	18148	486	45997

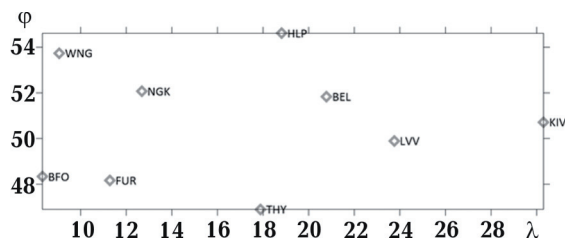


Рис. 1. Схема розміщення геомагнітних обсерваторій.

Обчислення моделі регіонального геомагнітного поля. В місцях розташування обсерваторій є як регіональна, так і локальна складова, однак на території Центральної Європи аномальне поле слабкоінтенсивне, тому у першому наближенні можна вважати його регіональним.

Для моделювання компонент B_x, B_y, B_z геомагнітного поля використаємо процедуру видалення—обчислення—відновлення [Kotzé, 2001; Stening et al., 2008]. Для цього необхідно спершу обчислити систематичну складову компонент за допомогою глобальної моделі. Як глобальну модель геомагнітного поля використано модель International Geomagnetic Reference Field (IGRF) на епоху 2010. Рівняння цієї моделі має вигляд

$$V(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \{ \bar{g}_{nm}(t) \cos(m\lambda) + \bar{h}_{nm}(t) \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (1)$$

де $R = 6371,2$ км, $n_{\max} = 13$. Карти значень компонент $B_{x\text{IGRF}}, B_{y\text{IGRF}}, B_{z\text{IGRF}}$, отриманих за моделлю IGRF на відповідну епоху, показано на рис. 3.

Аномальні значення компонент $\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z$ обчислено за формулами

$$\begin{aligned} \Delta B_x &= B_x - B_{x\text{IGRF}}, \\ \Delta B_y &= B_y - B_{y\text{IGRF}}, \\ \Delta B_z &= B_z - B_{z\text{IGRF}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для моделювання аномальних значень компонент геомагнітного потенціалу ΔB_{xm}

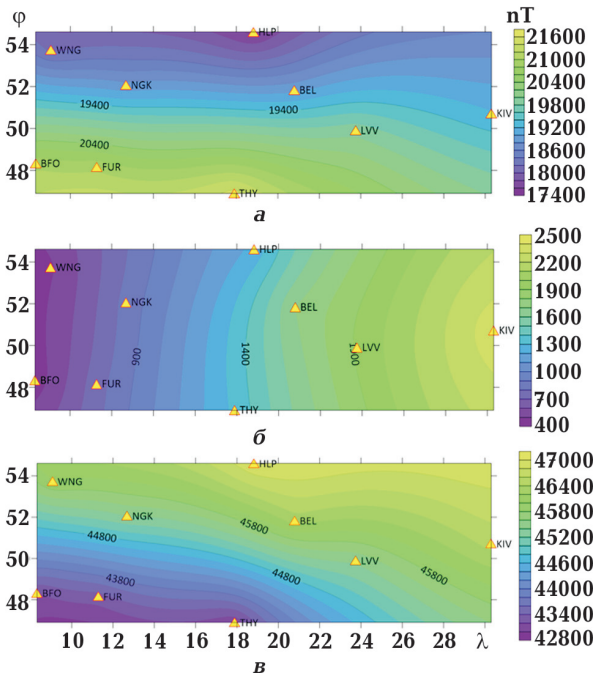


Рис. 2. Карти компонент B_x (а), B_y (б), B_z (в) геомагнітного потенціалу.

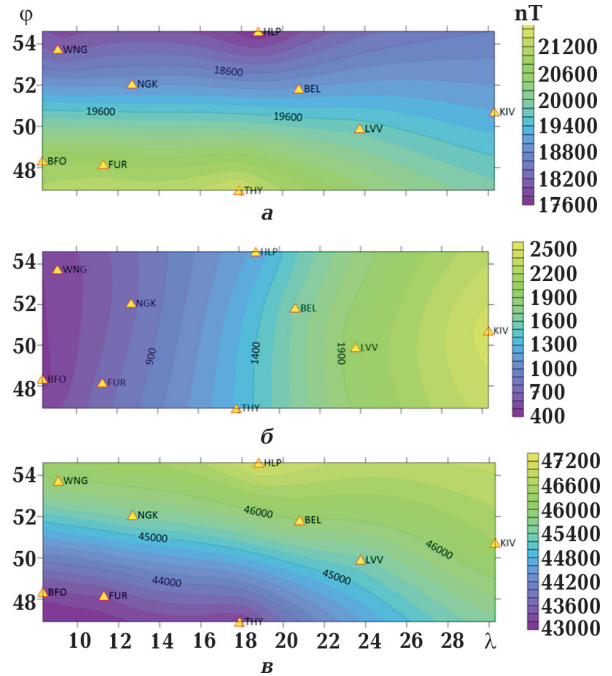


Рис. 3. Карти значень компонент B_{xIGRF} (а), B_{yIGRF} (б), B_{zIGRF} (в) геомагнітного потенціалу.

ΔB_{ym} , ΔB_{zm} використано формули, отримані у публікаціях [Dzhuman, 2018; Сумарук та ін., 2019]:

$$\Delta B_{xm} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} \times \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) \right\} P'_{km}(\theta), \quad (3a)$$

$$\Delta B_{ym} = -\frac{2\pi}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} \times m \left\{ -C_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) + S_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) \right\} \frac{P_{km}(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (36)$$

$$\Delta B_{zm} = -\sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} \times (n_k + 1) \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) \right\} P_{km}(\theta), \quad (3b)$$

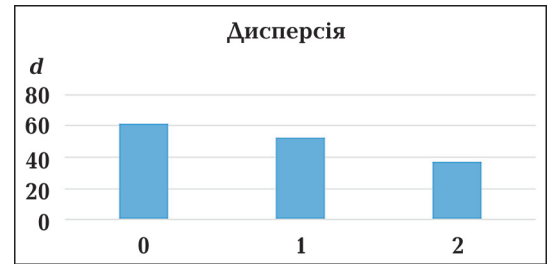


Рис. 4. Дисперсія коефіцієнтів \bar{C}_{km} і \bar{S}_{km} .

$$+ S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right) \left\{ P_{km}(\theta) \right\}, \quad (3b)$$

де λ — довгота; λ_{\min} , λ_{\max} — мінімальне і максимальне значення довгот вершин трапеції відповідно.

Для використання формул (3) встановимо вершини рамки трапеції: $\varphi_{\min} = 46,8^\circ$, $\varphi_{\max} = 54,7^\circ$, $\lambda_{\min} = 8,2^\circ$, $\lambda_{\max} = 30,4^\circ$, знайдемо числа n_k (табл. 2) для відповідної сферичної трапеції [Macdonald, 1900].

За допомогою методу найменших квадратів було отримано невідомі коефіцієнти моделі \bar{C}_{km} і \bar{S}_{km} (табл. 3), причому для стабілізації розв'язку було введено параметр регуляризації Тихонова ($\alpha = 0,01$).

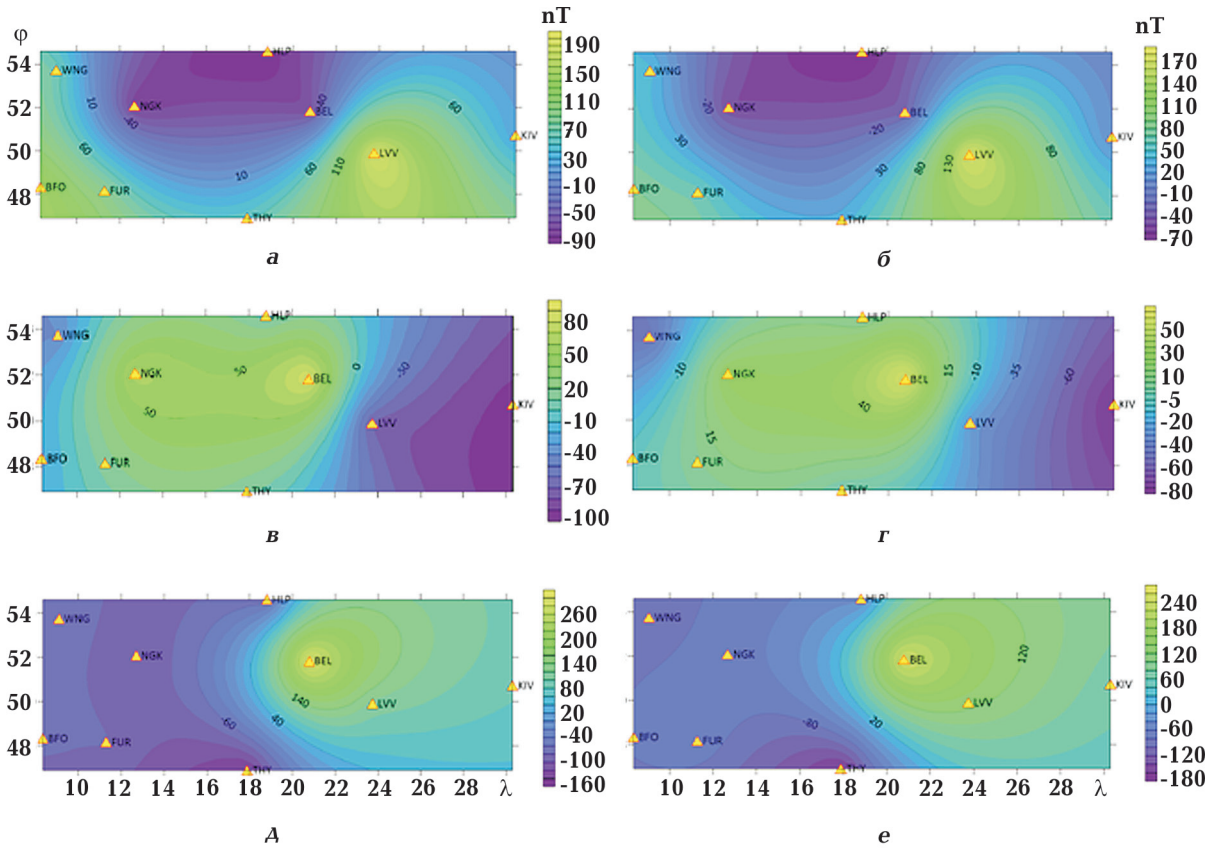


Рис. 5. Карти величин ΔB_x (а), ΔB_y (б), ΔB_z (А) і їх модельних значень ΔB_{xm} (б), ΔB_{ym} (г), ΔB_{zm} (е).

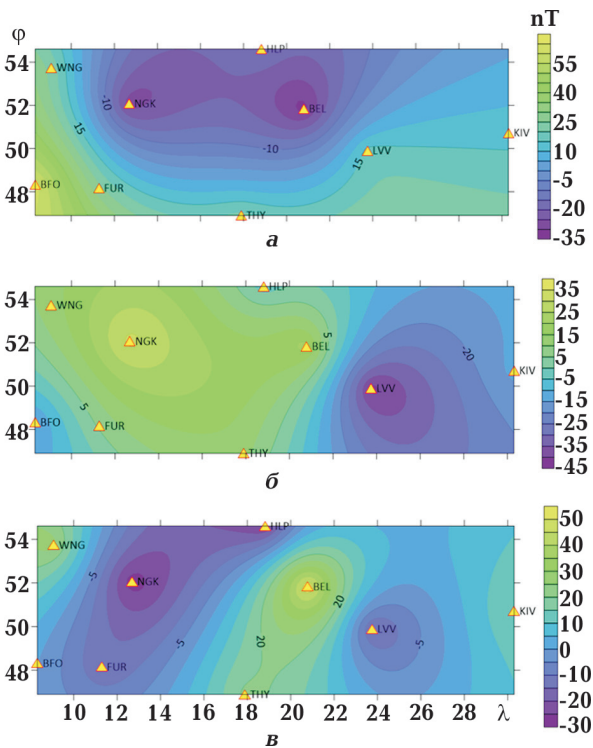


Рис. 6. Різниці $\delta\Delta B_x$ (а), $\delta\Delta B_y$ (б), $\delta\Delta B_z$ (в).

Дисперсію d коефіцієнтів моделі (рис. 4) вираховували за формулою

$$d_k = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^k (\bar{C}_{km}^2 + \bar{S}_{km}^2)}{2k+1}}. \quad (4)$$

За коефіцієнтами \bar{C}_{km} і \bar{S}_{km} (табл. 3) обчислено модельні значення ΔB_{xm} , ΔB_{ym} , ΔB_{zm} (рис. 5). На цьому ж рисунку зображені і карти величин ΔB_x , ΔB_y , ΔB_z .

Порівняння цих даних засвідчує дуже хорошу подібність. Це вказує на те, що запропонований у статті [Сумарук та ін., 2019] метод можна застосовувати для побудови моделі регіонального геомагнітного поля високої роздільної здатності.

Для оцінювання точності отриманої моделі обчислено такі різниці (рис. 6):

$$\begin{aligned} \delta\Delta B_x &= \Delta B_x - \Delta B_{xm}, \\ \delta\Delta B_y &= \Delta B_y - \Delta B_{ym}, \\ \delta\Delta B_z &= \Delta B_z - \Delta B_{zm}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таблиця 2. Власні числа n_k для сферичної трапеції з координатами вершин $\varphi_{\min} = 46,8^\circ$, $\varphi_{\max} = 54,7^\circ$, $\lambda_{\min} = 8,2^\circ$, $\lambda_{\max} = 30,4^\circ$

k/n	0	1	2
0	0,0000	—	—
1	34,381	26,220	—
2	55,082	55,082	43,823

Таблиця 3. Значення коефіцієнтів \bar{C}_{km} і \bar{S}_{km}

k	m	\bar{C}_{km}	\bar{S}_{km}
0	0	-61,053	—
1	0	-1,636	—
1	1	54,749	72,470
2	0	3,034	—
2	1	29,538	75,859
2	2	-13,371	-1,370

Таблиця 4. Основні характеристики отриманих геомагнітних полів

Величина	Значення, нТл		Стандартне відхилення, нТл
	Мінімальне	Максимальне	
ΔB_x	-84	195	101
ΔB_y	-95	89	56
ΔB_z	-144	298	133
ΔB_{xm}	-69	178	78
ΔB_{ym}	-82	67	42
ΔB_{zm}	-165	248	123
$\delta \Delta B_x$	-32	62	30
$\delta \Delta B_y$	-42	32	21
$\delta \Delta B_z$	-28	50	25

Для всіх описаних вище геомагнітних полів обчислено їхні основні характеристики — мінімальне та максимальне значення й стандартне відхилення (табл. 4).

Висновки. Апробовано метод побудови регіонального геомагнітного поля [Сумарук та ін., 2019]. Для цього обчислено модель регіонального геомагнітного поля на територію Центральної Європи за даними з 9 геомагнітних обсерваторій. Обчислено дисперсію визначених коефіцієнтів моделі і стандартне відхилення аномальних зна-

чень компонент геомагнітного поля, їх модельних значень, а також різниць між ними. Стандартне відхилення аномальних значень компонент геомагнітного поля і їх модельних значень різняться в межах 20 %, тоді як стандартне відхилення їх різниць не перевищує 30 %.

Запропонований у статті [Сумарук та ін., 2019] і апробований метод можна застосовувати для побудови моделі регіонального геомагнітного поля високої роздільної здатності.

Список літератури

- Орлюк М. И. Пространственные и пространственно-временные магнитные модели разноранговых структур литосферы континентального типа. *Геофиз. журн.* 2000. Т. 22. № 6. С. 148—165. doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116371.
- Сумарук Ю. П., Янків-Вітковська Л. М., Джуман Б. Б. Моделювання регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій: теоретичний аспект. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 1. С. 180—191. https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i1.2019.158872.

- Beggan, C. D., Saarimaki, J., Whaler, K. A. & Simons, F. J. (2013). Spectral and spatial decomposition of lithospheric magnetic field models using spherical Slepian functions. *Geophysical Journal International*, 193(1), 136—148. <https://doi.org/10.1093/gji/ggs122>.
- De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophysical Research Letters*, 19(10), 1065—1067. <https://doi.org/10.1029/92GL01068>.
- De Santis, A. (1991). Translated origin spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 106(1), 253—263. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb04615.x>.
- De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *Journal of Geodesy*, 71(9), 526—532. <https://doi.org/10.1007/s001900050120>.
- Düzgüt, Z., & Malin, S. R. C. (2000). Assessment of regional geomagnetic field modeling methods using a standard data set: spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 141(3), 829—831. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00099.x>
- Dzhuman, B. B. (2014). Approximation of gravity anomalies by method of ASHA on Arctic area. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (80), 62—68.
- Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (86), 5—10. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.02.005>.
- Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the regional gravitational field using first and second derivative of spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (88), 5—12. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2018.02.005>.
- Gao, Y., & Liu, Z. (2002). Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data. *Journal of Global Positioning Systems*, 1(1), 18—24.
- Haines, G. (1988). Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields. *Computers & Geosciences*, 14(4), 413—447. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(88\)90027-1](https://doi.org/10.1016/0098-3004(88)90027-1).
- Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B3), 2583—2591. <https://doi.org/10.1029/JB090iB03p02583>.
- Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophysical Journal International*, 129(2), 450—460. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb01595.x.
- Kotzé, P. B. (2001). Spherical Cap Modelling of Ørsted Magnetic Field Vectors over Southern Africa. *Earth, Planets and Space*, 53(5), 357—361. <https://doi.org/10.1186/BF03352392>.
- Macdonald, H., (1900). Zeroes of the spherical harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n . *Proceedings of the London Mathematical Society*, 31(1), 264—278. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-31.1.264>.
- Orlyuk, M., Marchenko, A., Romenets, A., & Bakarjieva, M. (2018). Ukrainian Regional Magnetic Map: the results of calculations of the geomagnetic field components for the Epoch 2015. *COBS Journal (Special Issue: IAGA Workshop 2018)*, (5), 40.
- Stening, R. J., Reztsova, T., Ivers, D., Turner, J., & Winch, D. E. (2008). Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia. *Earth, Planets and Space*, 60(12), 1177—1186. <https://doi.org/10.1186/BF03352875>.
- Thébault, E., Finlay, C. C., Beggan, C. D., Alken, P., Aubert, J., Barrois, O., Bertrand, F., ... Zvereva, T. (2015). International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 67, 79. <https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9>.
- Thébault, E., & Gaya-Piqué, L. (2008). Applied comparisons between SCHA and R-SCHA regional modeling techniques. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9(7), Q07005, doi: 10.1029/2008GC001953.
- Thébault, E., Manda, M. & Schott, J. (2006). Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111(B5), 111—113. <https://doi.org/10.1029/2005JB004110>.
- Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2017). Constructing of regional model of ionosphere parameters. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 85, 27—35. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.01.027>.

Modeling of regional magnetic field applying spherical functions: practical aspect

Yu. P. Sumaruk, L. M. Yankiv-Vitkovska, B. B. Dzuman, 2019

Modeling of geomagnetic field and creation of geomagnetic maps is one of the main directions of geomagnetic studies. For constructing global model the global spherical Lejeandre functions are used in most cases, though for constructing regional magnetic field it is impossible to use such an approach, because in this case spherical Lejeandre functions lose their orthogonality, and the solution becomes ambiguous. In this work we tested a method of constructing regional magnetic field applying spherical Lejeandre functions of effective order and integral power. Such functions generate a system of functions orthogonal by weight on an arbitrary spheric trapezium, though they lack recurrent correlations, that is why for their calculation we have to apply an expansion in hypergeometric series. An area of determination of such functions in spherical coordinate system is a spherical segment. As initial data measurements of geomagnetic field components B_x , B_y , B_z from nine geomagnetic observatories situated in the Central Europe by 2010-s were used. There are both regional and local components in this area, though anomalous field here is of weak intensity, therefore we may consider it in the first approximation as a regional one. Regional modeling of geomagnetic field was conducted within the limits of a procedure «Extraction-Calculation-Reconstruction». With this purpose we need first of all to calculate a systematic component of components using the global model. As a systematic component we used a global model International Geomagnetic Reference Field (IGRF) for this epoch. Abnormal values of geomagnetic field components ΔB_x , ΔB_y , ΔB_z were calculated and unknown coefficients of the model were found by the method of the least squares. For stabilization of solution a regularization Tikhonov parameter was introduced. Dispersion of the model obtained was also calculated. Standard deviations of anomalous values of geomagnetic field components, their model values and difference between them have been given. Estimation of precision of the model obtained has been undertaken.

Key words: regional magnetic field, spherical functions, modeling.

References

- Orlyuk, M. I. (2000). Spatial and spatial-temporal magnetic models of different-rank structures of the lithosphere of continental type. *Geofizicheskiy zhurnal*, 22(6), 148—165 (in Russian).
- Orlyuk, M. I., Marchenko, A. V., & Romenets, A. A. (2017). Spatial-temporal changes in the geomagnetic field and seismicity. *Geofizicheskiy zhurnal*, 39(6), 84—105. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116371> (in Russian).
- Sumaruk, Yu. P., Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzuman, B. B. (2019) Modeling of regional magnetic field applying spherical functions: theoretical aspect. *Geofizicheskiy zhurnal*, 41(1), 180—191. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i1.2019.158872> (in Ukrainian).
- Beggan, C. D., Saarimaki, J., Whaler, K. A. & Simons, F. J. (2013). Spectral and spatial decomposition of lithospheric magnetic field models using spherical Slepian functions. *Geophysical Journal International*, 193(1), 136—148. <https://doi.org/10.1093/gji/ggs122>.
- De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophysical Research Letters*, 19(10), 1065—1067. <https://doi.org/10.1029/92GL01068>.
- De Santis, A. (1991). Translated origin spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 106(1), 253—263. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb04615.x>.
- De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap

- harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *Journal of Geodesy*, 71(9), 526—532. <https://doi.org/10.1007/s001900050120>.
- Düzgüt, Z., & Malin, S. R. C. (2000). Assessment of regional geomagnetic field modeling methods using a standard data set: spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 141(3), 829—831. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00099.x>
- Dzhuman, B. B. (2014). Approximation of gravity anomalies by method of ASHA on Arctic area. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (80), 62—68.
- Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (86), 5—10. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.02.005>.
- Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the regional gravitational field using first and second derivative of spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (88), 5—12. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2018.02.005>.
- Gao, Y., & Liu, Z. (2002). Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data. *Journal of Global Positioning Systems*, 1(1), 18—24.
- Haines, G. (1988). Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields. *Computers & Geosciences*, 14(4), 413—447. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(88\)90027-1](https://doi.org/10.1016/0098-3004(88)90027-1).
- Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B3), 2583—2591. <https://doi.org/10.1029/JB090iB03p02583>.
- Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophysical Journal International*, 129(2), 450—460. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb01595.x.
- Kotzé, P. B. (2001). Spherical Cap Modelling of Ørsted Magnetic Field Vectors over Southern Africa. *Earth, Planets and Space*, 53(5), 357—361. <https://doi.org/10.1186/BF03352392>.
- Macdonald, H., (1900). Zeroes of the spherical harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n . *Proceedings of the London Mathematical Society*, 31(1), 264—278. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-31.1.264>.
- Orlyuk, M., Marchenko, A., Romenets, A., & Bakarjieva, M. (2018). Ukrainian Regional Magnetic Map: the results of calculations of the geomagnetic field components for the Epoch 2015. *COBS Journal (Special Issue: IAGA Workshop 2018)*, (5), 40.
- Stening, R. J., Reztsova, T., Ivers, D., Turner, J., & Winch, D. E. (2008). Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia. *Earth, Planets and Space*, 60(12), 1177—1186. <https://doi.org/10.1186/BF03352875>.
- Thébault, E., Finlay, C. C., Beggan, C. D., Alken, P., Aubert, J., Barrois, O., Bertrand, F., ... Zvereva, T. (2015). International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 67, 79. <https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9>.
- Thébault, E., & Gaya-Piqué, L. (2008). Applied comparisons between SCHA and R-SCHA regional modeling techniques. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9(7), Q07005, doi: 10.1029/2008GC001953.
- Thébault, E., Mandeau, M. & Schott, J. (2006). Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111(B5), 111—113. <https://doi.org/10.1029/2005JB004110>.
- Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2017). Constructing of regional model of ionosphere parameters. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 85, 27—35. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.01.027>.