

# Параметрический резонанс в ультрахолодной ридберговской плазме под влиянием акустической ВОЛНЫ

*В. М. Рылюк, А. М. Кузьмина, М. И. Скипа, 2020*

Отделение гидроакустики Института геофизики им. С. И. Субботина  
НАН Украины, Одесса, Украина

Поступила 23 июля 2020 г.

Рассмотрена слабоионизованная ультрахолодная ридберговская плазма, находящаяся под воздействием акустической волны терагерцевого диапазона. Влияние акустической волны на ленгмюровские колебания ридберговской плазмы описывается с помощью гидродинамического подхода. Исследован механизм влияния акустической волны на ленгмюровские колебания в такой плазме, заключающийся в рассеянии электронов на нейтральных атомах, совершающих колебания в высокочастотном акустическом поле. Для вычисления сечения рассеяния электронов на атомах, совершающих высокочастотные колебания в поле терагерцевой акустической волны, применяется унитарное преобразование Крамерса—Хеннбергера в уравнении Шредингера. На этой основе показывается глубокая аналогия между задачей о рассеянии электрона в поле внешней электромагнитной волны на стационарном атоме и проблемой рассеяния электрона на атоме, совершающего колебания во внешнем акустическом поле. Численные расчеты демонстрируют осцилляционный характер сечения рассеяния электрона на ридберговском атоме, колеблющемся в высокочастотном акустическом поле. В рамках выбранной гидродинамической модели, ввиду временной зависимости сечения рассеяния электронов на атомах плазмы, изменение электронной плотности в такой системе описывается хорошо известным в математической физике уравнением Магье. На основе этого уравнения теоретически показана принципиальная возможность возникновения параметрического резонанса в виде раскачки ленгмюровских колебаний в такой системе. Указаны условия возникновения резонанса в ридберговской плазме, инициированного высокочастотной акустической волной.

**Ключевые слова:** ридберговская плазма, рассеяние, параметрический резонанс, акустическая волна.

**Введение.** Исследования процессов взаимодействия акустического излучения с волновыми полями в классических и неклассических средах и сопутствующих им резонансных эффектов далеко не новые, но перспективные направления для решения как фундаментальных, так и прикладных задач. Настоящая статья — вторая после [Кузьмина и др., 2016] — продолжение теоретических исследований таких процессов.

В последнее время наблюдается интерес к исследованиям различных гидродинамических явлений в плазме газового разряда.

Это, в частности, связано с применением плазмы в аэродинамических и аэрокосмических приложениях [Ganguly et al., 1997; Roth et al., 2000]. В частности, речь идет о попытках управлять с помощью мощных звуковых волн процессами конденсации в атмосфере и использовании при этом явления усиления звука в неравновесных колебательно-возбужденных газах.

Эксперименты показывают, что прохождение звуковой волной плазменных образований может приводить к значительному изменению ее амплитуды. Эффекты ослабления и усиления акустиче-

ского сигнала в слабоионизованной плазме наблюдались в экспериментах по газовому разряду [Александров и др., 1990; Soukhomlinov et al., 2005]. В работе [Soukhomlinov et al., 2007] теоретически исследованы уравнения распространения акустических волн в плазме, а также условия их усиления. Данная статья посвящена вопросу о влиянии акустической волны на ленгмюровские колебания в слабоионизованной ридберговской плазме.

В работах [Killian et al., 1999, 2001; Kulin et al., 2000] изучалась плазма, состоящая из  $5 \cdot 10^6$  метастабильных атомов Хе (уровень  $6S [3/2]_2$ , время жизни 43 с). Затем эти атомы замедляли с использованием зеемановской техники, собирали в магнитооптическую ловушку и радиационно охлаждали на переходе  $6S [3/2]_2 - 6P [5/2]_3$  ( $\lambda \approx 882$  нм) до температуры 100 мкК. Для создания плазмы больше 20 % атомов было фотоионизовано в течение 10 нс, а их максимальная плотность достигала  $5 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. В свою очередь, максимальная концентрация заряженных частиц составила  $n = n_e + n_i = 2 \cdot 10^9$  см<sup>-3</sup>. Заметим, что полученная плазма является неидеальной с параметром неидеальности  $\Gamma = e^2 n^{1/3} / (k_B T)$  больше единицы. Так, при  $T = 0,1$  К,  $n = 2 \cdot 10^9$  см<sup>-3</sup> имеем  $\Gamma = 21$ , т. е. электроны в этой плазме невырождены. Действительно, отношение тепловой длины волны де Бройля электрона  $\lambda_e$  к среднему расстоянию между частицами (параметр вырождения) при  $T = 0,1$  К и  $n = 2 \cdot 10^9$ :  $\lambda_e n^{1/3} = 0,2 \cdot 10^{-2} \ll 1$ . Плазма Хе, полученная в экспериментах [Killian et al., 1999, 2001], состоит из однозарядных ионов Хе, электронов и высоковозбужденных ( $k > 100$ ) водородоподобных состояний Хе. Эти состояния называют ридберговскими. В работе [Robinson et al., 2000] была получена плазма щелочных металлов Rb и Cs путем возбуждения газа холодных атомов ( $T \sim 10^{-4}$  К) на ридберговский уровень энергии  $k \sim 25$  и добавлением 1 % возбужденных атомов при  $T \sim 300$  К. Отметим, что в работах [Killian et al., 1999, 2001; Robinson et al., 2000] были обнаружены необычные физические свойства ридберговской плаз-

мы. В частности, это касается аномально-го замедления рекомбинации, которое составляло  $\sim 100$  мкс.

**Сечение рассеяния.** Для рассмотрения вопроса о влиянии акустического поля на ленгмюровские колебания электронной компоненты в слабоионизованной ридберговской плазме примем следующую модель. Будем пренебрегать электрон-электронными столкновениями по сравнению с электрон-ионными, а также по сравнению со столкновениями электронов с нейтральными частицами (атомами). Это — случай так называемой лоренцевой плазмы. Ввиду малости скоростей ионов по сравнению со скоростями электронов в первом приближении можно ими пренебречь, т. е. считать ионы неподвижными, а их распределение — заданным. Атомы же, напротив, находятся под воздействием акустической волны и совершают высокочастотные колебания. Физический механизм влияния акустической волны на ленгмюровские колебания в плазме заключается в рассеянии электронов на атомах, совершающих акустические колебания. Так, если  $U(\mathbf{r})$  — исходный потенциал взаимодействия электрона с атомом, то эффективный потенциал взаимодействия электрона при его рассеянии на атоме, совершающем акустические колебания, будет зависеть от времени по закону

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = U \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) \right|, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота падающей на плазму акустической волны,  $\mathbf{r}_0$  — амплитуда колебаний атома под воздействием акустической волны и  $\beta$  — коэффициент ослабления/усиления акустической волны в плазме.

Влияние акустической волны на ленгмюровские колебания в рамках указанной модели удобно описывать с помощью гидродинамического подхода. С этой целью рассмотрим двухжидкостную гидродинамическую модель ридберговской плазмы, в которой ионы заморожены (электронейтральный фон), а электроны рассеиваются на неподвижных ионах и атомах, колеблющихся под действием акустической волны частоты  $\omega$ . Запишем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

и уравнение Эйлера в линейном приближении:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} - v_{ei}^{(0)} \mathbf{v} - v_{ea} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_n), \quad (3)$$

где  $n_e$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $e$  ( $e > 0$ ) и  $m$  — плотность, скорость, заряд и масса электрона,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле в плазме,  $\mathbf{v}_n$  — скорость атомов,  $v_{ei}^{(0)}$  и  $v_{ea}$  — частоты столкновений электронов с ионами и электронов с атомами соответственно. Частоты столкновений  $v_{ei}^{(0)}$  и  $v_{ea}$  связаны стандартным образом с соответствующими транспортными сечениями рассеяния  $\sigma_{ei,t}^{(0)}$  и  $\sigma_{ea,t}$ :

$$v_{ei}^{(0)} = n_i v \sigma_{ei,tr}^{(0)}, \quad v_{ea} = n v \sigma_{ea,tr}, \quad (4)$$

где  $n_i$  и  $n$  — концентрации ионов и атомов в плазме. В свою очередь, транспортное сечение связано с обычным сечением рассеяния с помощью соотношения

$$\sigma_{tr} = \int [1 - \cos(\theta)] d\sigma(\theta), \quad (5)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния. Особенность уравнения (3) в том, что  $v$ , отличие от частоты  $v_{ei}^{(0)}$ , частота столкновений электронов с атомами  $v_{ea}$ , вообще говоря, зависит от времени  $t$ . В самом деле, рассмотрим ридберговскую плазму в описанных экспериментах, когда температура электронов  $T \sim (0,1 \div 1)$  К, а плотность атомов  $n \sim 10^{10}$  см<sup>-3</sup>. Если частота акустической волны  $\omega \sim 10^{10} \div 10^{11}$  Гц, то отношение времени пролета электрона при столкновении с атомом к периоду акустических колебаний будет величиной порядка  $2 \div 60$ , т. е. эффективный потенциал (1) успевает много раз измениться за время пролета электрона при столкновении с атомом. Следовательно, для решения уравнения (3) необходимо знать сечение рассеяния электрона на произвольном потенциале, зависящем от времени. Для его нахождения обратимся к теории рассеяния.

Запишем уравнение Шредингера для электрона, движущегося в поле линейно поляризованной электромагнитной волны

частоты  $\omega$  и амплитуды  $\mathbf{F}$  и в произвольном потенциале  $U(\mathbf{r})$ , не зависящем от времени:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta + U(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \mathbf{F} \cos(\omega t) \right) \times \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Далее перейдем в систему координат, связанную с колеблющимся в поле волны электроном (в так называемую систему Крамерса), с помощью унитарного преобразования Крамерса—Хеннбергера:

$$\Psi_K(\mathbf{r}, t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathbf{r} \mathbf{F} \cos(\omega t') dt' \right\} \times \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Тогда уравнение Шредингера (6) в системе Крамерса запишется в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_K(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta + U \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{F}}{\omega^2} \cos(\omega t) \right) \right] \times \Psi_K(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Уравнение (8) выглядит также, как и уравнение Шредингера для электрона, движущегося в эффективном потенциале (1) нейтрального атома, колеблющегося во внешнем акустическом поле той же частоты  $\omega$  при  $\beta = 0$  (если пренебречь затуханием акустической волны) и  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F} / \omega^2$ .

Хотя физическая природа этих полей совершенно различна, электромагнитное поле действует на заряды плазмы, а акустическое — на нейтральные частицы. Математически обе эти задачи эквивалентны (унитарно-эквивалентны). Это дает нам возможность воспользоваться хорошо известной формулой Кролла—Ватсона для сечения рассеяния электрона в поле электромагнитной волны [Kroll, Watson, 1973] в первом борновском приближении. В данном случае оно применимо, поскольку энергия взаимодействия электрона с атомом мала ( $\sim 0,1$  эВ). Тогда дифференциальное сечение неупругого рассеяния на эффективном потенциале (1) при излучении или поглощении  $n$  квантов с частотой  $\omega$  в телесный угол  $d\Omega$  как отношение потока в

рассеянной волне к падающей может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma_{ea}(\theta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\omega)}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\omega}(\mathbf{r}, t)}{d\Omega}, \quad (9)$$

где

$$\frac{d\sigma(\omega)}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4k} \sum_{n=-n_0}^{\infty} K_n(\omega) J_n^2[\mathbf{q}_n(\omega)\mathbf{r}_0] \times \times |U(\mathbf{q}_n(\omega))|^2 \quad (10)$$

есть часть сечения рассеяния, не зависящая от времени, а

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\omega}(\mathbf{r}, t)}{d\Omega} = & \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4k} \sum_{n \neq m}^{\infty} K_m(\omega) J_n[\mathbf{q}_n(\omega)\mathbf{r}_0] \times \\ & \times J_m[\mathbf{q}_m(\omega)\mathbf{r}_0] \times \\ & \times \operatorname{Re} \left\{ i^{n-m} e^{i(n-m)\omega t + i(K_n(\omega) - K_m(\omega))r} \times \right. \\ & \left. \times U(\mathbf{q}_n(\omega)) U^*(\mathbf{q}_m(\omega)) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

в общем случае зависит не только от времени, но и от координаты. Действительно, если сравнить среднее расстояние  $\mathbf{r}$  между атомами с характерной длиной  $l$  изменения сечения рассеяния (при указанных условиях), которая, согласно формуле (11), есть  $l \sim \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ , получим  $r/l \sim 60 \div 200$ . В формулах (10) и (11)  $\mathbf{k}$  — волновой вектор рассеивающегося электрона с энергией  $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ ,  $n_0 = [n_{\min}]$  ( $n_{\min} = mv_T^2 / (2\hbar\omega)$ ),  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $J_n$  — функция Бесселя порядка  $n$ ,  $U(\mathbf{q}_n(\omega))$  — фурье-образ потенциала взаимодействия электрона с атомом при  $\beta = 0$ , а вектор  $\mathbf{q}_n(\omega) = K_n(\omega) \times \times \mathbf{n} - k\mathbf{n}$  с абсолютной величиной ( $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n(\omega) = & \sqrt{(K_n(\omega) - k)^2 + 4K_n(\omega)k \sin^2(\theta/2)}, \\ K_n(\omega) = & \sqrt{k^2 + \frac{2m}{\hbar}n\omega}. \quad (12) \end{aligned}$$

**Численные результаты.** На рис. 1 и 2 изображено отношение

$$\sigma_{\text{rel}} = \frac{d\sigma_{ea}(\omega, r_0)}{d\sigma_{ea}(0, 0)} \quad (13)$$

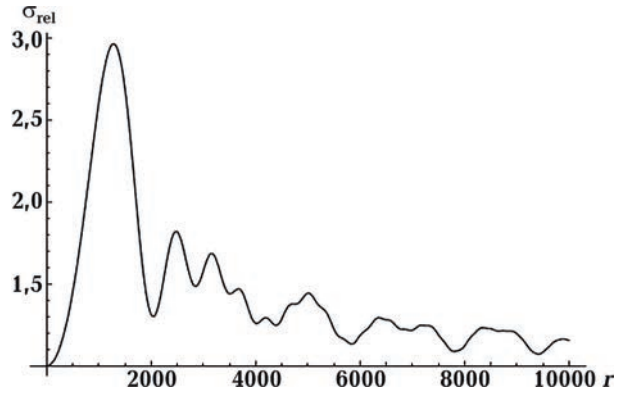


Рис. 1. Величина  $\sigma_{\text{rel}}$  в зависимости от  $r$  при  $\omega = 0,16 \cdot 10^{11}$  Гц,  $T = 0,1$  К.

Fig. 1. Value  $\sigma_{\text{rel}}$  vs  $r$  at  $\omega = 0.16 \cdot 10^{11}$  Hz,  $T = 0.1$  K.

дифференциальных сечений электрон-атомного рассеяния (10) на нулевой угол в зависимости от  $r = r_0/a$  ( $a$  — борковский радиус) при  $\omega = 10^{11}$  Гц,  $T = 0,1$  К и  $\omega = 10^{10}$  Гц,  $T = 10$  К для водородоподобного атома с валентным электроном на орбите  $\{m = l = 0, n = 25\}$ .

Оба графика демонстрируют осцилляционный характер сечения рассеяния электрона на ридберговском атоме, колеблющемся в высокочастотном акустическом поле. При этом амплитуда колебаний уменьшается с межчастичным расстоянием, но не исчезает вовсе. Как видно из рис. 1 и 2, в первом случае максимум

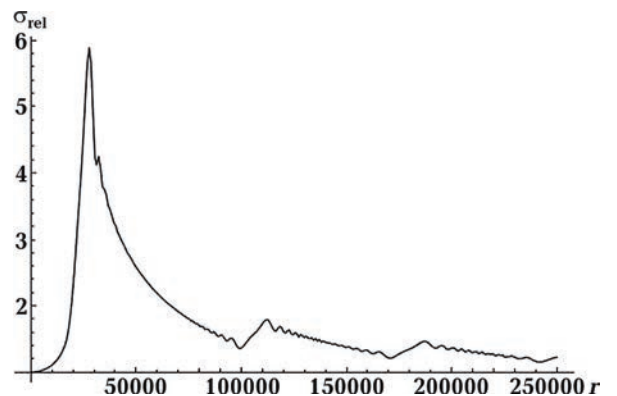


Рис. 2. Величина  $\sigma_{\text{rel}}$  в зависимости от  $r$  при  $\omega = 0,16 \cdot 10^{10}$  Гц,  $T = 10$  К.

Fig. 2. Value  $\sigma_{\text{rel}}$  vs  $r$  at  $\omega = 0.16 \cdot 10^{10}$  Hz,  $T = 10$  K.

сечения рассеяния находится в районе  $500 \text{ \AA}$ , в то время как во втором случае максимум несколько больше и находится в районе  $12\,000 \text{ \AA}$ . Заметим, что на сегодняшний день в ряде экспериментов [Mante et al., 2010; Adak et al., 2015; Sandeep et al., 2018] в сверхплотной лазерной плазме и в полупроводниковых квантовых точках успешно генерируются акустические поля с частотами  $\omega \sim 10^{12} \text{ Гц}$ .

На рис. 3 изображена функция

$$\sigma(R, t) = \frac{d\sigma_\omega(\mathbf{r}, t)}{d\sigma_{ea}(0, 0)}, \quad (13a)$$

где  $R = |\mathbf{r}|/a$  и  $d\sigma_\omega(\mathbf{r}, t)$  определена уравнением (11) при  $\omega = 10^{10} \text{ Гц}$ ,  $T = 0,1 \text{ К}$  и  $r = 10^5$ .

**Слабоионизированная ридберговская плазма в поле акустической волны.** Далее рассмотрим одномерную модель слабоионизированной ридберговской плазмы в поле акустической волны, когда можно пренебречь поперечными размерами по сравнению с продольными. Плотность электронов под действием слабого электрического поля будет изменяться согласно  $n_e = n_e^{(0)} + \delta n_e$  ( $\delta n_e \ll n_e^{(0)}$ ), а скорость атомов в поле акустической волны считается заданной:  $v_a = v_0 \exp\{-\beta t + i(k_a x - \omega t)\}$ . Кроме того, положим, что  $v \sim v(t) \exp\{ik_e x\}$  и ради простоты будем считать, что  $v_{ea} \sim v_{ea}(t) \exp\{ik_s x\}$ , где  $k_e = m v_T / \hbar$  ( $v_T = \sqrt{k_B T / m}$ ) и  $k_s = \sqrt{2 m \omega / \hbar}$ . При заданных условиях в

плазме  $k_e \sim k_s = m v_T / \hbar$ . Уравнение непрерывности (2) записываем в виде

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + i n_e^{(0)} k_e v = 0. \quad (14)$$

Применив операцию  $\text{div}$  к обеим частям равенства (3), получим

$$i k_e \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\omega_{pe}^2}{n_e^{(0)}} \delta n_e - i k_e v_{ei}^{(0)} v - i (v_{ea}^{(0)} + v_{ea}) \times \\ \times (k_e v - k_a v_a) - i k_s v_{ea} (v - v_a), \quad (15)$$

где  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e^{(0)} e^2 / m}$  — электронная плазменная частота. Решая совместно уравнения (14) и (15), получаем уравнение, описывающее изменение плотности электронов плазмы под воздействием акустической волны:

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \left[ v_{ei}^{(0)} + v_{ea}^{(0)} + \left(1 + \frac{k_s}{k_e}\right) v_{ea} \right] \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \\ + \omega_{pe}^2 \delta n_e = -i(k_s + k_a) (v_{ea}^{(0)} + \tilde{v}_{ea}) n_e^{(0)} v_a, \quad (16)$$

где  $v_{ea}^{(0)}$  и  $\tilde{v}_{ea}$  — постоянная и зависящая от времени частоты столкновений электронов с атомами, вычисленные с помощью сечений рассеяния (10) и (11) соответственно. Для того, чтобы исключить первую производную  $\partial \delta n_e / \partial t$  из уравнения (16), делаем стандартное преобразование  $\delta n_e = u(t) \exp\{-J(t)\}$ , где

$$J(t) = \frac{1}{2} (v_{ei}^{(0)} + v_{ea}^{(0)}) t + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_s}{k_e}\right) \int \tilde{v}_{ea} dt. \quad (17)$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + W^2(t) u(t) = -i(k_s + k_a) \times \\ \times (v_{ea}^{(0)} + \tilde{v}_{ea}) n_e^{(0)} v_a \exp\{-J(t)\}, \quad (18)$$

где

$$W^2(t) = \omega_{pe}^2 - \frac{1}{4} \left[ v_{ei}^{(0)} + v_{ea}^{(0)} + \left(1 + \frac{k_s}{k_e}\right) \tilde{v}_{ea} \right]^2 -$$

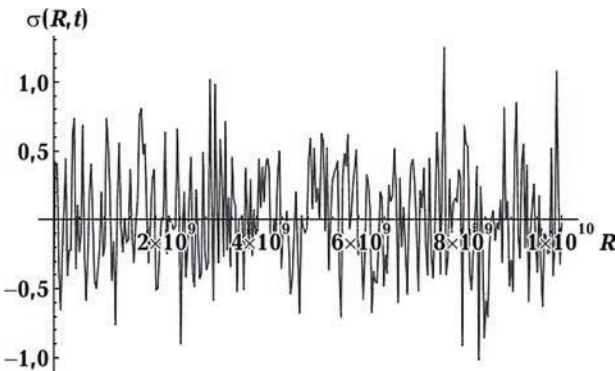


Рис. 3. Величина  $\sigma(R, t)$  в зависимости от  $R$  и  $t$  при  $\omega = 0,16 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ ,  $T = 0,1 \text{ К}$  и  $r = 10^5$ .

Fig. 3. Value  $\sigma(R, t)$  vs  $R$  and  $t$  at  $\omega = 0.16 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ ,  $T = 0.1 \text{ K}$  and  $r = 10^5$ .



$$-\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_s}{k_e} \right) \frac{\partial \tilde{v}_{ea}}{\partial t}. \quad (19)$$

Решение уравнения (18) можно искать в виде  $u = u_0 + \tilde{u}$ , где  $u_0$  — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_0(t)}{\partial t^2} + W^2(t) u_0(t) = 0, \quad (20)$$

а  $\tilde{u}$  — частное решение неоднородного уравнения. Уравнение (20) с частотой  $W(t)$ , зависящей от времени, есть уравнение типа Хилла. Не углубляясь в общую теорию решения этого уравнения, рассмотрим наиболее интересный с точки зрения физики вопрос возникновения так называемого параметрического резонанса. Для этой цели представим частоту  $W(t)$  в следующем виде:

$$W^2(t) = \omega_{pe}^2 (1 + h \cos(\omega t)), \quad (21)$$

где  $h > 0$  и  $h \ll 1$ . Уравнение (20) с частотой (21) носит название уравнения Матье. Как показывают дальнейшие вычисления, наиболее интенсивно резонанс возникает при условии, когда  $\omega = 2\omega_{pe} + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll \omega_{pe}$ ). Оценим частоты, входящие в уравнение (21). При плотности электронов  $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$  и акустической частоте  $\omega = 4 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon \sim 0,2$ . Согласно [Ландау, Лифшиц, 1988], решение уравнения (20) с частотой (21) будем искать в виде

$$u_0(t) = a(t) \cos \left( \omega_{pe} + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + b(t) \sin \left( \omega_{pe} + \frac{\varepsilon}{2} \right) t, \quad (22)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно (по сравнению с функциями  $\cos$  и  $\sin$ ) изменяющиеся функции времени. Решение (22) является приближенным. Точное решение содержит также члены с частотами, кратными  $\omega_{pe} + \varepsilon/2$ , которые, однако, являются величинами высшего порядка малости по  $h$ . После достаточно громоздких преобразований получим, что  $a(t), b(t) \sim e^s$ , где

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h\omega_{pe}}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (23)$$

Учтем, что флуктуации плотности электронов в плазме таковы:

$$\delta n_e(t) = u_0(t) \exp\{-J(t)\}, \quad (24)$$

где величина  $J(t)$  определена соотношением (17). Поэтому в условиях параметрического резонанса

$$\delta n_e(t) \sim e^{(s-\lambda)t}, \quad (25)$$

где  $\lambda = \frac{1}{2} (v_{ei}^{(0)} + v_{ea}^{(0)})$ . Согласно формуле (25) в ридберговской плазме, находящейся под воздействием акустической волны терагерцового диапазона, возможна раскачка электронной плотности, т. е. увеличение амплитуды ленгмюровских колебаний. При этом граница области неустойчивости определяется равенством  $s = \lambda$ , а условие возникновения параметрического резонанса есть

$$-\sqrt{\left( \frac{h\omega_{pe}}{2} \right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left( \frac{h\omega_{pe}}{2} \right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (26)$$

Заметим, что резонанс возможен не для всех  $h$ , а лишь для  $h > 4\lambda / \omega_{pe}$ .

**Заключение.** В настоящей статье была рассмотрена ультрахолодная слабоионизованная ридберговская плазма в поле акустической волны терагерцового диапазона и определен механизм влияния акустической волны на продольные ленгмюровские колебания электронной компоненты в плазме. Было вычислено дифференциальное сечение рассеяния электронов на атомах плазмы, совершающих высокочастотные акустические колебания. Для описания ленгмюровских колебаний в плазме, находящейся под воздействием акустической волны, была выбрана простая линейная модель двухжидкостной гидродинамики. Было показано, что в рамках этой модели, ввиду временной зависимости сечения рассеяния электронов на атомах плазмы, изменение электронной плотности в такой системе описывается хорошо известным в математической физике уравнением Матье. Последнее допускает возникновение параметрического резонанса

в виде раскачки ленгмюровских колебаний в плазме. Это означает, что для строгого описания таких колебаний требуется последовательное развитие нелинейного подхода. Также были определены границы области неустойчивости ленгмюровских колебаний и условия возникновения параметрического резонанса в ридберговской плазме, находящейся под воздействием акустической волны. Полученные в настоящей

статье, результаты частично перекликаются с теоретическими выводами работы [Кузьмина и др., 2016], в которой рассматривался нелинейный механизм генерации добавочных акустических гармоник на гибридных частотах, возникающих в результате магнитоакустического резонанса.

Авторы выражают благодарность А.Л. Митлеру за выполнение численных расчетов.

### Список литературы

- Александров Н.Л., Напартович Н.П., Паль А.Ф. Усиление звуковых волн в плазме газового разряда. *Физика плазмы*. 1990. Т. 16. № 7. С. 862—870.
- Кузьмина Л.М., Рылюк В.М., Скипа М.И. Взаимодействие акустических и электромагнитных полей в смеси электролитов. *Геофиз. журн.* 2016. Т. 38. № 2. С. 98—105. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i2.2016.107769>.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. Т. I. Москва: Наука, 1988. 210 с.
- Adak, A., Robinson, A.P.L., Singh, P.K., Chatterjee, G., Lad, A.D., Pasley, J., & Kumar, G.R. (2015). Terahertz Acoustics in Hot Dense Laser Plasmas. *Physical Review Letters*, 114, 115001-1—115001-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.115001>.
- Ganguly, B.N., Bletzinger, P., & Garscadden, A. (1997). Shock wave damping and dispersion in nonequilibrium low pressure argon plasmas. *Physics Letters A*, 230(3-4), 218—222. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00255-7).
- Killian, T.C., Kulin, S., Bergeson, S.D., Orozco, L.A., Orzel, C., & Rolston, S.L. (1999). Creation of an Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, 83, 4776—4779. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4776>.
- Killian, T.C., Lim, M.J., Kulin, S., Dumke, R., Bergeson, S.D., & Rolston, S.L. (2001). Formation of Rydberg Atoms in an Expanding Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, 86, 3759—3762. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3759>.
- Kroll, N.M., & Watson, K.M. (1973). Charged-Particle Scattering in the Presence of a Strong Electromagnetic Wave. *Physical Review A*, 8, 804—809. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.8.804>.
- Kulin, S., Killian, T.C., Bergeson, S.D. & Rolston, S.L. (2000). Plasma Oscillations and Expansion of an Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, 85, 318—321. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.318>.
- Mante, P.-A., Devos, A., & Le Louarn, A. (2010). Generation of terahertz acoustic waves in semiconductor quantum dots using femtosecond laser pulses. *Physical Review B*, 81, 113305-1—113305-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.113305>.
- Robinson, M.P., Tolra, B.L., Noel, M.W., Gallagher, T.F., & Pillet, P. (2000). Spontaneous Evolution of Rydberg Atoms into an Ultracold Plasma. *Physical Review Letters*, 85, 4466—4469. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4466>.
- Roth, J.R., Sherman, D.M., & Wilkinson, S.P. (2000). Electrohydrodynamic flow control with a glow-discharge surface plasma. *AIAA Journal*, 38(7), 1166—1172. <https://doi.org/10.2514/2.1110>.
- Sandeep, S., Heywood, S.L., Champion, R.P., Kent, A.J., & Kini, R.N. (2018). Resonance of terahertz phonons in an acoustic nanocavity. *Physical Review B*, 98, pp. 235303-1—235303-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.235303>.
- Soukhomlinov, V., Gerasimov, N., & Sheverev, V. (2007). Propagation of sound in glow discharge plasma. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(8), 2507—2512.

- Soukhomlinov, V.S., Sheverev, V.A., & Ötügen, M.V. (2005). Evolution of a vortex in glow discharge plasma. *Physics of Fluids*, 17, 058102—058104. <https://doi.org/10.1063/1.1897007>.
- Soukhomlinov, V., Stepaniuk, V., Tarau, C., Ötügen, V., Sheverev, V., & Raman, G. (2002). Acoustic Wave Control Using Glow Discharge Plasma. *AIAA Journal*, 2002—2731. <https://doi.org/10.2514/6.2002-2731>.

## Parametric resonance in the ultracold Rydberg plasma under the influence of an acoustic wave

V.M. Rylyuk, L.M. Kuzmina, M.I. Skipa, 2020

Department of hydroacoustics of the S.I. Subbotin Institute of Geophysics of the National Academy of Science of Ukraine, Ukraine, Odessa

The article considers weakly ionized ultracold Rydberg plasma under the influence of an acoustic wave of the terahertz range. The effect of an acoustic wave on Langmuir oscillations of Rydberg plasma is described using a hydrodynamic approach. The mechanism of the influence of an acoustic wave on Langmuir oscillations in such plasma, which consists in the scattering of electrons by neutral atoms oscillating in a high-frequency acoustic field, is considered. The unitary Kramers—Henneberger transformation in the Schrödinger equation is used to calculate the cross section for the scattering of electrons by atoms performing high-frequency oscillations in the field of a terahertz acoustic wave. On this basis, a deep analogy is shown between the problem of scattering of an electron in the field of an external electromagnetic wave by a stationary atom and the problem of scattering of an electron by an atom vibrating in an external acoustic field. Numerical calculations demonstrate the oscillatory character of the cross section for the scattering of an electron by a Rydberg atom vibrating in a high-frequency acoustic field. Within the framework of the chosen hydrodynamic model, in view of the time dependence of the cross section for scattering of electrons by plasma atoms, the change in the electron density in such a system is described by the Mathieu equation, well known in mathematical physics. On the basis of this equation, the fundamental possibility of the appearance of parametric resonance, in the form of the buildup of Langmuir oscillations, in such a system is shown theoretically. The conditions for the appearance of resonance in Rydberg plasma initiated by a high-frequency acoustic wave are indicated.

**Key words:** rydberg plasma, scattering, parametric resonance, acoustic wave.

### References

- Aleksandrov, N.L., Napartovich, N.P., & Pal, A.F. (1990). Amplification of sound waves in a gas-discharge plasma. *Fizika plazmy*, 16(7), 862—870 (in Russian).
- Kuzmina, L.M., Rylyuk, V.M., & Skipa, M.I. (2016). The interaction of acoustic and electromagnetic field in a mixture of electrolytes. *Geofizicheskiy zhurnal*, 38(2), 98—105. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v38i2.2016.107769> (in Russian).
- Landau, L.D., & Lifshits, E.M. (1988). *Mechanics*. Vol. I. Moscow: Nauka, 210 p. (in Russian).
- Adak, A., Robinson, A.P.L., Singh, P.K., Chatterjee, G., Lad, A.D., Pasley, J., & Kumar, G.R. (2015). Terahertz Acoustics in Hot Dense Laser Plasmas. *Physical Review Letters*, 114, 115001-1—115001-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.115001>.
- Ganguly, B.N., Bletzinger, P., & Garscadden, A. (1997). Shock wave damping and dispersion in nonequilibrium low pressure argon plasmas. *Physics Letters A*, 230(3-4), 218—222. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00255-7).
- Killian, T.C., Kulin, S., Bergeson, S.D., Oroz-



- co, L.A., Orzel, C., & Rolston, S.L. (1999). Creation of an Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, *83*, 4776—4779. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4776>.
- Killian, T.C., Lim, M.J., Kulin, S., Dumke, R., Bergeson, S.D., & Rolston, S.L. (2001). Formation of Rydberg Atoms in an Expanding Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, *86*, 3759—3762. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3759>.
- Kroll, N.M., & Watson, K.M. (1973). Charged-Particle Scattering in the Presence of a Strong Electromagnetic Wave. *Physical Review A*, *8*, 804—809. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.8.804>.
- Kulin, S., Killian, T.C., Bergeson, S.D. & Rolston, S.L. (2000). Plasma Oscillations and Expansion of an Ultracold Neutral Plasma. *Physical Review Letters*, *85*, 318—321. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.318>.
- Mante, P.-A., Devos, A., & Le Louarn, A. (2010). Generation of terahertz acoustic waves in semiconductor quantum dots using femtosecond laser pulses. *Physical Review B*, *81*, 113305-1—113305-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.113305>.
- Robinson, M.P., Tolra, B.L., Noel, M.W., Gallagher, T.F., & Pillet, P. (2000). Spontaneous Evolution of Rydberg Atoms into an Ultracold Plasma. *Physical Review Letters*, *85*, 4466—4469. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4466>.
- Roth, J.R., Sherman, D.M., & Wilkinson, S.P. (2000). Electrohydrodynamic flow control with a glow-discharge surface plasma. *AIAA Journal*, *38*(7), 1166—1172. <https://doi.org/10.2514/2.1110>.
- Sandeep, S., Heywood, S.L., Campion, R.P., Kent, A.J., & Kini, R.N. (2018). Resonance of terahertz phonons in an acoustic nanocavity. *Physical Review B*, *98*, pp. 235303-1—235303-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.235303>.
- Soukhomlinov, V., Gerasimov, N., & Sheverev, V. (2007). Propagation of sound in glow discharge plasma. *Journal of Physics D: Applied Physics*, *40*(8), 2507—2512.
- Soukhomlinov, V.S., Sheverev, V.A., & Ötügen, M.V. (2005). Evolution of a vortex in glow discharge plasma. *Physics of Fluids*, *17*, 058102—058104. <https://doi.org/10.1063/1.1897007>.
- Soukhomlinov, V., Stepaniuk, V., Tarau, C., Ötügen, V., Sheverev, V., & Raman, G. (2002). Acoustic Wave Control Using Glow Discharge Plasma. *AIAA Journal*, 2002—2731. <https://doi.org/10.2514/6.2002-2731>.

## Параметричний резонанс в ультрахолодній ридбергівській плазмі під впливом акустичної хвилі

В. М. Рилюк, Л. М. Кузьміна, М. І. Скіпа, 2020

Відділення гідроакустики Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна  
НАН України, Київ, Україна

Розглянуто слабоіонізовану ультрахолодну ридбергівську плазму, яка зазнає впливу акустичної хвилі терагерцового діапазону. Вплив акустичної хвилі на ленгмюрівські коливання ридбергівської плазми описують за допомогою гідродинамічного підходу. Досліджено механізм впливу акустичної хвилі на ленгмюрівські коливання у такій плазмі, який полягає у розсіянні електронів на нейтральних атомах, що коливаються у високочастотному акустичному полі. Для обчислення перерізу розсіяння електронів на атомах, які здійснюють високочастотні коливання у полі терагерцової акустичної хвилі, застосовано унітарне перетворення Крамерса—Хеннебергера у рівнянні Шредингера. На цій основі показано глибоку аналогію між задачею про

розсіяння електрона в полі зовнішньої електромагнітної хвилі на стаціонарному атомі і проблемою розсіяння електрона на атомі, який коливається у зовнішньому акустичному полі. Числові розрахунки демонструють осциляційний характер перерізу розсіяння електрона на ридбергівському атомі, який коливається у високочастотному акустичному полі. У межах обраної гідродинамічної моделі завдяки часовій залежності перерізу розсіяння електронів на атомах плазми зміну електронної густини у такій системі описуємо добре відомим у математичній фізиці рівнянням Мат'є. На основі цього рівняння теоретично показано принципову можливість виникнення параметричного резонансу у вигляді розгойдування ленгмюрівських коливань у такій системі. Наведено умови виникнення резонансу у ридбергівській плазмі, ініційованого високочастотною акустичною хвилею.

**Ключові слова:** ридбергівська плазма, розсіяння, параметричний резонанс, акустична хвиля.