DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51570
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(2) 20–25 *dω*

Топологія відкритого розширення

В'ячеслав Михайлович Бабич, Василь Олексійович Пєхтєрєв

У роботі отримано результати, які описують властивості загальної топологічної конструкції — топології відкритого розширення. Зокрема, доведено, що ця конструкція не транзитивна, знайдено бази найменшої потужності для топології та системи околів точки, обчислено внутрішність, замикання, множи́ни граничних та ізольованих точок довільної множини. Також доведено лінійну зв'язність і неметризовність цього топологічного простору, досліджено його кардинальні інваріанти й аксіоми відокремлюваності.

Ключові слова Топологічний простір, база, зв'язність, аксіоми відокремлюваності, кардинальні інваріанти.

УДК 515.122

В [1] введено поняття топології відкритого розширення у випадку, коли її носій відрізняється від носія вихідного топологічного простору на одну точку. Частковим випадком цієї конструкції є точковилучена топологія, яка виявляється відкритим розширенням дискретної. Найвідомішим прикладом точковилученої топології є простір Серпінського. Ми узагальнюємо дану конструкцію на випадок довільної надмножини носія початкового простору.

Нехай (X, τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X. Тоді родина $\tau^* = \{U \subset X^* \mid U \supset X \text{ або } U \in \tau\}$ є топологією на X^*, яка називається *топологією відкритого розширення* X *до* X^*. Справді, розглянемо довільні множини $U_\alpha \in \tau^*$, $\alpha \in T$. Якщо принаймні одна з них містить X, то й їх об'єднання містить X. В іншому разі об'єднання $\bigcup\limits_{\alpha\in T} U_\alpha$ лежить в τ. Коли множина індексів T скінченна і одна з множин U_α міститься в τ, то й перетин $\bigcap\limits_{\alpha \in T} U_\alpha$ лежить в τ. В іншому разі такий перетин містить X, і отже, також належить τ^*.

Таким чином, відкритими в X^* є ті й лише ті множини, які містять X або є відкритими в X. Відповідно, замкненими в X^* множинами є всі підмножини доповнення $X^* \backslash X$ та об'єднання $(X^* \backslash X) \cup A$, де A — замкнена в X множина, й лише вони.

Пропозиція 1 *Топологія τ^* відкритого розширення простору (X, τ) до $X^* \supset X$ є супремумом топології $\tau \cup \{X^*\}$ та X-вмісної топології на X^*.*

Доведення 1 *Топологія τ^* містить топологію $\tau \cup \{X^*\}$ та X-вмісну топологію на X^*, а тому містить їх об'єднання і супремум. Навпаки, кожна множина з τ^* міститься або в $\tau \cup \{X^*\}$, або в X-вмісній топології на X^*, і отже, лежить в кожній топології на X^*, яка містить об'єднання топології $\tau \cup \{X^*\}$ й X-вмісної топології на X^*, зокрема і в їх супремумі.*

Відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів (X, τ) та (Y, σ) називається *індукувальним*, якщо τ індукована топологією σ і відображенням f.

Теорема 1 *Нехай (X, τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X і τ^* — топологія відкритого розширення X до X^*. Тоді природне вкладення $X \ni x \overset{i}{\mapsto} x \in X^*$ є відкритим індукувальним відображенням. Зокрема, (X, τ) є відкритим підпростором простору X^*.*

Доведення 2 *Нехай τ_X^* — топологія на X, індукована топологією τ^* на X^*. Покажемо, що $\tau_X^* = \tau$. Якщо $U \in \tau_X^*$, то $U = X \cap V$, де $V \in \tau^*$. Але за означенням топології відкритого розширення перетин $X \cap V$ дорівнює або X, або V, і отже, належить τ. Навпаки, якщо $U \in \tau \subset \tau^*$, то $U = X \cap U \in \tau_X^*$. Отже, X — підпростір в X^*, тобто природне вкладення і індукувальне. Крім того, воно відкрите, бо підпростір X відкритий в X^*.*

На відміну від топології розширення [2], топологія відкритого розширення не транзитивна, тобто якщо X^{**} — надмножина множини X^*, на якій задана топологія відкритого розширення X до X^*, то топології відкритого розширення X до X^{**} та X^* до X^{**}, взагалі кажучи, різні.

Приклад 1 *Розглянемо вкладені множини $X = \{a\}$, $X^* = \{a, b\}$, $X^{**} = \{a, b, c\}$. Тоді для дискретної топології τ на X маємо, що $(\tau^*)^* = \{, X^{**}, \{a\}, \{a, b\}\} \neq \tau^{**} = \{, X^{**}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.*

Звідси, зокрема, випливає, що природне вкладення $X \ni x \mapsto x \in X^*$ не факторне, тобто топологія відкритого розширення не є фактортопологією відносно топології τ на X та цього вкладення.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51570

Пропозиція 2 *База найменшої потужності топології τ^* відкритого розширення X до X^* має вигляд $\beta^* = \{X \cup \{x\}, x \in X^* \backslash X\} \cup \beta$, де β — база найменшої потужності топології τ простору X.*

Доведення 3 *Точка $x \in X^* \backslash X$ має найменший окіл $X \cup \{x\}$, який мусить міститися в кожній базі простору X^* за критерієм бази. Тому $X \cup \{x\} \in \beta^*$, $x \in X^* \backslash X$. А оскільки відкриті в X^* множини є об'єднаннями деяких сукупностей множин з β та $\{X \cup \{x\}, x \in X^* \backslash X\}$ відповідно, то родина β^* відкритих в X^* множин є базою простору X^*. Залишилось зауважити, що потужність бази β простору X зменшити не можна, а з родини $\{X \cup \{x\}, x \in X^* \backslash X\}$ не можна прибрати жодної множини.*

Пропозиція 3 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення простору X до $X^* \supset X$. Тоді база найменшої потужності системи околів довільної точки $x \in X^*$ має вигляд $\{X \cup \{x\}\}$, коли $x \in X^* \backslash X$, та β_x, де β_x — база найменшої потужності системи околів точки x у просторі X, коли $x \in X$.*

Доведення 4 *Нехай β_x^* — база найменшої потужності системи околів точки $x \in X^*$. Якщо $x \in X^* \backslash X$, то множина $X \cup \{x\}$ є найменшим околом точки x, звідки $\beta_x^* = \{X \cup \{x\}\}$. Якщо ж $x \in X$, то $\beta_x^* = \beta_x$, бо кожен окіл точки x в топології τ^* містить її окіл в топології τ, який, у свою чергу, містить деякий окіл з бази β_x, потужність якої найменша.*

Пропозиція 4 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення простору X до $X^* \supset X$ і $A \subset X^*$ — довільна множина. Тоді:*

1) внутрішність множини A в X^* обчислюється за формулою $\operatorname{Int}_{X^*} A = A$, коли $A \supset X$, та $\operatorname{Int}_{X^*} A = \operatorname{Int}_X(A \cap X)$, де $\operatorname{Int}_X(A \cap X)$ — внутрішність перетину $A \cap X$ у просторі X, в іншому разі;

2) замикання множини A в X^* має вигляд $\overline{A}_{X^*} = A$, коли $A \subset X^* \backslash X$, та $\overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)$, де $\overline{A \cap X}_X$ — замикання перетину $A \cap X$ у просторі X, в іншому разі;

3) множина ізольованих точок множини A в X^* знаходиться за формулою $I_{X^*}(A) = A$, коли $A \subset X^* \backslash X$, $I_{X^*}(A) = I_X(A \cap X)$, де $I_X(A \cap X)$ — множина ізольованих точок перетину $A \cap X$ у просторі X, в іншому разі;

4) множина граничних точок множини A в X^* порожня, коли $A \subset X^* \backslash X$, і визначається рівністю $A'_{X^*} = (A \cap X)'_X \cup (X^* \backslash X)$, де $(A \cap X)'_X$ — множина граничних точок перетину $A \cap X$ у просторі X, в іншому разі;

5) A скрізь щільна (ніде не щільна) в X^* тоді і тільки тоді, коли перетин $A \cap X$ скрізь щільний (ніде не щільний) в X.

Доведення 5 *1) Якщо $A \supset X$, то A відкрита в X^*, й отже,* $\mathrm{Int}_{X^*} A = A$. *В іншому разі найбільшою відкритою в X^* множиною, яка міститься в A, є, очевидно,* $\mathrm{Int}_X(A \cap X)$.

2) Якщо $A \subset X^* \backslash X$, то A замкнена в X^*, й отже, $\overline{A}_{X^*} = A$. В іншому разі найменшою замкненою в X^* множиною, яка містить A, є, очевидно, $\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)$.

3) Точка множини A ізольована в A, якщо деякий окіл цієї точки не містить відмінних від неї точок множини A. Очевидно, кожна точка x множини $A \subset X^* \backslash X$ ізольована в A, бо $\{x\} = A \cap (X \cup \{x\})$. Якщо ж $A \not\subset X^* \backslash X$, то кожна точка з $A \backslash X$ не ізольована в A, а точка перетину $A \cap X$ ізольована в A в просторі X^* в тому й лише в тому разі, коли ця точка ізольована в A в просторі X.

4) Якщо $A \subset X^* \backslash X$, то $A'_{X^*} = \overline{A}_{X^*} \setminus I_{X^*}(A) = A \backslash A =$. Якщо ж $A \not\subset X^* \backslash X$, то $A'_{X^*} = \overline{A}_{X^*} \setminus I_{X^*}(A) = (\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)) \backslash (I_X(A \cap X)) = (\overline{A \cap X}_X \setminus I_X(A \cap X)) \cup (X^* \backslash X) = (A \cap X)'_X \cup (X^* \backslash X)$.

5) Множина A скрізь щільна в X^* тоді й лише тоді, коли $X^* = \overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)$. А це буде тоді й лише тоді, коли $\overline{A \cap X}_X = X$, що еквівалентно скрізь щільності в X перетину $A \cap X$.

Якщо $A \subset X^* \backslash X$, то $\mathrm{Int}_{X^*}(\overline{A}_{X^*}) = \mathrm{Int}_{X^*} A = \mathrm{Int}_X(A \cap X) = \mathrm{Int}_X =$. В іншому разі $\mathrm{Int}_{X^*}(\overline{A}_{X^*}) = \mathrm{Int}_{X^*}(\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)) =$ в тому й лише в тому разі, коли $\mathrm{Int}_X \overline{A \cap X}_X =$.

Теорема 2 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* і $X^* \neq X$. Тоді топологічний простір X^* лінійно зв'язний.*

Доведення 6 *Для довільних точок $x \in X$ й $y \in X^* \backslash X$ відображення $l : [0, 1] \to X^*$, задане рівностями $l([0, 1)) = x$ і $l(1) = y$, є шляхом в X^*, який з'єднує точки x й y.*

Теорема 3 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^*. Простір X^* задовольняє першу аксіому зліченності (є сепарабельним) тоді й лише тоді, коли X її задовольняє (є сепарабельним). Не більш ніж зліченною скрізь щільною в X^* множиною найменшої потужності є скрізь щільна в X множина найменшої потужності.*

Доведення 7 *Твердження теореми для першої аксіоми зліченності випливає з твердження 3. Нехай D^* — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X^* множина. За твердженням 4 перетин $D^* \cap X$ скрізь щільний в X, звідки простір X сепарабельний. Навпаки, нехай D — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X множина. Тоді D є не більш ніж зліченною скрізь* *щільною в* X^* *множиною, бо* $D \cap X = D$, *і, отже, простір* X^* *сепарабельний. Скрізь щільною в* X^* *множиною найменшої потужності є, очевидно кожна скрізь щільна в* X *множина найменшої потужності.*

Наступний факт випливає безпосередньо з твердження 2.

Теорема 4 *Нехай* τ^* *— топологія відкритого розширення* X *до* X^*. *Простір* X^* *задовольняє другу аксіому зліченності тоді й лише тоді, коли* X *її задовольняє та доповнення* $X^*\backslash X$ *не більш ніж зліченне.*

Теорема 5 *Нехай* τ^* *— топологія відкритого розширення* X *до* X^*. *Простір* X^* *є ліндельофовим (компактним) в тому й лише тому разі, коли доповнення* $X^*\backslash X$ *не більш ніж зліченне (скінченне).*

Доведення 8 *Родина* $\{X \cup \{x\}, x \in X^*\backslash X\}$ *є відкритим покриттям простору* X^*, *з якого не можна вилучити жодної множини. Тому, якщо* X *ліндельофів (компактний), то доповнення* $X^*\backslash X$ *не більш ніж зліченне (скінченне). Навпаки, нехай* π *— довільне відкрите покриття простору* X^*. *Для кожного* $x \in X^*\backslash X$ *візьмемо множину* $A_x \in \pi$, *яка містить* x. *Тоді родина* $\{A_x, x \in X^*\backslash X\}$ *є, очевидно, не більш ніж зліченним (скінченним) підпокриттям покриття* π.

Теорема 6 *Нехай* τ^* *— топологія відкритого розширення* X *до* X^* *і* $X^* \neq X$. *Простір* X^* *є* T_0*-простором тоді й лише тоді, коли* X *—* T_0*-простір. Простір* X^* *є* T_4*-простором у тому й лише в тому разі, коли* $|X^*\backslash X| = 1$. *Простір* X^* *не є* T_i*-простором для* $i = 1, 2, 3$. *Зокрема,* X^* *не регулярний і не нормальний, а отже й не метризовний.*

Доведення 9 *Нехай* X *задовольняє нульову аксіому відокремлюваності. Тоді для кожних двох різних точок* $x, y \in X$ *існує окіл в* X, *а отже й в* X^*, *однієї з них, який не містить другу точку. Якщо* $x \in X$, *а* $y \in X^*\backslash X$, *то окіл* X *точки* x *не містить* y. *Якщо ж* $x, y \in X^*\backslash X$, *то окіл* $X \cup \{x\}$ *точки* x *не містить* y. *Отже,* X^* *є* T_0*-простором. Навпаки, для кожних двох різних точок* $x, y \in X$ *існує окіл в* X^* *однієї з них, який не містить другу точку. Оскільки цей окіл не містить* X, *то він відкритий в* X. *Тому* X *є* T_0*-простором.*

Далі, якщо $|X^*\backslash X| = 1$, *то всі непорожні замкнені в* X^* *множини перетинаються по* $X^*\backslash X$, *звідки простір* X^* *є* T_4*-простором. Навпаки, якщо* $|X^*\backslash X| > 1$ *і* $x, y \in X^*\backslash X$ *— дві різні точки, то замкнені множини* $\{x\}$ *та* $\{y\}$ *не перетинаються, але довільні їх околи містять непорожню* *множину X у перетині. Тому в цьому разі X^* не задовольняє четверту аксіому відокремлюваності.*

Нарешті, X^* не є T_1-простором, бо для кожної точки $x \in X$ одноточкова множина $\{x\}$ не замкнена в X^*, і не є T_3-простором, бо для довільних точок $x \in X$ й $y \in X^* \setminus X$ точка x і замкнена множина $\{y\}$ не мають околів з порожнім перетином.

Література

1. Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr. Counterexamples in topology. – New York: Dover publications, 1978. – 256 p.
2. Бабич В. М., Філоненко О. М. Топологія розширення // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2015. – 27-1. – С. 5-9.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 750 с.

В'ячеслав Михайлович Бабич, Василь Олексійович Пєхтєрєв
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: vyacheslav.babych@gmail.com, vasiliy@univ.kiev.ua

Vycheslav Babych, Vasyl Pyekhtyeryev

Open Extension Topology

The paper contains the results which describe the properties of such general topological construction as open extension topology. In particular, we prove that this topology is not transitive. We find the base of the least cardinality for the topology and local one for the neighborhood system of every point. We calculate the interior, the closure, and the sets of isolated and limit points of any set. Also we prove that this space is path connected and is not metrizable, and investigate its cardinal invariants and separation axioms.