

В. М. Мирсалимов*,

д-р физ.-мат. наук

А. Б. Мустафаев**,

канд. физ.-мат. наук

Институт математики и
механики НАН Азербайджана
г. Баку, e-mail:
mir-vagif@mail.ru,
zer_bm@list.ru

УДК 539.375

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ЧАСТИЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Розглядаються локальні зміни температури поблизу кінця щілини змінної ширини, порівнянної з пружними деформаціями. Задача про рівновагу щілини з частково контактуючими берегами під впливом зовнішніх розтяжних навантажень, наведеного температурного поля та зусиль на контактуючих поверхнях щілини зводиться до задачі лінійного спряження аналітичних функцій. При цьому вважається, що на деякій частині контакту виникає зчеплення берегів, а на решті можливе проковзування. Знайдено нормальні та дотичні напруження, значення розмірів кінцевої контактної зони.

Ключові слова: щілина змінної ширини, локальне температурне поле, контактна зона зчеплення, зона проковзування, контактні напруження.

Введение

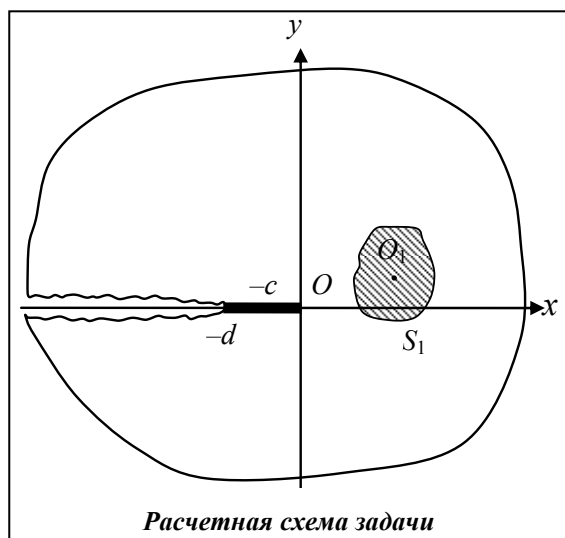
Рассматривается неограниченная упругая изотропная плоскость, в которой имеется прямолинейная щель переменной ширины $h(x)$, сравнимой с упругими деформациями. Берега щели свободны от внешних нагрузок. На пути роста щели, с целью его торможения, с нагреванием тепловым источником области $S = S_1 + S_2$ до температуры T_0 создается зона сжимающих напряжений. Известно, что [1–3] воздействие теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой плоскости в направлении, перпендикулярном трещине (щели), что снижает коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров листового элемента и теплового источника в листовом элементе будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега щели на некотором участке войдут в контакт, что приведет к возникновению контактных напряжений на данном участке берегов щели. Приняты следующие допущения: все термоупругие характеристики материала плоскости не зависят от температуры; материал пластины представляет собой однородное и изотропное тело.

Считается, что в начальный момент $t = 0$ произвольная область $S = S_1 + S_2$ на пути распространения щели в листовом элементе мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть плоскости в начальный момент имеет температуру $T = 0$.

Для многих металлических материалов (сталь, алюминиевые сплавы и др.) экспериментально установлено [4, 5], что в диапазоне изменения температуры до 300–400 °С зависимость термоупругих характеристик слабо меняется с температурой. Таким образом, для всех конструкционных материалов имеется такой диапазон температур, в котором корректно допущение о постоянстве характеристик материала, устанавливаемый на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до 70–100 °С наблюдается замедление и торможение трещины. Можно привести другие работы [6, 7], где дается положительный ответ о наблюдаемом эффекте частичного закрытия трещины. В статье [7] исследовано поведение напряжений вблизи концов трещины и определены коэффициенты интенсивности напряжений. Установлено, что при некоторых значениях параметров задачи коэффициенты интенсивности напряжений оказываются отрицательными, что означает контактирование берегов трещины. Наличие отрицательных коэффициентов интенсивности напряжений, по крайней мере вблизи края трещины, требует учета частичного контакта берегов в некоторой окрестности конца трещины.

Постановка задачи

Рассмотрим окрестность конца щели переменной ширины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше по сравнению с характерным линейным размером области S . Тогда щель на плоскости Oxy представится полубесконечным сквозным разрезом вдоль $y = 0$, $-\infty < x < 0$ (рисунок). При этом в части разреза щели d (концевая зона, примыкающая



Расчетная схема задачи

к ее вершине) берега щели будут взаимодействовать (войдут в контакт). Это способствует появлению контактных напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от нагрузок. Полагаем, что в процессе деформации берега щели в окрестностях вершин вступают в контакт на участке $(-d, 0)$. Принимается, что площадка контакта состоит из участка сцепления берегов $(-c, 0)$ и участка $(-d, -c)$, на котором возможно проскальзывание. Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л. А. Галиным [8, 9]. Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению. Область S может иметь любые (но конечные) размеры и конфигурацию. На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет следующий вид при $z \rightarrow \infty$:

$$\Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad \Omega(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где $z = x + iy = re^{i\theta}$; r, θ – полярные координаты; $i = \sqrt{-1}$; $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ – комплексные потенциалы [10].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений K_I, K_{II} , представляющие собой некоторые функции формы тела и граничных условий. Они определяются из решения задачи «в целом» при отсутствии теплового воздействия. При действии силовой и тепловой нагрузок на плоскость на некотором участке берега щели взаимодействуют между собой, что приводит к появлению нормальных $p_x(y)$ и $p_{xy}(y)$ касательных напряжений. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия рассматриваемой задачи выглядят так:

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } y = 0, -\infty < x < -d, & (1) \\ \sigma_y &= p_y(y), \quad \tau_{xy} = fp_y(y) \quad \text{при } y = 0, -d < x < -c, \\ \sigma_y &= p_y(x), \quad \tau_{xy} = fp_y(x) \quad \text{при } y = 0, -c < x < 0. \end{aligned}$$

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Кулона); $f(x)$ – коэффициент трения; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений в декартовых координатах.

Постановку задачи следует дополнить соотношениями для перемещений на участках контакта

$$(v^+ - v^-) = -h(x) \quad \text{при } y = 0, -d < x < 0, \quad (2)$$

$$(u^+ - u^-) = 0 \quad \text{при } y = 0, -c < x < 0, \quad (3)$$

где $(v^+ - v^-)$ – нормальная, $(u^+ - u^-)$ – касательная составляющие раскрытия берегов щели.

Решение задачи

Напряженное состояние в плоскости с щелью представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1 \quad (4)$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – решение задачи термоупругости для плоскости без щели.

Для нахождения напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ решаем задачу термоупругости для сплошной плоскости. Вначале находим распределение температуры в плоскости. Для этого решаем задачу теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа; a – коэффициент температуропроводности материала.

Решение уравнения теории теплопроводности имеет вид [11]

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) d\xi d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Для термоупругого потенциала перемещений имеем

$$F(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\},$$

где ν – коэффициент Пуассона материала плоскости; α – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Напряжения σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 выражаем через термоупругий потенциал перемещений в виде [11]

$$\sigma_x^0 = -2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y^0 = -2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy}^0 = 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)$$

где μ – модуль сдвига материала плоскости.

Для решения краевой задачи (1) используем комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили [10]. Решение граничной задачи (1) с учетом формул (4) запишется [10] в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(x) \sqrt{x} dx}{x - z} + \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad (5)$$

где $f_0(x) = \begin{cases} -(\sigma_y^0(x,0) - i\tau_{xy}^0(x,0)) & \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -d \\ p_y(x,0)(1 - if) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{при } y = 0, \quad -d < x < -c \\ p_y(x,0) - ip_{xy}(x,0) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{при } y = 0, \quad -c < x < 0 \end{cases}$. Здесь функция \sqrt{z} аналитична

вне полубесконечного разреза при $y = 0$, $x < 0$ и положительна на продолжении разреза.

Для окончательного определения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ необходимо найти еще контактные напряжения на участке контакта между кромками щели.

Для определения перемещений имеем соотношение [10]

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi(z).$$

Здесь κ – постоянная Мусхелишвили.

После интегрирования для функций $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ находим

$$\varphi(z) = \omega(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}} dt + \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{z}. \quad (6)$$

На основании соотношений (5), (6) имеем

$$(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left[-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{2(K_I - iK_{II})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} \right].$$

Удовлетворяя условиям (2), (3), получим интегральные уравнения относительно неизвестных функций $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_1(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-d}^0 p_y(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = -\frac{2\mu}{1 + \kappa} h(x) \quad (-d \leq x \leq 0), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_2(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-c}^0 p_{xy}(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{-c} \tilde{f}p_y(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0 \quad (-c \leq x \leq 0), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f_1(x) = -\sigma_y^0(x, 0)$, $f_2(x) = -\tau_{xy}^0(x, 0)$.

Для замкнутости каждого интегрального уравнения (7), (8) не хватает одного уравнения. Условием, служащим для определения размеров контактной зоны, т. е. величин d и c , является условие конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Записывая условие конечности напряжений, получаем для каждого сингулярного интегрального уравнения недостающее уравнение соответственно в виде

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d}^0 \frac{p_y(x) dx}{\sqrt{x}} + K_I = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-c}^0 \frac{p_{xy}(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d}^{-c} \frac{\tilde{f}p_y(x) dx}{\sqrt{x}} + K_{II} = 0. \quad (10)$$

Решение интегральных уравнений (7) и (8) можно получить путем решения соответствующей задачи Римана [12]. Интегральное уравнение (7) можно представить в виде

$$\int_{-d}^0 \frac{\sqrt{t} p_y(t) dt}{t-x} = \pi F_1(x) \quad (-d \leq x \leq 0), \quad (11)$$

где $F_1(x) = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} x - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t} f_1(t) dt}{t-x} - \frac{2\mu}{1+\kappa} h'(x)$.

Решив интегральное уравнение (11) (см. [13], приложение) с учетом условий ограниченности контактных напряжений при $x = -d$ и $x = 0$ (условие разрешимости интегрального уравнения в классе всюду ограниченных функций), найдем формулу для подсчета нормальных контактных напряжений

$$p_y(x) = \frac{X^+(x)}{\pi i} \int_{-d}^0 \frac{F_1^*(t) dt}{X^+(t)(t-x)},$$

где $F_1^*(t) = F_1(t)/\pi i$, $X(t) = \sqrt{t(t+d)}$.

Аналогично, решая интегральное уравнение (8), найдем формулу для подсчета касательных напряжений на участке сцепления берегов щели $(-c, 0)$

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x)}{\pi i} \int_{-c}^0 \frac{F_2^*(t) dt}{X_1^+(t)(t-x)},$$

где $F_2^*(t) = F_2(t)/\pi i$; $F_2(t) = \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi}} x - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(t) \sqrt{t} dt}{t-x} - \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{-c} \frac{\tilde{f}p_y(t) \sqrt{t} dt}{t-x}$; $X_1(t) = \sqrt{t(t+c)}$.

Касательные контактные напряжения на участке проскальзывания $(-d, -c)$ определяются по закону Кулона. Анализ частичного закрытия щели в плоскости с помощью наведенного температурного поля сводится к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрических параметрах, а также механических постоянных материала. Непосредственно из решения сингулярных интегральных уравнений и дополнительных условий определяются нормальные и касательные усилия на участках контакта, а также размеры зон контакта берегов щели.

Отметим, что учет возмущенного температурного поля будет усиливать тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений. Теоретические и экспериментальные исследования

показывают, что созданное в течение некоторого ограниченного времени с целью торможения и частичного закрытия щели локальное температурное поле является непреодолимым барьером [1] на пути роста щели. Последующее снятие температурного поля ($t \rightarrow \infty$) будет постепенно снижать значение сжимающих напряжений и эффект частичного закрытия щели. Коэффициенты интенсивности напряжений, достигнув нулевого значения при закрытии щели, постепенно будут возрастать до величины, обусловленной механической нагрузкой. Под действием локального температурного поля одновременно с уменьшением максимального растягивающего напряжения происходит его разворачивание по направлению к тепловому источнику, что приводит [1, 14] к наблюдаемому в опытах смещению плоскости разрыва. Это обстоятельство после снятия температурного поля будет способствовать увеличению внешней нагрузки, необходимой для роста щели.

Выводы

Предложена эффективная схема расчета контактных напряжений и напряженно-деформированного состояния среды с частично закрытой щелью переменной ширины в плоскости под действием внешних растягивающих нагрузок.

Литература

1. *Финкель, В. М.* Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М.: Металлургия, 1977. – 360 с.
2. *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
3. *Кадиев, Р. И.* Влияние теплового источника на динамику роста трещины / Р. И. Кадиев, В. М. Мирсалимов // Вестн Дагестан. ун-та. – 2001. – № 4. – С. 69–73.
4. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур* / Под ред. И. И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
5. *Тимошенко, С. П.* Соппротивление материалов: В 2-х т. / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.
6. *Беленький, В. Д.* Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля / В. Д. Беленький // Пробл. прочности. – 1984. – № 6. – С. 35–38.
7. *Кадиев, Р. И.* Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника / Р. И. Кадиев // Вестн. Дагестан. науч. центра РАН. – 2003. – № 14. – С. 15–18.
8. *Галин, Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9, вып. 5. – С. 413–424.
9. *Горячева, И. Г.* Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании / И. Г. Горячева, Н. И. Маланчук, Р. М. Мартыняк // Прикл. математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 5. – С. 695–709.
10. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
11. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
12. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
13. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
14. *Морозов, Е. М.* Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях / Е. М. Морозов. – М.: Атомиздат, 1969. – Вып. 3. – С. 87–90.

Поступила в редакцию 15.08.14