

С помощью полученных результатов можно выполнять расчеты для обмоток, имеющих проводники круглого и прямоугольного сечений без учета и с учетом закруглений его углов. Таким образом, разработан обобщенный метод проверки прочности проводников при изгибе осевыми и радиальными электромагнитными силами короткого замыкания, распространяющийся на все формы сечений проводников, применяемых в силовых трансформаторах.

Метод проверки прочности проводников применяется при расчетах электродинамической стойкости обмоток трансформаторов при коротких замыканиях. Результаты испытаний трансформаторов подтверждают достоверность полученных результатов.

Литература

1. Тихомиров, П. М. Расчет трансформаторов / П. М. Тихомиров : Уч. пособие для вузов. – М. : Энергоатомиздат, 1986 – 528 с.
2. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев: Наук. думка, 1975. – 704 с.
3. *Руководящий документ* РД 16 431-88 «Трансформаторы силовые. Расчет электродинамической стойкости обмоток при коротком замыкании». – М.: Изд-во ВЭИ, 1977. – 95 с.
4. Лазарев, В. И. Влияние прочностных характеристик материала проводников на критические напряжения радиальной устойчивости обмоток трансформаторов / В. И. Лазарев // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України. – К. : Ін-т електродинаміки НАН України. – 2003. – № 3 (6). – С. 80–86.
5. *The Coil Mechanical Behavior under the Short Circuit* / E. Tamaki, A. Kishi, S. Itoh et al. // Mitsubishi Electric Corporation, Japan. CIGRE Transformer Colloquium 1999 in Budapest.
6. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Поступила в редакцию 15.02.15

И. В. Янчевский,

д-р физ.-мат. наук

Институт механики
им. С. П. Тимошенко
НАН Украины
г. Киев, e-mail:
yanchevsky@ukr.net

УДК 534.1:539.3

К ПРОБЛЕМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ, ПРИЛОЖЕННОГО К УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМОМУ ЭЛЕМЕНТУ КОНСТРУКЦИИ

Викладена методика ідентифікації залежності від часу нестационарного впливу, розподіленого на заданій області конструктивного елемента довільної геометрії, за значеннями величини, яка вважається більш доступною для виміру. У припущенні того, що реакція елемента лінійно залежить від шуканого впливу, розглянута задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів, через які шуканий вплив апроксимується кусково-сталою функцією. Для розв'язання системи використовується регуляризуючий алгоритм, який забезпечує стійкість результату до випадкових помилок у вхідних даних і похибок обчислень. Наведені результати конкретних розрахунків, які свідчать про ефективність методики.

Ключові слова: *елемент конструкції, нестационарна задача, ідентифікація впливу, залежність від часу, принцип суперпозиції, функція впливу.*

Введение

Развитие современной техники неразрывно связано с проектированием новых и совершенствованием существующих конструктивных элементов, удовлетворяющих требуемому комплексу механических характеристик. Для достижения этих целей, помимо надежных методов расчета, важно наличие полной и достоверной информации о действующих в процессе эксплуатации этих элементов внешних воздействиях (как механической, так и иной физической природы). Наиболее рациональный подход для их определения предполагает их непосредственное измерение. Однако существует множество ситуаций, когда этот подход либо затруднен, либо требует модификации самой конструкции

(для установки датчиков и/или коммуникаций), что может сопровождаться отклонением деформационных полей от исходных и, соответственно, существенно снижает точность измерения.

Решение данной проблемы возможно посредством технологии не прямых измерений, когда восстановление (идентификация) воздействий осуществляется через регистрацию более доступных для измерения величин, обусловленных действием на конструктивный элемент искомым. Задачи восстановления внешних воздействий по их косвенным проявлениям относятся к классу «граничных обратных задач» (ГОЗ) механики [1], к разработке эффективных методов решения которых в настоящее время наблюдается повышенный интерес в связи с многочисленностью прикладных их приложений, в т.ч. для реконструкции/контроля напряженно-деформированного состояния конструктивного элемента, прогнозирования его динамической прочности, оптимизации формы и геометрии, проч. [1–4].

В исследованиях, посвященных данному классу задач, затрагиваются вопросы восстановления как пространственного распределения внешнего воздействия, так и его зависимости от времени (в случае нестационарных процессов). Методология их решения зачастую предполагает, что реакция системы, а следовательно, и показания связанных с ней датчиков линейно зависят от внешних воздействий и ориентирована на минимизацию несоответствия между показаниями датчиков и результатами моделирования процессов в конструктивном элементе при приложении идентифицированных воздействий. И, как отмечается в ряде работ, наличие неизбежных ошибок в измерениях приводит, скорее, к оцениванию значений искомым функций, нежели к определению «истинных», а восстановление приближенной картины пространственного распределения воздействия по данным измерений в конечном количестве точек возможно лишь при наличии дополнительной, априорной информации относительно характера распределения.

Так, при идентификации нестационарных сил зачастую считается, что нагрузка является сосредоточенной (распределенной на малой области, положение которой заранее неизвестно), а процедура их идентификации заключается в определении на первом этапе приблизительного места приложения нагрузки, а на втором – в восстановлении приближенной временной зависимости за счет локализации зоны поиска. И среди множества существующих методов идентификации, подробную информацию о которых можно найти в работах [4–7], и обзорных публикациях [8, 9] наибольшее развитие получили методы, основанные на технологии частотной области (*frequency domain technique*). Данная технология отработана для идентификации нагрузок, приложенных как к элементам канонической формы [10–12], так и к элементам произвольной геометрии [13–16]. Вместе с тем для достаточно кратковременных нагрузок более точные результаты идентификации могут быть получены на основе технологии временной области (*time domain technique*), реализованных, например, в статьях [5, 17–20] для элементов канонической формы и [15, 21] для элементов сложной геометрии. Данная технология позволяет оценивать значения внешнего воздействия в режиме реального времени, что актуально для задач активного управления поведением конструктивного элемента. Этот подход широко используется и при решении задач восстановления временной составляющей нестационарных распределенных нагрузок в предположении, что границы области ее приложения и характер распределения внутри области известны [2, 19]. Полученные к настоящему времени результаты в рамках данной технологии относятся преимущественно к элементам канонической формы или для нагрузок импульсного типа, для которых возможно построение численно-аналитических решений «прямых задач» (ПЗ), связанных с расчетом на прочность и колебания элементов конструкций при заданном нагружении. При этом методика решения ОЗ строится как их обращение или через трудоемкую процедуру сопоставления результатов.

Вместе с тем для большинства конструктивных элементов, имеющих сложную геометрию модели и содержащих различные конструктивные особенности, построение решений ПЗ даже в области упругих деформаций возможно лишь на основе приближенных, численных методов, наибольшее распространение среди которых получил метод конечных элементов (МКЭ). Однако численные методы, и в т.ч. МКЭ, не адаптированы для непосредственного решения ОЗ. Поэтому разработанные к настоящему времени подходы к идентификации внешних нестационарных воздействий на основе численных методов, и МКЭ в частности, предполагают построение т.н. «функций (коэффициентов) влияния» путем решения одной или серии «вспомогательных» ПЗ, с использованием которых и осуществляется последующая идентификация. Данный подход изложен в работах [3, 22, 23] для при-

ближенного восстановления пространственного распределения квазистатических и периодических во времени нагрузок, и в работе [14] для приближенного восстановления внешнего воздействия, представляющего собой набор сосредоточенных сил.

Настоящая работа посвящена развитию теории и практики решения ГОЗ по восстановлению нестационарных воздействий, в т.ч. импульсных, на конструктивные элементы сложной формы. При этом рассмотрен вопрос идентификации исключительно временной зависимости воздействия в предположении, что его распределение по пространственным координатам известно. Следует отметить работы [3, 9, 24–26], в которых отражены наиболее характерные подходы к идентификации действующих на элементы конструкций воздействий и области приложения ГОЗ механики деформируемого твердого тела.

Постановка задачи

Пусть имеется некоторый конструктивный элемент, геометрия которого, вариант крепления и механические характеристики материалов известны. Динамические процессы в данном элементе происходят в области упругих деформаций и обусловлены приложением внешнего нестационарного воздействия, распределение которого по пространственным координатам известно, а закон изменения во времени, обозначенный через $\tilde{Z}(t)$, подлежит идентификации. Для восстановления $\tilde{Z}(t)$ используется величина $\tilde{V}(t)$, которая считается доступной для натурального измерения и отражает динамику некоторого регистрируемого параметра, возникающего от действия $\tilde{Z}(t)$.

Метод решения

Восстановление зависимости от времени внешнего нестационарного воздействия по данным регистрации их косвенных проявлений представляет достаточно сложную задачу вследствие чувствительности результата к погрешностям измерений. Одним из приемов обеспечения устойчивости счета, а в ряде случаев и реализуемости решения задачи вообще, является снижение требований к количеству получаемой из результата информации. В настоящей работе этот прием заключается в аппроксимации искомой зависимости $\tilde{Z}(t)$ кусочно-постоянной функцией $\tilde{Z}(t)$, которая в пределах некоторого n -го временного интервала между моментами $t = T_{n-1}$ и $t = T_n$ принимает постоянное значение \tilde{q}_n

$$\tilde{Z}(t) \approx Z(t) = \sum_{n=1}^N \tilde{q}_n [H(t - T_{n-1}) - H(t - T_n)], \quad (1)$$

где T_n – фиксированные моменты времени, удовлетворяющие условию $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T_{\text{inv}}$; T_{inv} – время исследования; $H(t)$ – функция Хевисайда.

Поскольку считается, что справедлив принцип суперпозиции [27] и реакция конструктивного элемента на внешние воздействия является линейной, то показания регистрируемой величины $\tilde{V}(t)$ посредством «метода наложения» (суммирование эффектов от всех ранее приложенных импульсов) может быть приближенно описана совокупностью некоторых функций $\hat{V}_n(t)$, отражающих показания регистрируемой величины на элементарный единичный импульс длиной $T_n - T_{n-1}$

$$\tilde{V}(t) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{q}_n H(t - T_{n-1}) \hat{V}_n(t - T_{n-1}).$$

Однако не всегда такой вариант представления измеренной величины, т.е. как совокупность функций $\hat{V}_n(t)$, соответствующих кратковременным воздействиям, оказывается наилучшим. Иногда в качестве $\hat{V}_n(t)$ более удобно определить реакцию регистрируемой величины на внезапно приложенное постоянное возмущающее воздействие [28]. Здесь под $\hat{V}_n(t)$ будем понимать «функцию влияния», описывающую изменение во времени регистрируемой величины при приложении заданного внешнего воздействия с определенной конфигурацией при нулевых начальных условиях. Так, если

ввести в рассмотрение единичное воздействие $\bar{Z}(t) = H(t)$, то искомая функция $Z(t)$ вместо следующих один за другим конечных N импульсов амплитудой \tilde{q}_n и продолжительностью $T_n - T_{n-1}$ (см. (1)) может быть приближенно описана последовательностью N ступенчатых функций, возникающих в моменты времени T_{n-1}

$$Z(t) = \sum_{n=1}^N q_n H(t - T_{n-1}) \bar{Z}(t - T_{n-1}). \quad (2)$$

Тогда заданная величина $\tilde{V}(t)$ будет приближенно равна совокупности функций $\bar{V}(t)$, как показания регистрируемой величины при действии $\bar{Z}(t)$, с учетом сдвижки по времени T_{n-1} и коэффициентов q_n (см. (2)), принимающих смысл весовых коэффициентов:

$$\tilde{V}(t) \approx \sum_{n=1}^N q_n H(t - T_{n-1}) \bar{V}(t - T_{n-1}). \quad (3')$$

При этом между коэффициентами \tilde{q}_n и q_n , фигурирующими в (1) и (2), справедливо соотношение

$$\tilde{q}_n = \sum_{k=1}^n q_k.$$

Следует отметить, что функция $\bar{V}(t)$ может быть определена либо экспериментально (если возможна реализация близкого по конфигурации к $\bar{Z}(t)$ воздействия), либо методами математического моделирования на основании решения соответствующей ПЗ нестационарной механики, в частности методом конечных элементов, как достаточно универсального и мощного метода инженерного анализа, положенного в основу многочисленных программных комплексов. Однако для современной практики как экспериментальных исследований, так и компьютерного моделирования, вместо непрерывных величин $\tilde{V}(t)$ и $\bar{V}(t)$, как правило, имеют место дискретные, представляющие собой массивы значений соответствующих функций для равноотстоящих точек с шагом Δt исследуемого временного интервала. Поэтому вместо выражения (3') более уместен следующий вариант его записи:

$$\tilde{\mathbf{V}}_m = \sum_{n=1}^N q_n H(m - M_{n-1}) \bar{\mathbf{V}}_{m - M_{n-1}}, \quad (3'')$$

где $\tilde{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{V}}$ – столбцевые матрицы с элементами $\tilde{\mathbf{V}}_m = \tilde{V}(m\Delta t)$; $\bar{\mathbf{V}}_m = \bar{V}(m\Delta t)$ ($m = 1, 2, \dots, M_N$, $n = 1, 2, \dots, N$; $M_n = E(T_n/\Delta t)$, $E(x)$ – целая часть аргумента).

Таким образом, задача приближенного восстановления $\tilde{Z}(t)$ сводится к отысканию таких коэффициентов q_n ($n = 1, 2, \dots, N$), которые бы наилучшим образом обеспечивали выполнение равенства (3'') в предположении того, что $\tilde{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{V}}$, Δt и T_n ($n = 1, 2, \dots, N$) известны. Последние (T_n) либо задаются исходя из априорной информации о гладкости решения, либо выбираются на основании анализа полученных результатов. Следует отметить, что в обратных задачах с уменьшением длины отрезков $T_n - T_{n-1}$ увеличивается вероятность потери устойчивости вычислительного процесса.

Процедура вычисления коэффициентов q_n может быть построена на основе метода наименьших квадратов, когда эти коэффициенты принимаются такими, чтобы минимизировать квадратичные функции J_n , вводимых в рассмотрение на каждом временном интервале n

$$J_n = \sum_{m=M_{n-1}+1}^{M_n} \left(\tilde{\mathbf{V}}_m - \sum_{k=1}^n q_k \bar{\mathbf{V}}_{m - M_{k-1}} \right)^2 = \left\| \tilde{\mathbf{V}}_{(n)} - \sum_{k=1}^n q_k \bar{\mathbf{V}}_{(n-k+1)} \right\|_2^2. \quad (4)$$

Здесь величины с нижним индексом в скобках обозначают подматрицы соответствующих столбцевых матриц – $\mathbf{X}_{(n)} = [\mathbf{X}_{M_{n-1}+1} \quad \mathbf{X}_{M_{n-1}+2} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{M_n}]^T$ ($\mathbf{X} = \bar{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{V}}$); $\|\mathbf{X}\|_2$ – евклидова норма матрицы столбца \mathbf{X} .

Задачи отыскания $\min_{q_n} J_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) эквивалентны решению уравнений $dJ_n/dq_n = 0$. В результате несложных математических преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в матричном виде запишется следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{Y}. \quad (5)$$

Матрица \mathbf{A} , которая по аналогии с [24] может быть названа матрицей чувствительности, является нижней треугольной ($N \times N$)-матрицей Тépлица, а \mathbf{q} и \mathbf{Y} – ($N \times 1$)-матрицы, элементы которых:

$$\mathbf{A}_{n,k} = \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(n-k+1)}; \quad \mathbf{q}_n = q_n; \quad \mathbf{Y}_n = \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(n)}; \quad (n = 1, 2, \dots, N; k = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Здесь индекс Т обозначает операцию транспонирования.

Структура матрицы \mathbf{A} позволяет реализовать процедуру поэлементного вычисления \mathbf{q}_n посредством следующего рекуррентного выражения:

$$\mathbf{q}_n = \left(\mathbf{Y}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_{n,k} \mathbf{q}_k \right) / \mathbf{A}_{n,n} \quad (n = \overline{1, N}),$$

или, если учесть особенность матрицы \mathbf{A} , заключающейся в равенстве элементов на диагоналях, параллельных главной, на основании равенства

$$\mathbf{q}_n = \left(\mathbf{Y}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_{N, N-n+k} \mathbf{q}_k \right) / \mathbf{A}_{N,N}. \quad (7)$$

Однако правая часть СЛАУ (5) зачастую содержит случайные ошибки измерения и погрешности обработки и передачи данных. Поэтому полученный на основании рекуррентной формулы (7) результат, несмотря на некоторый сглаживающий эффект от кусочно-постоянной аппроксимации (1), скорее всего, будет лишен физического смысла. Построение устойчивого к ошибкам в исходных данных решения требует привлечения регуляризирующих процедур, развитых для решения некорректных задач математической физики. В настоящее время существует множество методов регуляризации, которые, в отличие от (7), обеспечивают одновременное вычисление всех элементов столбца \mathbf{q} . Наибольшее распространение среди этих методов получил метод, изложенный в трудах А. Н. Тихонова, в рамках которого задача (5) подменяется решением СЛАУ

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}, \quad (8)$$

которое вытекает из условия $\min_{\mathbf{q}} (\|\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{Y}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{L}\mathbf{q}\|_2^2)$, представляющего собой минимизацию аналога сглаживающего функционала (\mathbf{L} – регуляризирующая матрица).

Важным этапом метода Тихонова является подбор входящего в расчетную СЛАУ (8) параметра регуляризации α ($\alpha > 0$). Известно, что выбор достаточно больших значений α ведет к нулевому решению, а достаточно малых – не к нормальному псевдорешению исходной СЛАУ, а к неустойчивому вычислительному процессу при плохой обусловленности матрицы \mathbf{A} . Следовательно, эти варианты значений α исключаются. Широко используемые при решении некорректных задач математической физики способы выбора α , в частности, методом невязки, асимптотическим, квазиоптимальным, несоответствия [3, 29, 30] требуют согласования α с ошибками в исходных данных. Однако для современной практики измерений даже приближенная оценка этих данных составляет достаточно сложную задачу. Поэтому некоторые авторы прибегают к процедуре непосредственного перебора значений, ориентируясь на такое α , которое, по их мнению, обеспечивает наилучший результат идентификации. Работоспособность данного подхода объясняется тем фактом, что при неизменной матрице и правой части исходной СЛАУ с увеличением регуляризирующего параметра среднеквадратичная погрешность решения δ сначала убывает и влияние параметра α на нее ослабевает и при α в окрестности некоторого α_δ значение δ практически не зависит от α . Именно это значение параметра и принимается, зачастую в качестве расчетного, поскольку с дальнейшим увеличением α погрешность

δ начинает возрастать. Следует отметить, что количество итераций и, соответственно, вычислительных операций для установления α_δ может быть существенно уменьшено, если варьировать порядком параметра α , приняв за начальное значение $\text{Sp}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})/\text{Sp}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})$, и проводить вычисления для диапазона значений $\alpha \in (\sigma_r^{2/3}; \sigma_1^{2/3})$, где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ – сингулярные числа матрицы \mathbf{A} [3, 29, 31]. Но несмотря на простоту этого подхода и его эффективность, хотя бы для случаев, когда имеется некая априорная информация об области возможных значений искомого решения из обработки предшествующих «близких» примеров (степень гладкости, количество экстремумов и т.д.), этот подход следует рассматривать как субъективный. Этим объясняется появление в последние годы автоматизированных методов выбора параметра α , не требующих априорной информации о решении, в частности, методы «L-кривой» (L-curve method) [23, 32], «U-кривой» (U-curve method) [31, 33] и «обобщенной перекрестной проверки» (generalized cross-validation method) [34], детальную информацию о которых можно найти также в статьях [31, 35] и монографиях [3, 36]. Однако практика решения ОЗ, как отмечается и в [37], показала многочисленность ситуаций, в которых реализация данных методов сопряжена с некоторыми математическими сложностями, проявляющимися, например, в отсутствии четко выраженного угла в L-кривой или локального минимума U-кривой на области определения значений параметра регуляризации α . Это обстоятельство определяет необходимость дальнейших теоретических и прикладных исследований по методам поиска оптимального α . В настоящей работе при проведении численных экспериментов значение α принималось равным $100\sigma_r^{2/3}$.

Располагая значениями q_n на заключительном этапе, после решения регуляризованной СЛАУ (8), восстанавливается приближенный профиль искомой функции $\tilde{Z}(t)$ с учетом соотношения

$$\tilde{q}_n = \sum_{k=1}^n q_k \text{ и равенства (1).}$$

Следует отметить, что отыскание коэффициентов q_n может быть реализовано также исходя из условия минимизации суммы квадратов (4) по параметрам q_k ($k = 1, 2, \dots, n$), рассматривая последние как независимые переменные каждой невязки J_n ($n = 1, 2, \dots, N$). На основании равенств $dJ_n/dq_k = 0$ получится СЛАУ, представляющая собой совокупность систем нормальных уравнений. Матричное представление этой СЛАУ аналогично (5), однако структура матрицы \mathbf{A} , и соответствующая ей правая часть \mathbf{Y} будут иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(2)} & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \\ \bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(2)} & \bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \end{matrix}} & & & \\ & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\begin{matrix} \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(3)} & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(2)} & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \\ \bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(3)} & \bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(2)} & \bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \\ \bar{\mathbf{V}}_{(3)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(3)} & \bar{\mathbf{V}}_{(3)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(2)} & \bar{\mathbf{V}}_{(3)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \end{matrix}} & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots \\ & \boxed{\begin{matrix} \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N)} & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N-1)} & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N-2)} & \dots & \bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{V}}_{(N)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N)} & \bar{\mathbf{V}}_{(N)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N-1)} & \bar{\mathbf{V}}_{(N)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(N-2)} & \dots & \bar{\mathbf{V}}_{(N)}^T \bar{\mathbf{V}}_{(1)} \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(1)}} \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(2)}} \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(2)}} \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(3)}} \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(2)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(3)}} \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(3)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(3)}} \\ \vdots \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(1)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(N)}} \\ \vdots \\ \boxed{\bar{\mathbf{V}}_{(N)}^T \tilde{\mathbf{V}}_{(N)}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

в котором выделение блоками выполнено исключительно для удобства ее чтения. Методология решения данной СЛАУ аналогична изложенной выше.

Очевидно, что наряду с изложенными выше подходами к построению расчетной СЛАУ могут быть рассмотрены и другие ввиду многообразия вариантов аппроксимации искомого воздействия $Z(t)$, отличных от описанных выше.

Численные результаты

В качестве первого модельного примера рассмотрена задача восстановления временной зависимости механической нагрузки $\tilde{Z}(t)$, равномерно распределенной по рабочей поверхности пьезоэлектрического датчика давления, конструкция и геометрия которого приведены в [38]. Предполагается, что корпус датчика изготовлен из титанового сплава ВТ-6, а пьезоактивный элемент, который при моделировании может быть представлен цилиндрической оболочкой со сплошными токопроводящими покрытиями на цилиндрических поверхностях, – из поляризованной по толщине пьезокерамики PZT-5 (физические свойства материалов можно найти в [39]). Считается, что потенциал на внешнем электроде равен нулю, а на внутреннем – обозначен через $\tilde{V}(t)$. Для формирования функции $\tilde{V}(t)$, используемой в качестве исходных данных к данной задаче, на первом этапе с помощью конечноэлементного программного комплекса была решена соответствующая ПЗ (при заданной внешней нагрузке, профиль которой выбран в виде изображенной на рис. 1, а тонкой кривой 0). Время исследования – $T_{inv} = 136$ мкс; шаг по времени Δt для численного решения расчетной системы дифференциальных уравнений, как и размеры и порядок конечных элементов, выбраны из условия сходимости результатов ($\Delta t = 0,5$ мкс). Начальный момент приложения нагрузки не совпадает с начальным моментом времени $t = 0$, а смещен на некоторый произвольный временной интервал, что отражено на рис. 1, а. График вычисленной комплексом разности потенциалов между разомкнутыми электродами пьезоэлемента представлен на рис. 1, б тонкой кривой. Далее на эти значения был наложен «шум» с нулевым средним математическим ожиданием и амплитудой в 5% от максимального значения функции на расчетном временном интервале. Данная операция связана с имитацией случайных ошибок натуральных измерений и передачи/обработки данных измерительной аппаратурой, а выбранное значение амплитуды с запасом перекрывает порядок точности, соответствующий современной практике измерений. Полученная в результате «зашумленная» функция $\tilde{V}(t)$ (рис. 1, б) и принималась как измеренная величина для восстановления $\tilde{Z}(t)$.

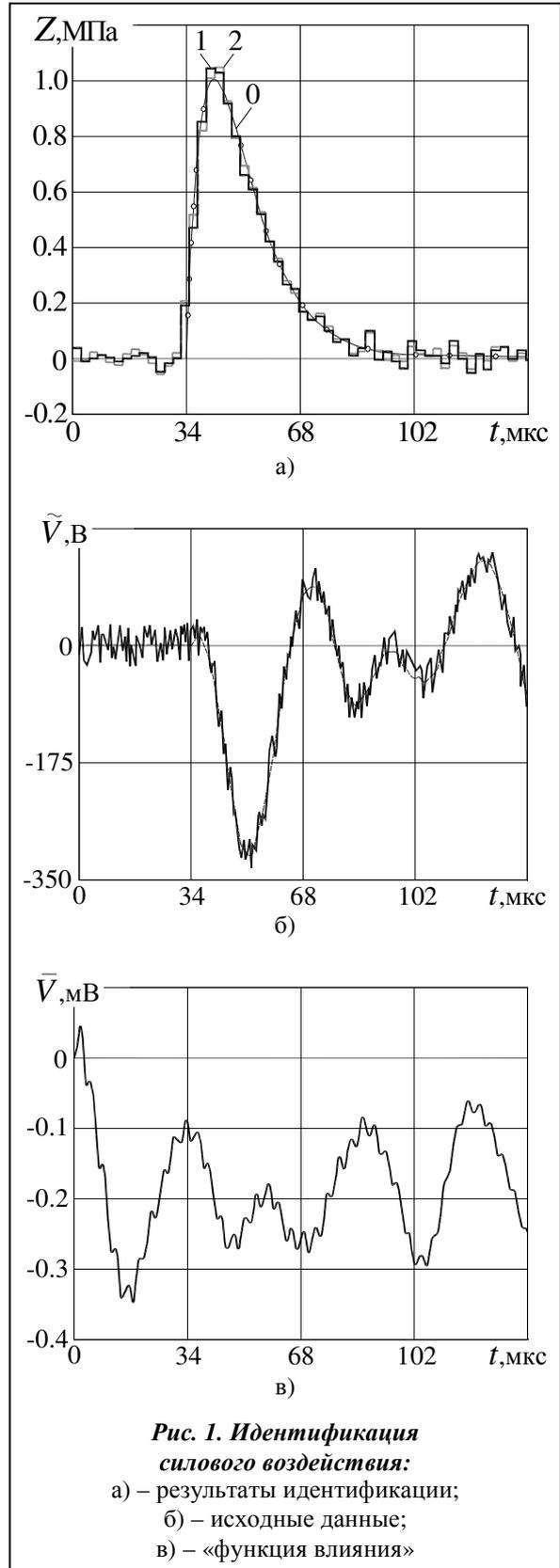
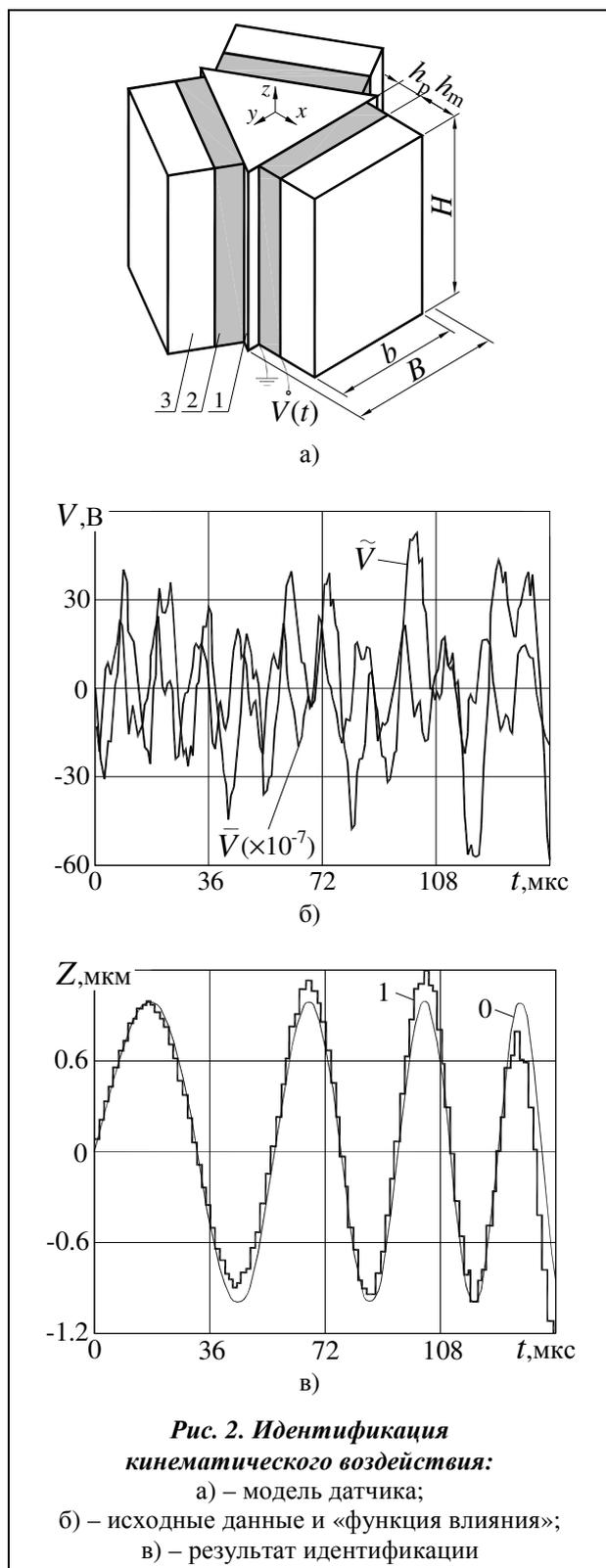


Рис. 1. Идентификация силового воздействия:

- а) – результаты идентификации;
- б) – исходные данные;
- в) – «функция влияния»



основания $B = 9$ мм, элементов 2 и 3 – толщинами $h_p = 1$ мм и $h_m = 2$ мм соответственно, шириной $b = 8$ мм и высотой H . На лицевые поверхности пьезоэлементов нанесены сплошные токопроводящие покрытия, а посредством клеевого соединения этими поверхностями пьезоэлементы жестко соединены с инерционными элементами 3 и боковыми поверхностями 1 (рис. 2, а). Считается, что упругие

Необходимая для реализации изложенного в настоящей работе подхода функция $\bar{V}(t)$, соответствующая действию ступенчатой единичной нагрузки $\bar{Z}(t) = H(t)$, также определялась при конечно-элементном моделировании нестационарного деформирования пьезоэлектрического датчика. Соответствующие результаты изображены на рис. 1, в.

Располагая значениями $\tilde{V}_m = \tilde{V}(m\Delta t)$ и $\tilde{V}_m = \bar{V}(m\Delta t)$, формируется СЛАУ (5), решение которой, как и последующее восстановление профиля \tilde{Z} , не составляет принципиальных затруднений. Следует отметить, что при решении (5) использовался классический вариант алгоритма Тихонова со стабилизатором 0-го порядка (L – единичная $(N \times N)$ -матрица), временные интервалы для аппроксимации \tilde{Z} кусочно-постоянной функцией приняты равными $5\Delta t$ ($T_n - T_{n-1} = 5\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$). Результаты восстановления \tilde{Z} представлены на рис. 1, а кривыми 1 и 2. При этом кривая 1 соответствует варианту, когда элементы матрицы A и вектора Y вычислялись по формулам (6), а кривая 2 – когда они имели приведенную в (9) структуру.

Из сопоставления представленных на рис. 1, б кривых можно сделать вывод об эффективности изложенного в работе подхода, поскольку восстановленные идентифицированные функции (кривые 1 и 2) адекватно отражают профиль «исходной» (кривая 0). Сходство кривых 1 и 2 при этом подчеркивает некоторое преимущество формул (6), используемых при формировании матрицы A и матрицы-столбца Y , ввиду меньшей размерности расчетной СЛАУ и меньшего количества вычислительных операций.

В качестве второго примера рассмотрена задача идентификации кинематического воздействия на пьезоэлектрический акселерометр типа 8361 фабричной марки Delta Shear® фирмы «Brüel & Kjær» [40], геометрическая модель которого изображена на рис. 2, а. Он состоит из упругого сердечника 1 в виде прямой призмы с равносторонним треугольником в основании, поляризованных вдоль продольной оси акселерометра пьезокерамических элементов 2, а также инерционных элементов 3 из упругого материала, которые имеют форму прямоугольных параллелепипедов. Геометрия сердечника 1 определяется высотой $H = 8$ мм и длиной стороны

элементы акселерометра 1 и 3 (рис. 2, а) изготовлены из нейзильбера МНц15-20 ($E = 13 \cdot 10^{10}$ Н/м² – модуль Юнга; $\nu \approx 0,31$ – коэффициент Пуассона; $\rho = 8650$ кг/м³ – плотность материала), а электроупругие элементы 2 – из поляризованной вдоль оси z пьезокерамики марки PZT-5. Предполагается, что нижняя грань сердечника 1 связана с некоторым контролируемым объектом, который совершает направленные вдоль продольной оси акселерометра колебания с неизвестным законом изменения во времени $Z(t)$. Постановка задачи заключается в восстановлении зависимости $Z(t)$ по разности потенциалов $V(t)$, возникающей между разомкнутыми электродами пьезоэлементов 2 в результате их сдвиговых деформаций.

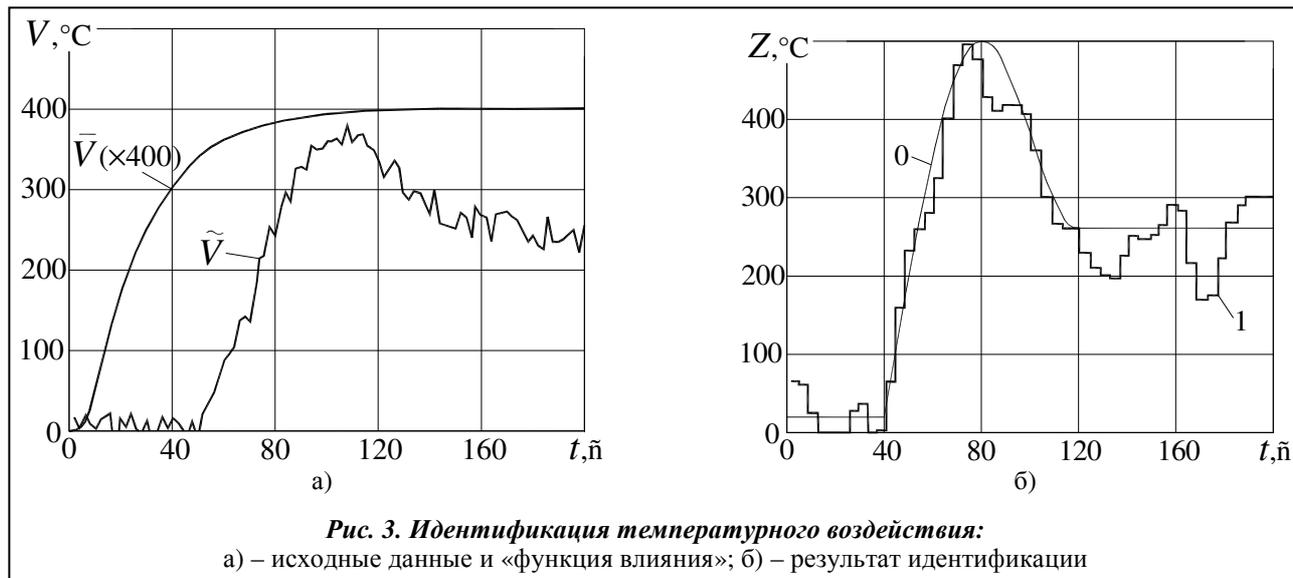
Представленная на рис. 2, б кривая $\tilde{V}(t)$ иллюстрирует «искаженные» результаты решения ПЗ посредством аддитивного шума в 5% от максимального значения на исследуемом временном интервале с нормальным распределением. При решении данной ПЗ функция $Z(t)$, которая описывала вертикальные перемещения нижней грани сердечника 1 исследуемой модели, задавалась в виде синусоиды с линейно нарастающим значением частоты – $Z(t) = u_0 \sin[(\omega_1 + \varepsilon t)t]$ (кривая 1 на рис. 2, в), где $u_0 = 1$ мкм – амплитуда колебаний; $\omega_1 = 80$ кГц – частота в начальный момент времени ($t = 0$); $\varepsilon = (\omega_2 - \omega_1)/T_{inv}$ – девиация частоты; $\omega_2 = 2\omega_1$ – частота в конечный момент ($t = T_{inv} = 143,6$ мкс). Шаг по времени Δt принимался равным $T_{inv}/200$. Кривой $\tilde{V}(t)$ на рис. 2, б показано с масштабным коэффициентом 10^{-7} (для удобства отображения результатов) изменение во времени разности потенциалов между разомкнутыми электродами пьезоэлементов, возникающее при единичном кинематическом возбуждении основания сердечника модели ($Z(t) = H(t)$).

Результат идентификации при $T_n - T_{n-1} = 2\Delta t$ ($n = 1, 2, \dots, N$), который представлен на рис. 2, в кривой 1, также качественно и количественно близок к точным значениям (кривая 0).

В качестве третьего примера рассмотрена ГОЗ нестационарной теплопроводности по восстановлению температурного поля $Z(t)$ на внешней поверхности полого цилиндра в предположении того, что известно изменение во времени температуры $\tilde{V}(t)$ на внутренней. Расчеты выполнены для трехслойного цилиндра с внутренним радиусом $R_0 = 5$ мм и толщинами слоев $h_1 = 2$ мм, $h_2 = 5$ мм и $h_3 = 2$ мм, изготовленных из термонечувствительных материалов со следующими механическими и теплофизическими свойствами: $E_1 = 113$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $E_3 = 73$ ГПа – модули упругости; $\nu_1 = 0,32$, $\nu_2 = 0,3$, $\nu_3 = 0,34$ – коэффициенты Пуассона; $\rho_1 = 4450$ кг/м³, $\rho_2 = 7850$ кг/м³, $\rho_3 = 2690$ кг/м³ – плотности; $c_1 = 540$ Дж/(кг·°С), $c_2 = 570$ Дж/(кг·°С), $c_3 = 760$ Дж/(кг·°С) – удельные теплоемкости; $\lambda_1 = 8$ Вт/(м·°С), $\lambda_2 = 35$ Вт/(м·°С), $\lambda_3 = 8$ Вт/(м·°С) – коэффициенты теплопроводности; $\alpha_1 = 9 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, $\alpha_3 = 2,4 \cdot 10^{-6}$ 1/°С – коэффициенты температурного расширения. Предполагалось, что в начальный момент времени температура слоев равна 20°С.

Исходные данные, как функция $\tilde{V}(t)$ (рис. 3, а), были получены методом конечных элементов с последующим наложением «шума» амплитудой 5% от максимального значения на исследуемом временном интервале. При этом температура на внешней поверхности задавалась по закону, график которой изображен на рис. 3, б кривой 0. Аналогично, методом конечных элементов, была смоделирована реакция слоистой структуры на единичное тепловое нагружение внешней цилиндрической поверхности. Соответствующие значения температуры на внутренней поверхности представлены с масштабным коэффициентом 400 на рис. 3, а. Особенностью данного примера является то, что при определении элементов правой части СЛАУ (5) в силу линейности постановки задачи и неучете ее при вычислении $\tilde{V}(t)$ из значений функции $\tilde{V}(t)$ была вычтена начальная температура слоев, которая после решения СЛАУ (8) была прибавлена к результату идентификации, график которой для $T_n - T_{n-1} = 2\Delta t$ ($n = 1, 2, \dots, N$) иллюстрирует ломаная линия 1 на рис. 3, б.

Из сопоставления представленных на рис. 1, а, 2, в и 3, б кривых следует, что восстановленные значения функции $Z(t)$ (кривые 1) удовлетворительно согласуются с истинными значениями (кривые 0), при этом расхождение по максимальным значениям на исследуемом временном интервале не превышает 10%, что может считаться вполне приемлемым для современной практики идентификации и потому свидетельствует об эффективности изложенной методики к решению широкого класса ГОЗ нестационарной механики в линейной постановке.



Выводы

Таким образом, в настоящей работе представлена методика восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, распределенного известным образом на заданной области конструктивного элемента произвольной геометрии. В качестве исходных данных выступает величина, которая считается доступной для натурных измерений, а ее изменение во времени обусловлено действием искомого воздействия. Методика развита на принципе суперпозиции и предположении, что реакция конструктивного элемента линейно зависит от действующего на него воздействия. Для реализации метода искомое воздействие аппроксимировано кусочно-постоянной функцией, для определения коэффициентов которой на основании метода наименьших квадратов сформирована расчетная система линейных алгебраических уравнений. Элементы этой системы определяются как показаниями регистрируемой величины, так и результатами решения «прямой задачи» при ступенчатом единичном воздействии, например, методом конечных элементов. Решение упомянутой расчетной системы осуществляется с привлечением классического алгоритма регуляризации Тихонова, обеспечивающего устойчивость результата к случайным ошибкам в исходных данных. Выполненные численные эксперименты по идентификации силового, кинематического или температурного воздействия, свидетельствуют об эффективности изложенной методики к решению широкого класса «граничных обратных задач».

К достоинствам методики следует отнести относительную устойчивость результатов к случайным ошибкам в исходных данных, что обеспечивается не только привлечением регуляризирующей процедуры, но также и подменой искомой непрерывной функции кусочно-постоянным аналогом, что приводит к существенному уменьшению размера расчетной СЛАУ. Данная методика также не требует синхронизации моментов времени начала исследования и действия нагрузки, что естественно для практики, поскольку в подавляющем большинстве случаев момент начала действия нагрузки заранее неизвестен или его трудно зафиксировать.

Преимуществом изложенной методики от численно-аналитических методов решения ГОЗ помимо возможности его реализации для элементов сложной геометрии является следующий момент. Так, при решении ГОЗ методами операционного исчисления задача зачастую сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра I-го рода, у которой в сравнении с расчетной системой интегральных уравнений для соответствующей ПЗ количество уравнений больше (на количество идентифицируемых функций). Но поскольку решение интегрального уравнения Вольтерра I-го рода уже составляет некорректную задачу вычислительной математики, то увеличение порядка системы лишь усугубляет проблему построения приближенного ее решения. Изложенная методика, очевидно, лишена этого недостатка, поскольку предполагает решение исключительно ПЗ, а степень адекватности моделирования реальных процессов через их решение (с целью построения «функции влияния») и определяет качество идентификации/восстановления искомого функций.

Качество идентификации зависит не столько от точности решения СЛАУ (5) и устойчивости вычислительного алгоритма к ошибкам в исходных данных, сколько от достоверности и точности моделирования динамических процессов в исследуемом конструктивном элементе, проводимых с целью построения «функции влияния», а этот момент полностью определяется современными успехами в решении ПЗ механики деформируемого твердого тела.

Изложенная методика может быть развита на случай идентификации временной зависимости воздействия с переменной, вместе с тем с известной как функция времени областью его распределения, а также может быть положена в основу методов восстановления пространственно-временной зависимости внешнего воздействия, приложенных к конструктивным элементам сложной геометрии.

Литература

1. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.
2. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воропай, А. С. Шарапата. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Doyle, J. F. Modern experimental stress analysis / J. F. Doyle. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004. – 424 p.
4. Maia, N. M. M. Recent advances on force identification in structural dynamics / N. M. M. Maia, Y. E. Lage, M. M. Neves // In book „Advances in vibration engineering and structural dynamics”, ed. by F. Beltran-Carbajal. – 2012. – Ch. 6. – P. 103–132.
5. Hu, N. An efficient approach for identifying impact force using embedded piezoelectric sensors / N. Hu, H. Fukunaga [et al.] // Int. J. Impact Eng. – 2007. – Vol. 34. – P. 1258–1271.
6. Inoue, H. Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force / H. Inoue, J. J. Harrigan, S. R. Reid // Appl. Mech. Rev. – 2001. – Vol. 56. – P. 503–524.
7. Yan, G. Impact load identification of composite structure using genetic algorithms / G. Yan, Li. Zhou // J. Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 319. – P. 869–884.
8. Martin, M. T. Impact force identification from wave propagation responses / M. T. Martin, J. F. Doyle // Int. J. Impact Engineering. – 1996. – Vol. 18. – P. 65–77.
9. Stevens, K. K. Force identification problem – An overview / K. K. Stevens // Proc. of Spring Conf. on Experimental Mech. Florida. USA. – 1987. – P. 838–844.
10. Boukria, Z. Experimental impact force location and identification using inverse problems: application for a circular plate / Z. Boukria, P. Perrotin, A. Bennani // Int. J. Mech. – 2011. – Vol. 5, № 1. – P. 48–55.
11. Lee, S.-K. Identification of impact force on a thick plate based on the elastodynamic and higher-order time-frequency analysis / S.-K. Lee, S. Banerjee, A. Mal // Proc. IMechE. Part C: J. Mech. Eng. Sci. – 2007. – Vol. 221. – P. 1249–12.
12. Wang, B.-T. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam / B.-T. Wang, Ch.-H. Chiu // Mech. Systems and Signal Processing. – 2003. – Vol. 17, № 3. – P. 683–704.
13. Gombi, Sh. L. A solution to the inverse problem of impact force determination from structural responses / Sh. L. Gombi, D. S. Ramakrishna // Int. J. Eng. and Innovative Techn. – 2012. – Vol. 1, № 3. – P. 192–196.
14. Lage, Y. E. Force identification using the concept of displacement transmissibility / Y. E. Lage, N. M. M. Maia, M. M. Neves, A. M. R. Ribeiro // J. Sound and Vibration. – 2013. – Vol. 332. – P. 1674–1686.
15. Wang, B.-T. Determination of unknown impact force acting on arbitrary structures / B.-T. Wang, Ch.-H. Chiu // Proc. Int. Soc. for Optical Engineering. – 1999. – Vol. 2. 3727. – P. 1653–1659.
16. Turco, E. A strategy to identify exciting forces acting on structures / E. Turco // Int. J. for Num. Meth. in Eng. – 2005. – Vol. 64, № 11. – P. 1483–1508.
17. Atobe, S. Impact force identification of CFRP structures using experimental transfer matrices / S. Atobe, H. Fukunaga, N. Hu // Comput. Mat. Contin. – 2011. – Vol. 26, № 1. – P. 67–90.
18. Chen, Ch. Impact source identification in finite isotropic plates using a time-reversal method: experimental study / Ch. Chen, Yu. Li, F.-G. Yuan // Smart Mater. Struct. – 2012. – Vol. 21. – P. 105–129.
19. El Khannoussi, F. Reconstruction of a distributed force impacting an elastic rectangular plate / F. El Khannoussi, A. Hajraoui, A. Khamlichi [et al.] // J. Basic. Appl. Sci. Res. – 2010. – Vol. 1, № 1. – P. 20–30.
20. Jacquelin, E. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem / E. Jacquelin, A. Bennani, P. Hamelin // J. Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 265. – P. 81–107.
21. Allen, M. S. Comparison of inverse structural filter (ISF) and sum of weighted accelerations technique (SWAT) time domain force identification methods / M. S. Allen, Th. G. Carne // Mech. Systems and Signal Proc. – 2008. – Vol. 22. – P. 1036–1054.
22. Соловьев, А. Н. Прямые и обратные задачи для конечных упругих и электроупругих тел / А. Н. Соловьев // Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. РГУ, Ростов-н/Д (РФ), 2005. – 296 с.

23. Romppanen, A.-J. Inverse load sensing method for line load determination of beam-like structures / A.-J. Romppanen // Thesis for the degree of Doctor of Technology. Tampere University of Technology. – 2008. – Publ. 762. – 116 p.
24. Бек, Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
25. Мацевитый, Ю. М. Идентификация изменения температуры пламени при воздействии его на строительные конструкции / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 80–86.
26. Uhl, T. The inverse identification problem and its technical application / T. Uhl // Arch. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 77, № 5. – P. 325–337.
27. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний: Уч. для вузов / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
28. Слепьян, Л. И. Нестационарные упругие волны / Л. И. Слепьян. – Л.: Судостроение, 1972. – 376 с.
29. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
30. Engl, H. W. Regularization of inverse problems / H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. – The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. – 321 p.
31. Krawczyk-Stańdo, D. The use of L-curve and U-curve in inverse electromagnetic modelling / D. Krawczyk-Stańdo, M. Rudnicki // Intell. Comput. Tech. Appl. Electromagn. – 2008. – Vol. 119. – P. 73–82.
32. Hansen, P. C. The use of L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems / P. C. Hansen, D. P. O’Leary // SIAM J. Sci. Comput. – 1993. – Vol. 14, № 6. – P. 1487–1503.
33. Feasibility of U-curve method to select the regularization parameter for fluorescence diffuse optical tomography in phantom and small animal studies / J. Chamorro-Servent, J. Aguirre, J. Ripoll, et al. // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, № 12. – P. 11490–11506.
34. Choi, H. G. Comparison of methods for parameter selection in Tikhonov regularization with application to inverse force determination / H. G. Choi, A. N. Thite, D. J. Thompson // J. of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 304. – P. 894–917.
35. Hanke, M. Regularization methods for large scale problems / M. Hanke, P. C. Hansen // Surv. Math. Ind. – 1993. – Vol. 3. – P. 253–315.
36. Vogel, C. R. Computational methods for inverse problems / C. R. Vogel. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
37. Ягола, А. Г. Некорректные задачи с априорной информацией / А. Г. Ягола // Сиб. электрон. мат. изв. – 2010. – С. 343–361.
38. Богуш, М. В. Проектирование пьезоэлектрических датчиков на основе пространственных электротермоупругих моделей / М. В. Богуш. – М.: Техносфера, 2014. – 312 с.
39. Кубенко, В. Д. Колебания незамкнутой двухслойной (металл-пъезокерамика) сферической оболочки при импульсном электромеханическом нагружении / В. Д. Кубенко, И. В. Янчевский // Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 60–73.
40. Янчик, В. В. Пьезоэлектрические датчики вибрационного и ударного ускорения: учеб. пособие / В. В. Янчик. – Ростов-н/Д: Изд-во Южн. федеральн. ун-та, 2008. – 77 с.

Поступила в редакцию 25.12.14