

**М. М. Фридман,**

канд. техн. наук

Криворожский металлургический институт  
Национальной металлургической академии Украины,  
г. Кривой Рог,  
e-mail: mark17@i.ua

УДК 624.04

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
ТРУБЧАТЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ,  
ПОДВЕРЖЕННЫХ КОРРОЗИИ***Це дослідження присвячене оптимальному проектуванню трубчастих стержневих конструкцій, що зазнають впливу корозійного середовища. Вплив напруженого стану на кінетику корозії конструкції враховується за допомогою корозійної моделі Долинського. Як цільова функція приймається економічна модель, що враховує, крім початкової вартості конструкції, надійність і витрати, викликані її відмовою. Оптимізуються початкові розміри перерізів трубчастих елементів, а також їх розрахункові опори.***Ключові слова:** корозія, оптимізація, надійність.**Введение**

В процессе эксплуатации зданий и сооружений в агрессивных средах их конструкции подвергаются как механическому, так и химическому воздействию, в частности, коррозионному износу. Влияние напряжений на скорость коррозии в расчетах конструкций впервые было учтено В. М. Долинским [1], исследовавшим прочность растягиваемой тонкостенной трубы, подвергающейся сплошной коррозии, скорость которой считалась линейной функцией интенсивности напряжений. Использование данной модели нашло отражение в работах [2, 3]. Значительное внимание расчету конструкций в условиях механической коррозии уделено в исследованиях Э. М. Гутмана и Р. С. Зайнулина [4, 5]. Ими была предложена экспоненциальная модель зависимости скорости коррозии от шаровой компоненты тензора напряжений. Данная модель была применена нами, например, в [6].

В настоящей работе рассматривается оптимальное проектирование трубчатой ферменной конструкции, эксплуатируемой в условиях коррозии, с применением экономической модели, учитывающей помимо начальной стоимости конструкции надежность и затраты, вызываемые ее отказом.

**Постановка задачи**

Рассмотрим элемент конструкции, представляющий собой стержень кольцевого сечения, с внутренним радиусом  $\underline{R}$  и внешним радиусом  $\bar{R}$ , на который действует осевая нагрузка  $Q$ . Наружная поверхность стержня находится в контакте с коррозионной средой. Таким образом, в процессе коррозии внешний радиус уменьшается, тогда как внутренний остается постоянным. В этом случае нормальные напряжения в поперечном сечении  $\sigma(t)$  зависят от времени  $t$

$$\sigma(t) = \frac{Q}{\pi \left[ \bar{R}^2(t) - \underline{R}^2 \right]} \quad (1)$$

Из (1) внешний радиус определяется

$$\bar{R}(t) = \sqrt{Q / \pi \sigma(t) + \underline{R}^2}. \quad (2)$$

Предполагается, что внешний радиус изменяется в зависимости от скорости коррозии  $v$  следующим образом:

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 - \int_0^t v(x) dx,$$

где  $\bar{R}_0$  – начальное значение внешнего радиуса. Проблема состоит в определении оптимальных параметров кольцевого сечения элемента конструкции, удовлетворяющих некоторому уровню ее долговечности.

**Линейная зависимость между скоростью коррозии и напряжением**

Рассмотрим наиболее простую связь между скоростью коррозии и напряжением. Согласно модели Долинского [1] скорость коррозии  $v(t)$  линейно зависит от напряжения  $\sigma(t)$  как

$$v(t) = v_0 + m\sigma(t),$$

где  $m$  – коэффициент, зависящий от материала и коррозионной среды. Подставив это выражение в правую часть уравнения (2), получим

$$\bar{R}_0 - v_0 t - \int_0^t m\sigma(x)dx = \sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2}.$$

Дифференцирование по  $t$  дает дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами

$$-v_0 - m\sigma(t) = -\frac{Q}{2\pi\sigma^2(t)\sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2}} \frac{d\sigma(t)}{dt}. \quad (3)$$

Разделив переменные в (3), имеем следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^t dt = \frac{Q}{2\pi} \int_0^t \frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)^2 (v_0 + m\sigma(t)) \sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2}}. \quad (4)$$

После интегрирования (4) получим

$$t = \left( \frac{mQ}{2\pi v_0^2} \frac{1}{\sqrt{\underline{R}^2 - Qm/\pi v_0}} \ln \frac{\sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2} - \sqrt{\underline{R}^2 - Qm/\pi v_0}}{\sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2} + \sqrt{\underline{R}^2 - Qm/\pi v_0}} - \frac{\sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2}}{v_0} \right) \Big|_0^t.$$

Данное выражение можно упростить, сделав подстановку:  $r_t = \sqrt{Q/\pi\sigma(t) + \underline{R}^2} = \bar{R}(t)$ ;  
 $p = \sqrt{\underline{R}^2 - Qm/\pi v_0}$ ;  $n = \frac{mQ}{2\pi v_0^2}$ .

В результате имеем

$$t = \frac{n}{p} \left( \ln \frac{r_t - p}{r_t + p} - \ln \frac{r_0 - p}{r_0 + p} \right) - \frac{r_t - r_0}{v_0}. \quad (5)$$

**Определение долговечности и размеров кольцевого сечения**

В конечный момент времени эксплуатации конструкции  $T$  из (5) получаем соответствующее выражение ее долговечности

$$T = \frac{n}{p} \left( \ln \frac{r_T - p}{r_T + p} - \ln \frac{r_0 - p}{r_0 + p} \right) - \frac{r_T - r_0}{v_0}, \quad (6)$$

где

$$r_T = \sqrt{Q/\pi\sigma(T) + \underline{R}^2} = \bar{R}_T, \quad r_0 = \sqrt{Q/\pi\sigma_0 + \underline{R}^2} = \bar{R}_0. \quad (7)$$

Выражение (6) целесообразно использовать, например, для оценки долговечности элемента конструкции на этапе его эксплуатации, когда заданы размеры поперечного сечения ( $\underline{R}$ ,  $\bar{R}_0$ ) и известны параметры агрессивной среды ( $v_0$ ,  $m$ ). На этапе проектирования чаще требуется решение обратной задачи, а именно, определить размеры поперечного сечения элемента конструкции при заданном сроке его эксплуатации. Для решения этой задачи запишем (5) как

$$\left( t + \frac{r_t - r_0}{v_0} \right) \frac{p}{n} = \ln \frac{(r_t - p)(r_0 + p)}{(r_t + p)(r_0 - p)}. \quad (8)$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\ln \left\{ \exp \left[ \left( t + \frac{r_t - r_0}{v_0} \right) \frac{p}{n} \right] \right\} = \ln \frac{(r_t - p)(r_0 + p)}{(r_t + p)(r_0 - p)}.$$

Отсюда  $\exp \left[ \left( t + \frac{r_t - r_0}{v_0} \right) \frac{p}{n} \right] = \frac{(r_t - p)(r_0 + p)}{(r_t + p)(r_0 - p)}.$

В первом приближении принимаем  $e^z \approx 1 + z$ , тогда имеем

$$1 + \left( t + \frac{r_t - r_0}{v_0} \right) \frac{p}{n} = \frac{(r_t - p)(r_0 + p)}{(r_t + p)(r_0 - p)}.$$

При  $t = T$ , получим

$$1 + \left( T + \frac{r_T - r_0}{v_0} \right) \frac{p}{n} = \frac{(r_T - p)(r_0 + p)}{(r_T + p)(r_0 - p)}. \quad (9)$$

Так как на этапе проектирования отыскиваются размеры поперечного сечения кольцевого сечения в рамках сортамента, то нам требуется для определения конечных напряжений (в отличие от [6], где ищется  $\bar{R}_0$ ) найти параметр  $\bar{R}_T$ .

Из (9) с учетом (7) определяем  $\bar{R}_T$

$$\bar{R}_T = -B + \sqrt{B^2 - C},$$

$$\text{где } B = \frac{1}{2} \left[ -\frac{nv_0(\bar{R}_0 + \sqrt{\underline{R}^2 - n_1})}{\sqrt{\underline{R}^2 - n_1}(\bar{R}_0 - \sqrt{\underline{R}^2 - n_1})} + \sqrt{\underline{R}^2 - n_1} + \frac{nv_0}{\sqrt{\underline{R}^2 - n_1}} + Tv_0 - \bar{R}_0 \right];$$

$$C = \frac{nv_0(\bar{R}_0 + \sqrt{\underline{R}^2 - n_1})}{\bar{R}_0 - \sqrt{\underline{R}^2 - n_1}} + nv_0 + Tv_0\sqrt{\underline{R}^2 - n_1} - \bar{R}_0\sqrt{\underline{R}^2 - n_1}; \quad n_1 = \frac{mQ}{\pi v_0}.$$

### Растянутые и сжатые элементы

В случае растянутых элементов,  $\sigma(T)$  определяется по (1) при  $t = T$  как

$$\sigma_T = \frac{Q}{\pi \left[ \frac{-2}{\bar{R}_T - \underline{R}^2} \right]}. \quad (10)$$

Для сжатых стержней дополнительно учитывается коэффициент продольного изгиба, т. е.

$$\sigma_T = \frac{Q}{\varphi \pi \left[ \frac{-2}{\bar{R}_T - \underline{R}^2} \right]}. \quad (11)$$

Коэффициент  $\varphi$  принимается в зависимости от условной гибкости  $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y / E}, \quad \lambda = l / i, \quad i = \sqrt{I_T / A_T} = \sqrt{\frac{\pi(\bar{R}_T^4 - \underline{R}^4)}{4\pi(\bar{R}_T^2 - \underline{R}^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{R}_T^2 + \underline{R}^2},$$

где  $R_y$  – предел текучести материала;  $I_T$  – момент инерции поперечного сечения в момент времени  $T$ ;  $l, i$  – длина сжатого элемента и радиус инерции его сечения соответственно.

В результате

$$\bar{\lambda} = \frac{2l}{\sqrt{\bar{R}_T^2 + \underline{R}^2}} \sqrt{R_y / E}.$$

Значения коэффициента  $\varphi$  согласно [7] (СНИП II-23-81, строительные нормы и правила СССР) определяются по формулам

при  $0 \leq \bar{\lambda} \leq 2,5$   $\varphi = 1 - (0,073 - 5,53R_y / E)\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\lambda}}$  ;

при  $2,5 > \bar{\lambda} \leq 4,5$   $\varphi = 1,47 - 13R_y / E - (0,371 - 27,3R_y / E)\bar{\lambda} + (0,0275 - 5,53R_y / E)\bar{\lambda}^2$  ;

при  $\bar{\lambda} > 4,5$   $\varphi = \frac{332}{\bar{\lambda}^2(51 - \bar{\lambda})}$ .

**Определение надежности стержня кольцевого сечения**

Рассмотрим вначале определение надежности  $i$ -го элемента фермы. Принимаем, что его начальные размеры (внешний диаметр  $D_i = 2\bar{R}_{0i}$  и толщина  $\delta_i = \bar{R}_{0i} - \underline{R}_i$ ) сечения, параметр прочности  $\bar{R}_i$  и статическая нагрузка  $\bar{N}$ , приложенная к ферме, являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону. Тогда временная зависимость геометрических характеристик кольцевого сечения и соответственно напряжение в нем являются фиксированными случайными величинами. В этом случае надежность  $i$ -го стержня можно определить как вероятность невыхода величины напряжения  $\tilde{\sigma}_i$  (определяемые по (10), (11)) за допустимый уровень параметра прочности  $\bar{R}_i$  (см. рис. 1) как [8]

$$P_i = \Phi(z_i) + 0,5,$$

где  $z_i = \frac{\bar{R}_i - \bar{\sigma}_i(t)}{\sqrt{D_{R_i} + D_{\sigma_i}}}$  ;  $\bar{\sigma}_i(t) = f(\bar{N}_i, \bar{D}_i, \bar{\delta}_i, t)$  – среднее напряжение в момент времени  $t$ ;

$$D_{\sigma_i} = \left( \frac{\partial f(N_i, D_i, \delta_i, 0)}{\partial D_i} \right)^2 \sigma_{D_i}^2 + \left( \frac{\partial f(N_i, D_i, \delta_i, 0)}{\partial \delta_i} \right)^2 \sigma_{\delta_i}^2 + \left( \frac{\partial f(N_i, D_i, \delta_i, 0)}{\partial N} \right)^2 \sigma_{N_i}^2$$
 – дисперсия напряжения;

$\sigma_{D_i}, \sigma_{\delta_i}, \sigma_{N_i}$  – среднеквадратические отклонения размеров кольцевого сечения и нагрузки  $i$ -го стержня;  $\bar{R}_i = 2,206R_{in} - 1,2059R_{iy}$  ;  $D_{R_i} = (R_{in} - R_{iy})^2 / 1,85$  – математическое ожидание и дисперсия параметра прочности (данные выражения получены с учетом известных вероятностей событий  $P(\bar{R} \geq R_y) = 0,99865$ ,  $P(\bar{R} \geq R_n) = 0,95$  и соответствующих им зависимостей  $R_y = \bar{R} - 3\sigma$ ,  $R_n = \bar{R} - 1,64\sigma$ );  $R_{in}$  и  $R_{iy}$  – временное сопротивление и предел текучести материала соответственно;

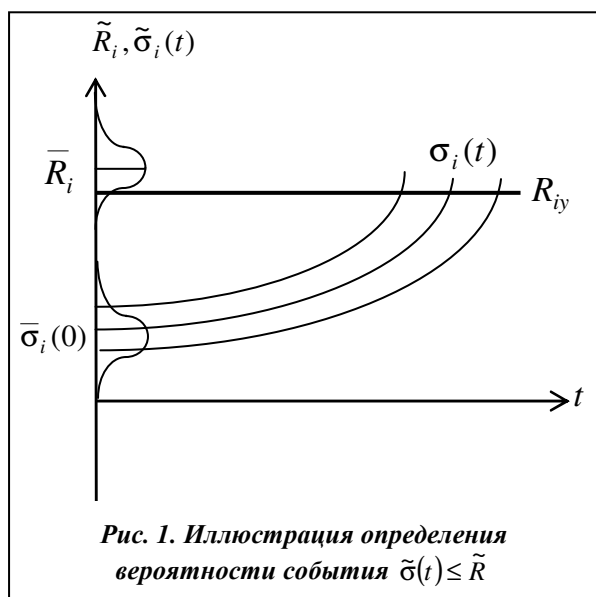


Рис. 1. Иллюстрация определения вероятности события  $\tilde{\sigma}(t) \leq \bar{R}$

$$\Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_i} e^{-x^2/2} dx$$
 – интеграл Лапласа.

**Задача оптимизации**

Цель эксплуатации конструкций, работающих в агрессивных средах, заключается в минимизации стоимости ее безопасного срока службы. Однако при решении данной задачи возникает очевидное противоречие. Так, чем дольше конструкция выполняет свои функции, тем ниже стоимость единицы времени ее эксплуатации, но при этом растет вероятность отказа конструкции. Для решения конфликта здесь, помимо начальной стоимости конструкции  $H_o$ , дополнительно учитываются также затраты  $H_{fail}$ , вызываемые отказом конструкции с вероятностью  $P_{fail}$ .

В качестве функции цели принимается величина полных ожидаемых затрат [9]



## Результаты оптимизации фермы с использованием двух моделей

Оптимальные параметры фермы							$F, \text{y. e.}$	$P$	$lf$
1	2	3	4	5	6	7			
Труба 76×7	Труба 114×8	Труба 152×7,5	Труба 70×9	Труба 152×8	Труба 60×8	Труба 83×6	$10,55 \cdot 10^3$	1	429
$R_y = 225 \text{ МПа}$									

**Выводы**

Получено выражение долговечности, а также решена обратная задача по определению размеров поперечного сечения ферменных элементов конструкций кольцевого сечения (при заданном сроке их эксплуатации), подверженных коррозии, с использованием модели Долинского.

Решена задача оптимизации ферменной конструкции, эксплуатируемой в условиях агрессивной среды с применением экономической модели, учитывающей помимо начальной стоимости конструкции надежность и затраты, вызываемые ее отказом.

Как видно из полученного оптимального проекта, величина надежности  $P \rightarrow 1$ , что приводит к исключению 2-го слагаемого из (12). Это объясняется тем, что величина ущерба, вызываемого отказом конструкции, намного превышает ее начальную стоимость.

В заключение следует отметить, что полученная величина относительного прогиба  $f/l$  свидетельствует о том, что ограничение (13) не являлось активным в процессе поиска оптимального решения.

**Литература**

1. Долинский, В. М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии / В. М. Долинский // Хим. и нефт. машиностроение. – 1967. – № 2. – С. 21–30.
2. Почтман, Ю. М. Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях / Ю. М. Почтман, М. М. Фридман. – Днепропетровск: Наука и образование, 1997. – 134 с.
3. Fridman, M. M. Structural optimization of elastic columns under stress corrosion conditions / M. M. Fridman, M. Zyczkowski // Structural Optimization. – 2001. – Vol. 21 (3). – P. 218–228.
4. Гутман, Э. М. Прочность газопромысловых труб в условиях коррозионного износа / Э. М. Гутман, Р. С. Зайнулин, Т. Г. Шагалова. – М.: Недра, 1984. – 76 с.
5. Гутман, Э. М. Кинетика механохимического разрушения и долговечность растянутых конструктивных элементов при упругопластических деформациях / Э. М. Гутман, Р. С. Зайнулин, Р. А. Зарипов // Физико-хим. механика материалов. – 1984. – № 2. – С. 14–17.
6. Fridman, M. M. Buckling Optimization of Compressed Bars undergoing Corrosion / M. M. Fridman, I. Elishakoff // Ocean Systems Eng. – 2013. – Vol. 3 (2). – P. 123–136.
7. СНиП II-23-81. Строительные нормы и правила. Стальные конструкции. Госстрой СССР, 1990. – 96 с.
8. Капур, К. Надежность и проектирование систем: Пер. с англ / К. Капур, Л. Ламберсон. – М.: Мир, 1980. – 604 с.
9. Аугустини, Г. Вероятностные методы в строительном проектировании: Пер. с англ / Г. Аугустини, А. Баратта, Ф. Кашиати. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.
10. Гурвич, Н. Б. Рандомизированный алгоритм для решения задач нелинейного программирования / Н. Б. Гурвич, В. Г. Захарченко, Ю. М. Почтман // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 5. – С. 15–17.

Поступила в редакцию 10.08.16