

**З.Д. Пащенко,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

ORCID: 0000-0003-4544-9242

*Z. Paschenko,*

Donbas State Pedagogical University

**Т.В. Турка,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

ORCID: 0000-0001-6445-2223

*T. Turka*

Donbas State Pedagogical University

## МЕТОД ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

## METHOD OF ELEMENTAL TRANSFORMATIONS IN LINEAR ALGEBRA PROBLEMS

**Анотація.** *Навчання студентів найбільш раціональним методам розв'язування задач є однією із важливих проблем навчання математики. В роботі виділено класи задач лінійної алгебри, для яких метод елементарних перетворень рядків матриць є одним з найбільш раціональних. Описано навчально-пізнавальні дії розв'язання кожного з таких класів та їх схеми. Обґрунтовується використання комп'ютерних технологій в якості засобів навчання при вивченні лінійної алгебри.*

**Ключові слова:** *метод розв'язування задачі, вибір методу розв'язування задачі, елементарні перетворення матриці, метод елементарних перетворень.*

**Abstract.** *Teaching students the most rational methods of solving problems is one of the important problems in teaching mathematics. The paper identifies classes of linear algebra problems for which the method of elementary transformations of rows of matrices is one of the most rational. The educational and cognitive actions of solving each of these classes and their schemes are described. The use of computer technology as a means of learning in the study of linear algebra is substantiated.*

**Keywords:** *problem solving method, choice of problem solving method, elementary matrix transformations, elementary transformation method.*

**Постановка проблеми в загальному вигляді.** Національною програмою «Освіта. Україна ХХІ сторіччя» передбачено забезпечення розвитку освіти на основі нових прогресивних концепцій, запровадження у навчально-виховний процес новітніх педагогічних технологій та науково-методичних досягнень, створення нової системи інформаційного забезпечення освіти, входження України у трансконтинентальну систему комп'ютерної інформації.

Розвиток освітньої системи в Україні повинен призвести до різних аспектів: появи нових можливостей для оновлення змісту та методів навчання дисциплін і розповсюдження знань; розширення можливості одержання освіти для великої кількості молодих людей; індивідуалізації навчання за умови масовості освіти та ін.

Враховуючи світовий процес переходу від індустріального до інформаційного суспільства та соціально-економічні зміни, що відбуваються в Україні, враховуючи прискорення розповсюдження знань як і інформації взагалі, враховуючи зростання темпу змін в усіх сферах життя, постає необхідність суттєвих змін в діяльності держави взагалі і освіти зокрема [1]. Соціальна, економічна та побутова діяльність сучасної людини пов'язані з використанням нових технологій. Загальна комп'ютеризація всіх видів діяльності людини вимагає застосування інформаційних технологій і у навчальній діяльності, зокрема при викладанні та вивченні дисциплін математичного циклу [2].

Навчання студентів найбільш раціональним методом розв'язування задач є однією із важливих проблем навчання математики [3]. Дана робота присвячена виділенню класів задач лінійної алгебри, для яких метод елементарних перетворень матриць з одного боку, є одним із найбільш раціональних, з іншого, може бути виконаним у комп'ютерній реалізації.

**Аналіз актуальних досліджень.** Проблемами місця і значення методів та способів розв'язування задач плідно займалися: Г.Д. Балк, М.Б. Балк, Г.П. Бевз, І.А. Кушнір, З.І. Слєпкань, Л.М. Фрідман та ін. Але на сьогодні проблема методу і способу розв'язання в алгебрі ще недостатньо вирішується на рівні сучасних вимог, слабо використовується системний підхід до вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач.

Є різні уявлення про методи та способи розв'язування задач. Л.М. Фрідман вказує, що метод розв'язування задачі – це деякий план розв'язання, але не тільки даної конкретної задачі, а й усіх задач такого виду, до якого ми відносимо дану задачу. Тому метод, на відміну від плану, містить в собі не тільки опис усіх необхідних перетворень умов задачі для її розв'язання, а й вказівку усіх логічних умов застосовності кожного з перетворень, та головне, вказівку усіх ознак того виду задач, розв'язання яких може бути знайдене цим методом [3].

Інше означення з великої радянської енциклопедії: метод (від грецької – шлях дослідження або пізнання, теорія, вчення) сукупність прийомів або операцій практичного чи теоретичного засвоєння дійсності, підпорядкованих

розв'язанню конкретної задачі. Щоб розкрити конкретний метод розв'язування задач, необхідно розкрити сукупність дій та зав'язків між ними.

Отже, метод взагалі – це сукупність дій та порядок їх виконання, спрямованих на досягнення певної мети. Метод розв'язування алгебраїчних задач – сукупність математичних і логічних дій та порядок їх виконання, призначених для розв'язання великого класу задач.

Система освіти шляхом підготовки кадрів забезпечує розвиток і модернізацію науково-технічного і культурного потенціалів суспільства. Вона спрямована в перспективу, а тому повинна своєчасно реагувати на зміни в суспільстві, що є однією з визначальних умов її ефективного функціонування. Звідси випливає, що сьогодні гострою є потреба розробки і впровадження нових технологій формування знань, умінь і навичок, нового змісту, методів, засобів навчання, дидактично-методичного забезпечення в цілому. Повною мірою це стосується і вищої педагогічної школи і, зокрема, організації її навчально-виховного процесу. Традиційні методичні системи не відповідають вимогам сьогодення. Сучасні інформаційно-комунікаційні технології в практиці роботи вищих педагогічних навчальних закладів використовуються фрагментарно. Разом з тим, виконання освітніх і виховних завдань, висунутих Національною доктриною розвитку освіти України у XXI столітті, вимагає принципово нового забезпечення навчально-виховного процесу [1].

В роботі Співаковського О.В. і Круглика В.С. розглядається компонентно-орієнтований підхід до вивчення лінійної алгебри, який полягає в такій організації навчального процесу, за якої попередні, раніше засвоєні знання і способи діяльності повинні використовуватися як новий інструмент для розв'язування завдань більш високого рівня. Технологічні передумови використання такого підходу сьогодні забезпечують сучасні інформаційні технології навчання. Використання компонентно-орієнтованого підходу в навчанні проходить через інтеграцію традиційних та нових комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання. Це вимагає переосмислення не лише змісту, а й методичних систем навчання, включаючи використання комп'ютерних середовищ, за допомогою яких можна розв'язувати деякі задачі.

Викладання у вищих навчальних закладах різних галузей математичних знань може спиратись на широкий спектр застосування інформаційних технологій як у загально-педагогічному сенсі (наочні засоби навчання, дистанційне навчання, електронні джерела наукової та навчальної інформації), так і у спеціалізованому методико-математичному. Важливе місце у професійній підготовці ІТ-фахівців мають завдання, спрямовані на застосування отриманих математичних знань у ситуаціях, близьких до майбутньої професійної діяльності. Найцікавіші в цьому напрямку є компетентісно-орієнтовані задачі [2]. В таких задачах пропонується власноручно скласти програму розв'язку за певним алгоритмом, що вивчається в одній з математичних дисциплін.

**Мета:** виділити класи задач лінійної алгебри, які можна розв'язувати за допомогою методу елементарних перетворень з використанням комп'ютерних середовищ.

**Виклад основного матеріалу** Знання методів розв'язування задач, вміння правильного вибору методу і ефективного його використання є важливим елементом математичної освіти взагалі та фахової підготовки вчителів математики зокрема.

З елементарними перетвореннями матриць студент знайомиться в курсі лінійної алгебри з самого початку розділу про матриці і використовує на протязі вивчення всього цього курсу. Елементарні перетворення застосовуються для приведення до східчастої матриці, для знаходження рангу матриці, для спрощення обчислень визначника та ін.

Метод елементарних перетворень, про який йде мова в даній роботі, починається з розв'язування систем лінійних рівнянь  $AX = B$  (тут  $A$  – матриця системи,  $B$  – стовпчик вільних членів,  $X$  – стовпчик невідомих). Для систем лінійних рівнянь він відомий як метод Жордана-Гауса і полягає в приведенні розширеної матриці системи  $(A|B)$  елементарними перетвореннями, не

обмежуючи загальності, до канонічного виду  $\left( \begin{array}{c|c} E & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| B' \right)$  у випадку сумісності.

Спираючись на отриману матрицю, виписується розв'язок системи.

Якщо система  $AX = B$  визначена та має квадратну матрицю, згаданий канонічний вид отримується лише за допомогою елементарних перетворень рядків і виглядає як  $(E|B')$ , а розв'язком системи є  $X = B'$ . Надалі процес розв'язування визначеної системи  $AX = B$  методом елементарних перетворень будемо зображати схемою

$$(A|B) \rightarrow (E|X).$$

Випадок невизначеної системи також підлягає комп'ютерній реалізації, проте в цій роботі не розглядаються деталі такого алгоритму.

Розглянемо матричне рівняння  $AX = B$ , де  $A, B, X$  – матриці відповідного розміру,  $X$  – невідома матриця. Відповідність розмірів матриць  $X$  і  $B$  така, що їх можна представити як сукупність однакової кількості стовпчиків:  $X = (X_1, \dots, X_k)$ ,  $B = (B_1, \dots, B_k)$ . Знаходження стовпчиків  $X_i$  перетворюється на розв'язування  $k$  систем  $AX_i = B_i$ , що мають спільну матрицю системи, а значить і спільний процес приведення її елементарними перетвореннями рядків до одиничної. Це дозволяє об'єднати розв'язок всіх систем в схему:

$$(A|B) \rightarrow (E|X).$$

У випадку невинродженої матриці  $A$ , який ми розглядаємо, також виникає задача заходження оберненої матриці  $A^{-1}$ . Обернена матриця  $A^{-1}$  визначається як така, що  $AA^{-1} = E$  (та  $A^{-1}A = E$ ). Ця матриця єдина, тому вона може бути знайдена як розв'язок матричного рівняння  $AX = E$ , а для її знаходження може бути використана схема елементарних перетворень матриці

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Також звернемо увагу, що розв'язком матричного рівняння  $AX = B$  у не виродженому випадку є  $X = A^{-1}B$ . Тому запропонований алгоритм може використовуватись для знаходження добутку  $A^{-1}B$  за наступною схемою:

$$(A | B) \rightarrow (E | A^{-1}B).$$

У розділі «Лінійні простори» виникає задача знаходження координат  $x_e$  вектора  $x$  в базисі  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Після розгляду поняття координат доречно зауважити та обґрунтувати, що стовпчик  $X = x_e^T$  таких координат – це розв'язок системи лінійних рівнянь  $AX = B$ , де матриця  $A$  складається із векторів  $e_1, \dots, e_n$ , записаних в стовпчики, а  $B$  – це вектор  $x$ , записаний у стовпчик:  $B = x^T$ . Отже, маємо схему знаходження координат вектора  $x$  в базисі  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , що використовує метод елементарних перетворень матриць:

$$(e_1^T, \dots, e_n^T | x^T) \rightarrow (E | x_e^T)$$

Повернувши позначення в матричний вид системи  $AX = B$ , одержимо матричне представлення вектору через базисну матрицю та його координати в цьому базисі:  $(e_1^T \dots e_n^T) \cdot x_e^T = x^T$  (умовно  $x^T = e x_e^T$ )

Вже розглядаючи матрицю переходу від базису  $e = (e_1, \dots, e_n)$  до базису  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , яка визначається як матриця  $U$ , що складається з векторів стовпчиків координат  $e'_i$  в базисі  $e$  ( $(e'_i)^T = e (e'_i)^T$ , не важко показати, що знаходження цієї матриці зводиться до розв'язування матричного рівняння зі схемою

$$(e | e') = (e_1^T, \dots, e_n^T | e_1'^T, \dots, e_n'^T) \rightarrow (E | U).$$

Тут  $e$  – матриця стовпчиків  $(e_1^T, \dots, e_n^T)$ , а  $e'$  – матриця стовпчиків  $((e'_1)^T, \dots, (e'_n)^T)$ .

І нарешті, в розділі «Лінійні оператори» розглядається матриця лінійного перетворення  $\tilde{A}$  в базисі  $e$ . Вона визначається як матриця, що складається із стовпчиків координат векторів  $a_i = \tilde{A}e_i$ . Знову, спираючись на те, що знаходження координат векторів зводиться до задачі розв'язку системи рівнянь, та об'єднавши цю задачу для всіх образів базисних векторів, маємо схему знаходження матриці  $A_e$  лінійного перетворення  $\tilde{A}$  в базисі  $e = (e_1, \dots, e_n)$ :

$$(e | a) = (e_1^T, \dots, e_n^T | a_1^T, \dots, a_n^T) \rightarrow (E | A_e).$$

Зауважимо, що метод елементарних перетворень є алгоритмом і має свою програмну реалізацію. Тому при відповідних технічному забезпеченні та організації навчального процесу його можна виконувати у комп'ютерній реалізації. При реалізації програмного виконання елементарних перетворень, комп'ютер миттєво і правильно виконує обчислення і переписування, звільняючи користувача від зайвих витрат часу. Крім цього, застосування сучасних методів опрацювання даних сприяє загальному розвитку інформаційної культури студентів та їх професійному становленню.

З одного боку, наявність комп'ютерної реалізації не звільняє студентів від володіння методом елементарних перетворень матриць. А з іншого, систематичне впровадження застосування методу елементарних перетворень до виділеного класу задач, причому з застосуванням електронної реалізації, вимагає оновлення, редагування змісту навчального матеріалу, засобів навчання, дидактично-методичного забезпечення.

Використання алгоритмічних методів розв'язування задач особливого значення набуває при підготовці ІТ-фахівців. Якщо при організації методичного забезпечення навчального процесу з математичних дисциплін впроваджувати використання власноручно створених програм для реалізації відповідних математичних алгоритмів, то такі завдання будуть сприяти формуванню як загальних, так і фахових компетентностей. Ця обставина пов'язана з тим, що для створення кожної програми обов'язковим є попереднє складання блок-схеми, а це вимагає від студента глибокого осмислення методів розв'язування конкретних задач. Рівень володіння кожним окремим методом може бути оціненим вище, якщо студент може підібрати варіанти тестування програми.

Метод елементарних перетворень матриць є однією з тих задач, які можна пропонувати для створення власної програми при підготовці ІТ-фахівців. Це сприятиме і осмисленню самого методу, і засвоєнню типів задач, до яких можна застосовувати цей метод, і підбору варіантів тестування програми. Одним з таких варіантів тестування методу елементарних перетворень є введення двох додаткових стовпчиків, один з яких складається як сума всіх рядків та підлягає всім відповідним елементарним перетворенням, а другий обчислюється як сума всіх стовпчиків після деякої кількості елементарних перетворень. Рівність цих стовпчиків буде підтверджувати вірність роботи програми. Застосування методу елементарних перетворень в комбінації із створенням власної програми при підготовці спеціалістів з інформатики допоможе опанувати не лише навчальну дисципліну, а й майбутню професію.

**Висновки та перспективи подальших досліджень** Метод розв'язування конкретно-практичних задач включає 1) математичні дії або вміння та 2) навчально-пізнавальні дії або вміння.

В роботі виділено класи задач, до яких може бути застосовано метод елементарних перетворень рядків матриць. Зосереджено увагу на навчально-пізнавальні дії та вміння. Описано наступні класи таких задач та схеми їх розв'язку:

- розв'язування визначеної системи лінійних рівнянь з квадратною матрицею;
- розв'язування матричного рівняння  $AX = B$  з невірною матрицею  $A$ ;
- знаходження оберненої матриці;
- знаходження матриці  $A^{-1}B$ ;
- знаходження координат вектора в заданому базисі;
- знаходження матриці переходу від одного базису до іншого;

- знаходження матриці лінійного перетворення векторів в заданому базисі.

Застосування методу елементарних перетворень стає найбільш раціональним, якщо при викладанні теоретичного матеріалу проводити обґрунтування відповідних схем та систематично їх використовувати при розв'язуванні практичних задач.

Часто математичні дії заважають отриманню результату дій. Процес приведення матриці елементарними перетвореннями до потрібного виду вимагає великої кількості обчислень і перетворює навчально-пізнавальний процес в рутинну роботу, особливо, коли банальна помилка в обчисленнях приводить до недостовірного результату. Використання електронних засобів для обчислень вирішує цю проблему.

В результаті впровадження під час викладання лінійної алгебри схем розв'язку описаних класів задач, особливо з залученням комп'ютерних технологій, відбувається оптимізація процесу навчання, в результаті якої пізнавальний процес вивільняється від великої кількості рутинних обчислень.

При підготовці спеціалістів з інформатики запровадження системного використання власноручно складених програм для реалізації математичних алгоритмів, у тому числі, і методу елементарних перетворень, сприяє формуванню більш широкого кола компетентностей.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Співаковський О.В., Круглик В.С. Ієрархія компонент розв'язання задач з курсу Лінійна алгебра // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 6.
2. Бобрицька Г.С., Коржова О.В. Професійно-орієнтовані завдання з лінійної алгебри з елементами алгоритмізації та програмування для майбутніх ІТ-фахівців // ІХ Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційно-комп'ютерні технології 2018», 20 квітня 2018 р., м. Житомир. Коржова О.В. Математична компетентність як складова професійної підготовки майбутніх фахівців з кібербезпеки /О.В. Коржова // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2017) : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 7-8 грудня 2017 р., м. Суми; у 2-х частинах. – Суми : ФОП Цьома С.П., 2017. – Ч. 1. – С. 34-35.
3. Нак М. М. Проблема методу при розв'язуванні алгебраїчних задач //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 4: В 3-х томах. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НацМетАУ, 2004. – С. 143-152.

## REFERENCES

1. Spivakovskiy O.V., Kruhlyk V.S. Iierarkhiia komponent rozv'iazannia zadach z kursu Liniina alhebra // Kompiuter u shkoli ta simi. – 2004. – № 6.

2. Bobrytska H.S., Korzhova O.V. Profesiino-oriietovani zavdannia z liniinoi alhebry z elementamy alhorytmizatsii ta prohramuvannia dlia maibutnikh IT-fakhivtsiv // IKh Mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiia «Informatsiino-kompiuterni tekhnolohii 2018», 20 kvitnia 2018 r., m. Zhytomyr. Korzhova O.V. Matematychna kompetentnist yak skladova profesiinoi pidhotovky maibutnikh fakhivtsiv z kiberbezpeky /O.V. Korzhova // Naukova diialnist yak shliakh formuvannia profesiinykh kompetentnostei maibutnoho fakhivtsia (NPK-2017) : materialy Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii, 7-8 hrudnia 2017 r., m. Sumy; u 2-kh chastynakh. – Sumy : FOP Tsoma S.P., 2017. – Ch. 1. – S. 34-35.

3. Nak M. M. Problema metodu pry rozviazuvanni alhebraichnykh zadach //Teoriia ta metodyka navchannia matematyky, fizyky, informatyky: Zbirnyk naukovykh prats. Vypusk 4: V 3-kh tomakh. T. 1: Teoriia ta metodyka navchannia matematyky. – Kryvyi Rih: Vydavnychy viddil NatsMetAU, 2004. – S. 143-152.