**ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ В КАНАТІ ПІДЙОМНОГО ПРИСТРОЮ З
ВРАХУВАННЯМ ПРУЖНОСТІ ЙОГО ЛАНОК**

У статті для вивчення динаміки машини з пружними ланками використовується особлива форма диференціальних рівнянь руху рядної динамічної моделі. Ці рівняння встановлюють залежності безпосередньо між силовими чинниками. Тому реакції пружних ділянок моделі визначаються без знаходження їх деформацій. Відомими мають бути початкові значення пружних сил і їх перших похідних. Розглянутий приклад спрощеної моделі барабанного підйомного механізму мостового крану. Початкові положення вантажу на опорній балці та барабану з підйомним канатом на балці мостового крану можуть змінюватися. При побудові динамічної моделі механізму враховані: маса вантажу, маса канату, коефіцієнт лінійної жорсткості канату і коефіцієнти згинальних жорсткостей балок. Вивчається фаза вантажу, що покоїться, якщо відомі початкова швидкість і прискорення верхнього кінця канату. Визначено зусилля в опорній балці і момент зняття вантажу з опори. Для кожної фази руху знайдені: пружне зусилля в канаті як функція часу; моменти часу, при яких зусилля в канаті досягають максимальних значень. Запропонований алгоритм чисельного аналізу задачі, в якому задані масові, геометричні, пружні, кінематичні параметри механізму. Координати точок прикладання навантажень до балок можуть змінюватись. Отриманий спектр максимальних зусиль і нормальних напружень в канаті. Блок-схема алгоритму дозволяє, варіюючи початковими даними, підібрати оптимальне поєднання параметрів для конкретного режиму експлуатації механізму з точки зору необхідного коефіцієнту запасу міцності. Результати статті можуть бути використані для розрахунків на міцність канату конструйованого або вже експлуатованого підйомного механізму.

Ключові слова: підйомний механізм, динамічна модель, коефіцієнт жорсткості, зусилля пружної в'язі.

Карпенко Т.Н., Музыка И.Н., Гудим А.А. Определение усилий в канате подъемного устройства с учетом упругости его звеньев. В статье для изучения динамики машины с упругими звеньями используется особая форма дифференциальных уравнений движения рядной динамической модели. Эти уравнения устанавливают зависимости непосредственно между силовыми факторами. Поэтому реакции упругих участков модели определяются без нахождения их деформаций. Известными должны быть начальные значения упругих сил и их первых производных. Рассмотрен пример упрощенной модели барабанного подъемного механизма. Исходные положения груза на опорной балке и барабана с подъемным канатом на балке мостового крана могут меняться. При построении динамической модели механизма учтены: масса груза, масса каната, коэффициент линейной жесткости каната и коэффициенты изгибных жесткостей балок. Изучается фаза покоящегося груза с известными начальной скоростью и ускорением верхнего конца каната. Определено усилие в опорной балке и момент снятия груза с опоры. Для каждой фазы движения найдены: упругое усилие в канате как функция времени; моменты времени, при которых усилия в канате достигают максимальных значений. Пред-

¹ канд. фіз.-мат. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, taisn2013@gmail.com

² ст. викладач, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, inna_muzyka@mail.ua

³ студент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, ob100lytno@gmail.com

ложен алгоритм численного анализа задачи, в котором заданы массовые, геометрические, упругие, кинематические параметры механизма. Координаты точек приложения нагрузок к балкам могут меняться. Получен спектр максимальных усилий и нормальных напряжений в канате. Блок-схема алгоритма позволяет, варьируя исходными данными, подобрать оптимальное сочетание параметров для конкретного режима эксплуатации механизма с точки зрения необходимого коэффициента запаса прочности. Результаты статьи могут быть использованы для расчетов на прочность каната конструируемого или уже эксплуатируемого подъемного механизма.

Ключевые слова: подъемный механизм, динамическая модель, коэффициент жесткости, усилия упругой связи.

T.M. Karpenko, I.M. Muzyka, O.O. Gudym. Evaluation of the forces in the lifting rope taking into account the resilience of its links. A special form of differential equations of motion of a row dynamic model to study the dynamics of a machine with resilient links is used in the article. These equations set dependences directly between power factors. Therefore the reactions of resilient areas of the model are determined without detecting their deformations. The initial values of resilient forces and their first derivatives must be known. An example of a simplified model of a drum lifting mechanism has been considered. Initial positions of a load on the supporting beam and a drum with a lifting rope on the beam of a travelling crane can change. The mass of the load, the mass of the rope, the coefficient of linear inflexibility of the rope and coefficients of flexural inflexibilities of the beams have been taken into account when making up the dynamic model of the mechanism. The equilibrium load phase with the known initial velocity and acceleration of the overhead end of the rope is studied. The effort in the supporting beam and the moment of the load removal from the support have been defined. For every phase of the motion the resilient effort in the rope as a function of time as well as the moments of time, when the efforts in the rope are maximum, have been found. The algorithm of the numerical analysis of the task has been offered; the mass, geometrical, resilient, kinematics parameters of the mechanism being preset. The coordinates of loading points to the beams can change. The spectrum of the maximal efforts and normal tensions in the rope has been got. The flow-chart of algorithm makes it possible, varying the basic data to pick up the optimal combination of parameters for the particular mode of the mechanism exploitation, with due regard of the necessary safety factor. The results of the article can be used to calculate the rope durability of the lifting mechanism to be designed or already operating.

Keywords: lifting mechanism, dynamic model, stiffness coefficient, elastic bond force.

Постановка проблеми. Серед об'єктів, що витримують динамічні навантаження, напружено-деформований стан яких представляє практичний інтерес, важливе місце займають канати підйомних механізмів, які постійно працюють у режимі прикладання і зняття навантажень. Отримати уточнені значення зусиль в канатах і встановити поєднання конструктивних параметрів, при яких експлуатація підйомного механізму буде безпечною, доцільно з врахуванням пружних властивостей деяких його ланок [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням визначення зусиль і напружень в канатах підйомних механізмів присвячений цілий ряд праць. Рекомендації щодо величини поперечних розмірів підйомного канату, розглядаючи його як однорідний вагомий стрижень з вантажем на кінці, отримані в роботі [2]. Основи силового розрахунку канатів на прямій ділянці, а також при роботі на блоках і барабанах, викладені в працях [3, 4]. Приділена увага згинальній жорсткості прямого канату і запропонований аналітичний довідник для сталевих канатів автором роботи [5]. На основі хвильового рівняння поперечних коливань вагового канату отримані динамічні напруження з врахуванням жорсткості стріли підйому в роботі [6].

Мета статті. Застосовуючи диференціальні рівняння, що встановлюють зв'язки між пружними силами ланок підйомного пристрою, запропонувати алгоритм визначення зусиль, що виникають у канаті, з врахуванням пружних властивостей як канату, так і опорної поверхні (опорної балки) та балки мосту мостового крану (мостової балки).

Виклад основного матеріалу. Для визначення зусиль, що виникають в пружних в'язях підйомних установок, скористаємося методом обчислення сил реакцій пружних в'язів, надавши динамічним рівнянням руху відповідні форми [1, 7].

Як відомо, розрахункова динамічна модель з розподіленими пружними і масовими параметрами має такий же енергетичний запас, як і реальна машина [1]. Тому зведені маси визначаються з еквівалентності кінетичних енергій, зведені жорсткості – з еквівалентності потенційних енергій деформацій, приведені сили – з еквівалентності потужностей об'єкту, що вивчається, та моделі.

Рядна динамічна модель, рух якої описується лінійними узагальненими координатами q_i (м), характеризується матрицями: інерції з елементами a_i (кг), жорсткості з елементами $c_{i,j} \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right)$, узагальнених сил активних Q_i^a (Н) і реакцій в'язей Q_i^p (Н).

Маємо динамічні рівняння руху системи, що складається з n мас [1]:

$$a_i \ddot{q}_i = Q_i^a + Q_{i,i+1}^p, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Припустивши, що узагальнені реакції пружних в'язей $Q_{i,i+1}^p$ при виконанні закону Гука мають той самий знак, що і відносні узагальнені прискорення сусідніх мас, маємо залежності

$$\ddot{Q}_{i,i+1}^p = c_{i,i+1} (\ddot{q}_i - \ddot{q}_{i+1}). \quad (2)$$

Визначивши різницю прискорень двох сусідніх мас з рівнянь (1), помноживши кожен з цих різниць на коефіцієнт жорсткості $c_{i,j}$, позначивши дію диференціювання оператором p , отримаємо систему диференціальних рівнянь для шуканих узагальнених сил реакцій в'язей [1]:

$$-\frac{c_{i,i+1}}{a_i} Q_{i-1,i}^p + (p^2 + k_{i,i+1}^2) Q_{i,i+1}^p = c_{i,i+1} \frac{a_{i+1} \cdot Q_i^a - a_i \cdot Q_{i+1}^a}{a_i \cdot a_{i+1}}, \quad (3)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$;

$$k_{i,i+1}^2 = \frac{a_i + a_{i+1}}{a_i \cdot a_{i+1}} c_{i,i+1}.$$

Система рівнянь (3) може бути використана для дослідження динамічних процесів перехідного режиму, що виник в результаті прикладання або зняття навантаження при відомих початкових умовах для пружних сил і їх перших похідних [7].

Постановка задачі і її розв'язання. На нерухомій опорній балці O в точці A_0 знаходиться вантаж 1 вагою G_6 , який потрібно підняти (рис. 1). Барабан підйомного механізму з намотаним канатом встановлений на мостовій балці 2 в точці A_2 . Відомі наступні величини:

- параметри канату: вага G_k , звисаюча довжина канату L , площа перерізу S , E_k – модуль пружності, напруження, що допускаються, $[\sigma]$, K – коефіцієнт запасу міцності;
- параметри балок: довжини l_0, l_2 ; осьові моменти інерції перерізів I_0, I_2 ; модулі пружності E_0, E_2 ; координати точок прикладення навантажень $b_0 = \beta_0 l_0, b_2 = \beta_2 l_2$, де $0 < \beta_{0,2} \leq 0,5$.

У момент відриву вантажу від опорної балки вантаж має швидкість V_0 , а верхній кінець канату має прискорення a .

Визначити:

- 1) силу пружності опорної балки до моменту відриву вантажу від основи $F_{0,1}$;
- 2) силу пружності канату до моменту відриву вантажу від основи $F_{1,2}$;
- 3) силу пружності канату після відриву вантажу від основи $P_{1,2}$.

Динамічну модель механізму, що вивчається (рис. 2), будемо, виходячи з відомих методик [8]. Зведена маса дорівнює

$$m = \frac{G_6 + \frac{1}{3} G_k}{g}. \quad (4)$$

Зведені коефіцієнти жорсткості дорівнюють:

– опорної балки

$$c_{0,1} = \frac{3E_0 I_0}{l_0^3} \alpha_0, \quad (5)$$

де

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0^2 (1 - \beta_0)^2}. \quad (6)$$

– мостової балки і канату

$$c_{1,2} = \frac{c_k \cdot c_2}{c_k + c_2}, \quad (7)$$

$$\text{де } c_k = \frac{E_k \cdot S}{L}, \quad c_2 = \frac{3E_2 \cdot I_2}{l_2^3} \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta_2^2 (1 - \beta_2)^2}.$$

Рис. 1 – Схема підйомного механізму

Рис. 2 – Динамічна модель

Позначимо вертикальне переміщення маси m до відриву її від опорної балки $s(t)$. Тоді, враховуючи закон Гука, маємо

$$\ddot{F}_{0,1} = c_{0,1} \ddot{s}, \quad \ddot{F}_{1,2} = c_{1,2} (a - \ddot{s}).$$

Диференціальне рівняння руху маси m в першій фазі (до відриву від опори), згідно (1), має вигляд

$$m \ddot{s} = F_{1,2} - F_{0,1} - mg.$$

Виключивши прискорення $\ddot{s}$, встановимо залежність між пружними силами

$$F_{1,2} = \frac{m}{c_{0,1}} \ddot{F}_{0,1} + F_{0,1} + mg.$$

Маємо диференціальне рівняння для визначення сили $F_{0,1}$

$$\ddot{F}_{0,1} + \frac{c_{0,1} + c_{1,2}}{m} \dot{F}_{0,1} = \frac{c_{0,1} \cdot c_{1,2}}{m} a. \quad (8)$$

Після інтегрування диференціального рівняння (8), з врахуванням початкових умов при $t=0$: $F_{0,1} = -mg$, $\dot{F}_{0,1} = 0$, $\ddot{F}_{0,1} = 0$, $F_{1,2} = 0$, $\dot{F}_{1,2} = c_{1,2} \cdot V_0$, $\ddot{F}_{1,2} = c_{1,2} \cdot a$, маємо формули для визначення пружних сил в першій фазі руху:

$$F_{0,1} = \bar{c} \left[\frac{a}{k^2} (\cos kt - 1) + V_0 \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right) + \frac{at^2}{2} \right] - mg; \quad (9)$$

$$F_{1,2} = \bar{c} \left\{ \frac{c_{1,2}}{c_{0,1}} \left[\frac{a}{k^2} (1 - \cos kt) + \frac{V_0}{k} \sin kt \right] + V_0 t + \frac{at^2}{2} \right\}, \quad (10)$$

$$\text{де } k = \sqrt{\frac{c_{0,1} + c_{1,2}}{m}}, \quad \bar{c} = \frac{c_{0,1} \cdot c_{1,2}}{c_{0,1} + c_{1,2}}.$$

Ці формули мають місце для значень часу $0 \leq t \leq t_1$, де момент зняття маси m з опори t_1 визначається з умови $F_{0,1}(t_1) = 0$, тобто з рівняння

$$\frac{a}{k^2}(\cos kt_1 - 1) + V_0 \left(t_1 - \frac{\sin kt_1}{k} \right) + \frac{at_1^2}{2} = \frac{mg}{\bar{c}}. \quad (11)$$

Пружна сила канату має найбільше значення у момент часу t_2 , $0 < t_2 < t_1$, при якому похідна за часом від сили $F_{1,2}$ дорівнює нулю. Маємо рівняння для визначення t_2

$$\frac{a}{k} \sin kt_2 + V_0 \cos kt_2 + \frac{c_{0,1}}{c_{1,2}}(V_0 + at_2) = 0. \quad (12)$$

Відмітимо, якщо канат має послаблення величиною Δl , початкова швидкість V_0 визначається з формули $V_0 = \sqrt{2a \left(\Delta l + \frac{mg}{c_{1,2}} \right)}$.

Пружну силу канату $P_{1,2}$ в другій фазі руху (після відриву вантажу від опори) визначимо, інтегруючи диференціальне рівняння

$$\ddot{P}_{1,2} + \frac{c_{1,2}}{m}(P_{1,2} - mg - ma) = 0. \quad (13)$$

Позначимо змінний час в другій фазі через T . Використовуючи початкові умови при $T = 0$: $P_{1,2} = F_{1,2}(t_1)$, $\dot{P}_{1,2} = \dot{F}_{1,2}(t_1)$, отримаємо формулу для визначення сили $P_{1,2}$:

$$P_{1,2} = ma(1 - \cos k_1 T) + V_0 \sqrt{m \cdot c_{1,2}} \sin k_1 T + mg, \quad (14)$$

$$\text{де } k_1 = \sqrt{\frac{c_{1,2}}{m}}.$$

З умови $\dot{P}_{1,2}(T_1) = 0$ отримаємо момент часу T_1 , при якому сила $P_{1,2}$ має найбільше значення [1]

$$T_1 = \frac{1}{k_1} \arctg \left(-\frac{V_0}{a} k_1 \right). \quad (15)$$

Маючи максимальні значення сил $F_{1,2}$ і $P_{1,2}$ при заданій величині допустимого нормального напруження для матеріалу канату, можна встановити запас його міцності для конкретних вихідних даних.

Чисельний аналіз задачі по визначенню зусиль у канаті реалізується за допомогою наступного алгоритму.

Виходячи з вихідних даних для вантажу, канату і балок, визначити:

- 1) зведену масу (формула (4));
- 2) зафіксувавши координати точок прикладення навантажень на балках A_0 і A_2 , тобто параметри α_0 (формула (6)) і α_2 (формула (7)), визначити коефіцієнти жорсткості (формули (5) і (7));
- 3) розв'язавши трансцендентні рівняння (11) і (12), визначити моменти часу t_1 і t_2 , відповідно;
- 4) підставивши значення t_2 у формулу (10), визначити максимальне зусилля в канаті в першій фазі руху;
- 5) максимальне зусилля в канаті в другій фазі руху визначити по формулі (14), підставивши значення T_1 (формула (15));
- 6) з'ясувати, чи задовольняє підйомний канат заданому запасу міцності K можна, вибравши більше зі значень $\sigma_I = \frac{F_{1,2\max}}{S}$ і $\sigma_{II} = \frac{P_{1,2\max}}{S}$ по формулі $\frac{[\sigma]}{\sigma_{\max}} \geq K$.

Блок-схема алгоритму чисельного аналізу задачі представлена на рис. 3.

Рис. 3 – Блок-схема чисельного аналізу задачі

Висновки

Запропонована методика дозволяє визначити зусилля, що виникають в канатах підйомних механізмів і в опорній балці в залежності від координат точок прикладання навантажень на опорну і мостову балку до моменту зняття вантажу з опори і при русі вантажу.

Маючи результати чисельних аналізів, можна робити висновки про раціональне поєднання параметрів підйомного пристрою з точки зору виконання умов міцності канату.

Перелік використаних джерел:

1. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями / С.Н. Кожевников. – Киев : Изд-во АН УССР, 1961. – 160 с.
2. Флоринский Ф.В. Динамика шахтного подъемного каната / Ф.В. Флоринский. – М. : Углетехиздат, 1958. – 239 с.
3. Клыков Н.И. О максимальных динамических усилиях в канате у обода барабана подъемной машины // Известия Томского политехнического института имени С.М. Кирова. – 1959. – Т. 104. – С. 23-25
4. Глушко М.Ф. Стальные подъемные канаты / М.Ф. Глушко. – Киев : Техника, 1966. – 327 с.
5. Малиновский В.А. Стальные канаты : аналитический справочник / В.А. Малиновский. – Одесса : Астропринт, 2016. – 252 с.
6. Шевченко Ф.Л. Динамические напряжения в канатах подъемников / Ф.Л. Шевченко, С.И. Бочаров / Захист металургійних машин від поломок : Зб. наук. пр. / ПДТУ. – Вип. 7. – Маріуполь, 2003. – С. 45-51.
7. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах / С.Н. Кожевников. – Киев : Наукова думка, 1986. – 286 с.
8. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г.Пановко. – М. : Высшая школа, 1967. – 316 с.

References:

1. Kozhevnikov S.N. *Dynamics of machines with elastic links* [Dynamics of machines with elastic links]. Kiev, AN USSR Publ., 1961. 160 p. (Rus.)
2. Florinsky F.V. *Dynamics of a mine hoisting rope* [Dynamics of a mine hoisting rope]. Moscow, Ugletekhizdat Publ., 1958. 239 p. (Rus.)
3. Klykov N.I. O maksimal'nykh dinamicheskikh usiliakh v kanate u oboda barabana pod'emnoi mashiny [On the maximum dynamic forces in the rope at the drum rim of a lifting machine]. *Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo instituta imeni S.M. Kirova – Bulletin of the Tomsk Polytechnic Institute*, 1959, vol. 104, pp. 23-25. (Rus.)
4. Glushko M.F. *Steel hoisting ropes* [Steel hoisting ropes]. Kiev, Technique Publ., 1966. 327 p. (Rus.)
5. Malinovsky V.A. *Steel ropes; analytical reference book* [Steel ropes; analytical reference book]. Odessa, Astroprint Publ., 2016. 252 p. (Rus.)
6. Shevchenko F.L., Bocharov S.I. Dinamicheskie napriazheniia v kanatakh pod'emnikov [Dynamic stresses in the ropes of hoists]. *Zakhist metalurgiiinikh mashin vid polomok – Protection of metallurgical machines against breakdowns*, 2003, vol. 7, pp. 45-51. (Rus.)
7. Kozhevnikov S.N. *Dynamics of non-stationary processes in machines* [Dynamics of non-stationary processes in machines]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1986. 286 p. (Rus.)
8. PankovYa.G. *Fundamentals of the applied theory of elastic vibrations* [Fundamentals of the applied theory of elastic vibrations]. Moscow, Higher school Publ., 1967. 316 p. (Rus.)

Рецензент: А.О. Іщенко

д-р техн. наук, проф., ДВНЗ «ПДТУ»

Стаття надійшла 04.09.2019