УДК 519.8

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ О ДИВЕРСИФИКАЦИИ

Жуковский В.И., д.-р. физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет, Москва

Произведено исследование и составлена математическая модель, отражающая сумму вклада в двух валютах на конец года. Составлена математическая модель для задачи о диверсификации.

Produced by the research and compiled a mathematical model that reflects the amount of the deposit in two currencies at year end. The mathematical model for the problem of diversification.

Ключевые слова: диверсификация, модель, сумма вклада, рублевое число, валютное число.

«Чтоб ты не делал, думай разумно и обдумывай результат.»

Математическая модель. Наращенную сумму вклада по двум депозитам: рублевому и в валюте, на конец года можно представить в виде:

$$f(x,y) = x(1+r) + \frac{1-x}{K_0}(1+d)y, \tag{1}$$

где

r и d - процентные ставки по рублевому и валютному депозитам соответственно;

K_0 и y - курс валюты (к рублю) в начале и в конце года;

$x \in [0,1]$ - дробь, которая определяет пропорцию, в которой вклад разделяется на рублевую и валютную часть.

Таким образом, x есть доля рублевого вложения, а остаток $1-x$ вкладчик конвертирует в валюту $\frac{1-x}{K_0}$ и помещает ее на валютный депозит. В конце года с помощью обратной конвертации по курсу y валюта переводится в рубли и итоговая наличность определяется суммой $f(x,y)$. Для вкладчика требуется определить пропорцию x, при которой итоговая сумма $f(x,y)$ будет возможно большей. При этом следует учесть, что будущий курс валюты y, как правило неизвестен. Он может быть задан коридором возможных значений, именно $y \in [a,b]$, где $b > a > 0$ – заданные постоянные. Рассмотрим теперь задачу инвестора найти пропорцию x^0, при которой его суммарная наличность в конце года $f(x,y)$ будет возможно большей, ориентируясь при этом на любой возможный курс y в заданном промежутке $[a,b]$; заметим, что в (1) постоянные r, K_0, d, a, b положительны и заданы априори.

Итак, математическая модель для задачи о диверсификации приобретает вид

$$\langle X = [0,1], Y = [a,b], f(x,y) \rangle \tag{2}$$

где функция $f(x,y)$ определена в (1).

Максимин. Явный вид ГВР представлен в следующем утверждении.

Утверждение 1. Для задачи (2) гарантированное по выигрышам решение (x^g, f^g) имеет вид

$$(x^g, f^g) = \begin{cases} (1, 1+r) \text{ для } 1+r < a\dfrac{1+d}{K_0}, \\ (0, \dfrac{a}{K_0}(1+d)) \text{ для } 1+r < a\dfrac{1+d}{K_0}, \\ (x, \dfrac{a}{K_0}(1+d)) \text{ для } 1+r < a\dfrac{1+d}{K_0} \text{ и } \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. При построении максимина функции $f(x,y)$ из (1) учитываем два обстоятельства:

во-первых, при всех $x \in [0,1]$ величина $\frac{1+d}{K_0}(1-x) > 0$;

во-вторых, функции $\left[1+r-(1+d)\frac{a}{K_0}\right]x$ линейка по $x \in [0,1]$, следовательно, ее максимальное значение при $1+r \neq (1+d)\frac{a}{K_0}$ достигается в граничных точках $x=0$ или $x=1$.

Найдем для $f(x, y)$ следующий максимин

$$f^g = \max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[a,b]} f(x,y) = \max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[a,b]}\left| x(1+r) + (1-x)\frac{1+d}{K_0}y \right| = \max_{x\in[0,1]}[x(1+r) + \min_{y\in[a,b]}(1-x)\frac{1+d}{K_0}y] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{x\in[0,1]}[x(1+r)+(1-x)\frac{1+d}{K_0}a] \\ (1+r) \text{ при } x=1. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1+d}{K_0}a + \sup\limits_{x\in[0,1]}(1+r\frac{1+d}{K_0}a)x \text{ при } x\in[0,1] \\ 1+r \text{ при } x=1 \end{array}\right. \quad (4)$$

Из (4) получаем максимальную стратегию

$$x^g = \begin{cases} 1 \text{ при } K_0(1+r) > a(1+d), \\ 0 \text{ при } K_0(1+r) < a(1+d), \\ \forall x\in[0,1] \text{ при } K_0(1+r) = a(1+d), \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда и из (1)

$$f^g = \begin{cases} 1+r \text{ при } K_0(1+r) > a(1+d), \\ \frac{1+d}{K_0}a \text{ при } K_0(1+r) \le a(1+d), \end{cases} \quad (6)$$

Объединение (5) с (6) приводит к справедливости (3). ■

Замечание 1. «Финансовый смысл» утверждения 1 достаточно «прозрачен»: с помощью него вкладчик, который является «противником риска», решает вопрос о том, какую часть имеющейся у него рублевой суммы вложить на год в рублевой депозит, а какую – в валютный. При этом ему известны процентные годовые ставки по рублевому (r) и валютному (d) депозитам, а также «коридор» $[a,b]$ курса валюты к рублю в конце года.

Утверждение 1 предлагает следующий прием.

Прежде всего нужно найти два числа $\gamma_1 = 1 + r$ и $\gamma_2 = \frac{1}{K_0}(1+d)a$. Первое из $\gamma_1 = 1 + r$ есть наращенная сумма, которую вкладчик получил бы в конце года, если бы вложил 1 рубль в рублевой депозит. Второе $\gamma_2 = \frac{1}{K_0}(1+d)a$ вычисляется следующим образом:

$\frac{1}{K_0}$ - один рубль переводится в валюту по курсу K_0 (этот курс был в начале года),

$\frac{1}{K_0}(1+d)$ - наращенная за год сумма в валюте на валютном депозите,

$\frac{1}{K_0}(1+d)a$ - перевод в рубли полученной валютной суммы при самом неблагоприятном для вкладчика курсе валютного депозита (a).

Если «рублевое число» $\gamma_1 = 1 + r$ больше «валютного» $\gamma_2 = \frac{1}{K_0}(1+d)a$, то утверждение 1 рекомендует вкладчику использовать только рублевой депозит $(x^g = 1)$,

если $\gamma_1 < \gamma_2$, то – только валютный, то есть $x^g = 0$,

если $\gamma_1 = \gamma_2$, то вкладчику безразлично, какую часть суммы вложить в рублевой депозит, а какую – в валютный.

В первом случае его доход от вложения 1 рубля будет $1 + r$, во втором и третьем такой доход будет не меньше $\frac{1+d}{K_0}a$ при любых колебаниях курса валюты (от «а» до «б»).

Минимаксное сожаление. Перейдем к нахождению гарантированного по рискам решения (x^r, Φ^r), «диктуемого» принципом минимаксного сожаления.

Утверждение 2. Для задачи (2) гарантированное по рискам решение (x^r, Φ^r) имеет вид

$$(x^r, \Phi^r) = \begin{cases} (1,0) \text{ при } b \le K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ (0,0) \text{ при } a \ge K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ \left(\frac{K_0\frac{1+r}{1+d} - a}{b-a}, \frac{\left(b - K_0\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K_0\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K_0(b-a)}\right) \text{ при } a < K_0\frac{1+r}{1+d} < b. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть коридор всевозможных значений y – курса валюты к рублю в конце года, задан отрезком $[a,b]$. Выделим три случая.

Случай 1. Предположим, что $b \le K_0 \frac{1+r}{1+d}$ или $b(1+d) \le K_0(1+r)$.

В этом случае имеет место цепочка неравенств

$$f(x,y)=x(1+r)+(1-x)\frac{1}{K_0}(1+d)y \le x(1+r)+(1-x)\frac{1}{K_0}(1+d)b \le x(1+r)+(1-x)\frac{1}{K_0}K_0(1+r)=1+r$$

при всех $x\in[0,1]$ и $y\in[a,b]$. Но наращения вклада $1+r$ можно достичь и за счет только рублевого депозита, то есть при $x=1$. Итак, в случае $b \le K_0 \frac{1+r}{1+d}$, вкладчику для максимального преумножения богатства (до $1+r$) достаточно всю сумму вложить в рублевой депозит. При этом (для $x=1$) по (4) функция риска

$$\Phi(x,y)\equiv \max_{z\in[0,1]} f(z,y)-f(x,y)\equiv 0.$$

Случай 2. Пусть $a \ge K_0\frac{1+r}{1+d}$ или $a(1+d)\ge K_0(1+r)$, но тогда и $b(1+d)>K_0(1+r)$. Аналогично случаю 1 получаем при всех $x\in[0,1]$ и $y\in[a,b]$ цепочки соотношений:

$$f(x,y)=x(1+r)+(1-x)\frac{1+d}{K_0}y=\frac{1}{K_0}\left[x(1+r)K_0+(1-x)(1+d)y\right]\le\frac{1}{K_0}\left[x(1+d)b+(1-x)(1+d)b\right]=\frac{(1+d)b}{K_0},$$

$$f(x,y)=\frac{1}{K_0}\left[x(1+r)K_0+(1-x)(1+d)y\right]\ge\frac{1}{K_0}\left[xa(1+d)+(1-x)(1+d)a\right]\ge\frac{a(1+d)}{K_0}.$$

Итак, наращенная сумма вклада $f(x,y)\in\left[\frac{1+d}{K_0}a,\frac{1+d}{K_0}b\right]$ при любых $x\in[0,1]$ и $y\in[a,b]$. Но такой же коридор появляется, если вкладчик использует только валютный депозит, то есть для $x=0$. Следовательно, при $a\ge K_0\frac{1+r}{1+d}$ вкладчику достаточно все деньги вложить только в валютный депозит. При этом (для $x=0$) функция риска

$$\Phi(x,y)=\frac{1+d}{K_0}y-\frac{1+d}{K_0}y\equiv 0 \qquad \forall y\in[a,b]$$

Случай 3. Остается рассмотреть возможность

$$a<K_0\frac{1+r}{1+d}<b.$$

откуда

$$a(1+d)<K_0(1+r), \qquad K_0(1+r)<b(1+d) \tag{8}$$

Прежде всего, построим функцию риска $\Phi(x,y)$. Так как функция $f(x,y)$, определенная в (1), линейна по $x\in[0,1]$, а $b\ge y\ge a>0$, то $\max\limits_{z\in[0,1]} f(z,y)$ достигается в граничных точках: $x=0$ или $x=1$. Тогда $\max\limits_{z\in[0,1]} f(z,y)=(1+r)$ или $\max\limits_{z\in[0,1]} f(z,y)=\frac{1+d}{K_0}y$. Отсюда и из (4) функция риска $\Phi(x,y)$ определяется равенствами

$$1+r-f(x,y)=\frac{1}{K_0}(1-x)\left[K_0(1+r)-y(1+d)\right],$$

$$\frac{1+d}{K_0}-f(x,y)=\frac{1}{K_0}x\left[y(1+d)-K_0(1+r)\right],$$

первое из них определяет недобор (проигрыш) комбинированного вклада по сравнению с рублевым, второе – по сравнению с валютным.

Итак, функция риска

$$\Phi(x,y)=\max\left\{\frac{1-x}{K_0}\left[K_0(1+r)-y(1+d)\right],\frac{x}{K_0}\left[y(1+d)-K_0(1+r)\right]\right\}.$$

В соответствии с определением

$$\Phi'=\min_{x\in[0,1]}\max_{y\in[a,b]}\Phi(x,y)=\min_{x\in[0,1]}\max_{y\in[a,b]}\max\left\{\frac{1-x}{K_0}\left[K_0(1+r)-y(1+d)\right],\frac{x}{K_0}\left[y(1+d)-K_0(1+r)\right]\right\}=$$

$$=\min_{x\in[0,1]}\max\left\{\max_{y\in[a,b]}\frac{1-x}{K_0}\left[K_0(1+r)-y(1+d)\right],\max_{y\in[a,b]}\frac{x}{K_0}\left[y(1+d)-K_0(1+r)\right]\right\}=$$

$$= \min_{x\in[0,1]} \max\left\{ \frac{1-x}{K_0}\left[K_0(1+r)-a(1+d)\right], \frac{x}{K_0}\left[b(1+d)-K_0(1+r)\right] \right\}.$$

Нахождение Φ' и соответствующей минимаксной стратегии x' проведем «графически».

Функции

$$\Phi_1(x) = \frac{1-x}{K_0}[K_0(1+r)-a(1+d)] \text{ и } \Phi_2(x) = \frac{x}{K_0}[b(1+d)-K_0(1+r)]$$

линейны по $x\in[0,1]$, их графики приведены на рис. 1.

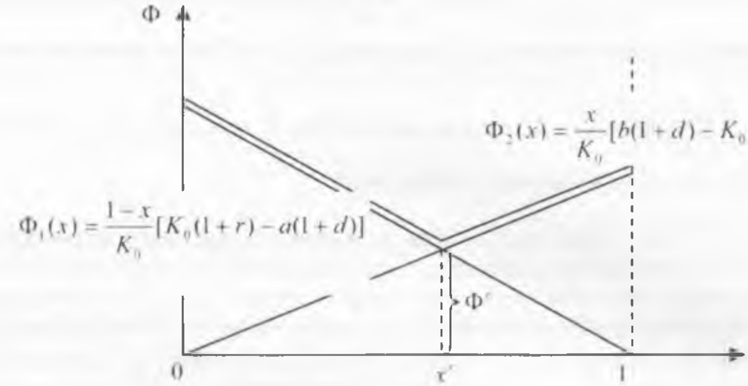

Рис.1. – Графики функций

Функция $\max\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$ на рис. 1 выделены двойной линией. Поэтому минимум в

$$\Phi' = \min_{x\in[0,1]} \max\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$$

достигается в точке пресечения прямых $\Phi = \Phi_1(x)$ и $\Phi = \Phi_2(x)$, а соответствующее x^r удовлетворяет равенству $\Phi_1(x') = \Phi_2(x')$, то есть $\frac{1-x^r}{K_0}[K_0(1+r)-a(1+d)] = \frac{x^r}{K_0}[b(1+d)-K_0(1+r)]$,

тогда

$$x^r = \frac{K_0\frac{1+r}{1+d}-a}{b-a}$$

и

$$\Phi' = \Phi_1(x') = \Phi_2(x') = \frac{\left(b-K_0\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K_0\frac{1+r}{1+d}-a\right)(a+d)}{K_0(b-a)}$$

Заметим, что $\Phi^r > 0$ в силу (8).

Наконец, объединение случаев 1-3 и устанавливает справедливость утверждения 2. ■

Замечание 2. Утверждение 2 использует вкладчик (уже «любитель риска») для построения гарантированного по рискам решениям (ГРР) задачи (2). Он располагает некоторой суммой и определяет пропорцию, в которой желает распределить эту сумму по рублевому и валютному депозитам. Если x – доля рублевого вложения, то остаток $1-x$ вкладчик конвертирует в валюту и помещает на валютный депозит. При выборе такого распределения он располагает сведениями о процентных ставках по рублевому (r) и валютному (d) депозитам, знает курс валюты к рублю в начале K_0 и коридор $[a,b]$ возможных значений y курса валюты в конце периода, то есть $a \le y \le b$.

Утверждение 2 рекомендует вкладчику по известным величинам r, d и K_0 вычислить число $K_0\frac{1+r}{1+d}$.

Затем,

если $b \le K_0\frac{1+r}{1+d}$, то можно использовать только рублевой депозит $(x=1)$, тем самым обеспечивая себе выигрыш $1+r$ с «самым хорошим» (нулевым) риском;

если $a \ge K_0\frac{1+r}{1+d}$, то утверждение 2 рекомендует всю сумму вложить в валютный депозит $(x=0)$; в этом случае вкладчик гарантирует себе с нулевым риском выигрыш $f(0,y)$, который

$$\frac{1+d}{K_0}a \le f(0,y) \le \frac{1+d}{K_0}b \qquad \forall y \in [a,b];$$

если $a < K_0\frac{1+r}{1+d} < b$, то (согласно утверждению 2) вкладчику рекомендуется $\frac{K_0\frac{1+r}{1+d}-a}{b-a}$-тую часть всей суммы вложить в рублевой депозит, а остаток $\frac{b-K_0\frac{1+r}{b-a}}{b-a}$ конвертировать в валюту и поместить на валютный депозит; это распределение x' дает гарантированный по рискам результат

$$\Phi' = \frac{\left(b-K_0\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K_0\frac{1+r}{1+d}-a\right)(1+d)}{K_0(b-a)}.$$

Таким образом, независимо от варианта реализации будущего курса валюты $y\in[a,b]$ риски (потери) $\Phi(x',y)$ заведомо не происходят Φ', то есть

$$\Phi(x^r, y) \le \Phi^r \qquad \forall y \in [a,b].$$

В заключение заметим, что приведенная здесь математическая модель крайне упрощена – учитывает далеко не все особенности диверсификационной политики: ведь «a well-written life is almost as rare as a well-spent one».

Замечание 3. Отметим также, что рассматриваемую задачу о диверсификации единичного вклада по двум депозитам можно трактовать и как двухкритериальную. Именно, удачный выбор пропорции x определяется двумя критериями. Первый из них $f_1(x)=x(1+r)$ соответствует стремлению вкладчика добиться возможно большего дохода от рублевого вклада, второй $f_2(x,y)=\frac{(1-x)}{K_0}(1+d)y$ характеризует доход от валютного вклада. В этой двухкритериальной задаче инвестор за счет подходящего выбора пропорции $x\in[0,1]$ стремится достичь возможно больших значений обоих критериев одновременно. При этом он должен учитывать, что будущий курс валюты y ему неизвестен и может принимать любые, заранее непредсказуемые значения из интервала $[a,b]$.

«Хорошо описанная жизнь такая же редкость, как и хорошо прожитая жизнь.»

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1965.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
3. Бережной Л.Н. Теория оптимального управления экономическими системами. Учебное пособие, Санкт-Петербург, 2002.
4. Васильев Н.И., Османов М.Н. Экономическая безопасность России в сфере внешнеэкономических связей. – М.: Макс Пресс, 2003.
5. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов – кибернетиков. – М.: Наука, 1985.

УДК 681.513+536.46+534.222.2+519.71

ПРОФИЛЬ ДАВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ КАК ОСНОВА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕТОНАЦИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ И ГАЗОВЫХ СИСТЕМ

Волков В.Э., канд. физ.-мат. наук, доцент
Титпкин А.С., аспирант
Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса

Произведено исследование профиля давления стационарной детонационной волны в рамках одномерной модели детонации. Показано, что профиль давления стационарной детонационной волны может служить основой теоретической оценки устойчивости детонации, которая, в свою очередь, позволяет создать систему поддержки принятия решений по проблемам детонации конденсированных и газовых систем.