У даній статті виконується порівняльний аналіз методів апроксимації для відновлення неперервних сигналів, що характеризуються підвищеною крутизною амплітуди та різким зростанням функції, за їх дискретними відліками рядом Котельникова та сплайн-функціями. Розроблено рекомендації для вибору та використання способів відновлення сигналів у залежності від їх форми на кінцевому проміжку

Ключові слова: інтерполяція, апроксимація, відновлення, амплітуда, сигнал, сплайн-функція, ряд Котельникова

В данной статье проводится сравнительный анализ методов аппроксимации для восстановления непрерывных сигналов, характеризующихся повышенной крутизной амплитуды и резким возрастанием функции, по их дискретным отсчетам рядом Котельникова и сплайн-функциями. Разработаны рекомендации по выбору и использованию способов восстановления сигналов в зависимости от их формы на конечном промежутке

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимация, восстановление, амплитуда, сигнал, сплайн-функция, ряд Котельникова

УДК 621.391

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА И СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

И. В. Стрелковская
Доктор технических наук, профессор, декан факультета «Инфокоммуникации»
Кафедра высшей математики*
E-mail: dekanat.ik@onat.edu.ua
Е. В. Лысюк
Преподаватель
Кафедра коммутационных систем*
E-mail: lysyuk_elena@mail.ru
Р. В. Золотухин*
E-mail: zolotuhin-roman@mail.ru
*Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова
ул. Кузнечная, 1, г. Одесса, Украина, 65029

1. Введение

При восстановлении непрерывного сигнала $s(t)$ по его дискретным значениям восстановленный сигнал в точности совпадает с исходным сигналом в узловых точках и отличается в промежуточных точках. Рассматривается вопрос о том, чтобы это отличие было минимальным, то есть, чем меньше величина отклонения исходного сигнала от восстановленного, тем точнее можно восстановить заданный сигнал.

Для восстановления непрерывных сигналов в телекоммуникационных системах используются полиномиальная и дробно-рациональная аппроксимации. Вместе с тем, эти методы обладают ограниченными возможностями. Так, при их использовании в окрестности особых точек возможны непрогнозируемые локальные возмущения, отмечается плохая сходимость и др. Успешно развиваемый в последние годы аппарат сплайн-аппроксимации (работы I. Schenberg, C. de Boor, Дж. Альберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша, С. Б. Стечкина, Ю. Н. Субботина, Ю. С. Завьялова, Б. И. Квасова, В. Л. Мирошниченко, В. А. Василенко, М. П. Корнейчука, А. О. Лигуна и др.), является серьезным конкурентом указанных видов аппроксимации, свободным от многих недостатков. К числу основных преимуществ сплайн-аппроксимации можно отнести следующие:

1) сплайны более устойчивы относительно локальных возмущений, то есть поведение сплайна в окрестности точки не сказывается на поведении сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальной интерполяции;

2) хорошая сходимость сплайн-интерполяции в отличие от полиномиальной.

В частности, для функций с нерегулярными свойствами гладкости неоспоримый приоритет за сплайн-интерполяцией.

Помимо перечисленных свойств сплайны обладают полезными экстремальными свойствами. Важным практическим достоинством является то, что сплайн-функции достаточно просто реализуются с помощью программных продуктов.

Не ослабевает интерес теоретиков к аппарату сплайн-аппроксимации и в области телекоммуникаций. Подтверждением этого являются, например, работы [1, 2, 3, 4, 5].

В работе [6] рассматривался вопрос о восстановлении случайных сигналов без «резких» изменений формы по их отсчетам с помощью ряда Котельникова и сплайн-интерполяции, удовлетворяющих неравенству:

$$|s(t)| < \frac{A}{|t|^2}, \quad (1)$$

где A – некоторая константа.

Были получены ошибки восстановления сигнала и даны рекомендации по восстановлению вышеуказанных сигналов с помощью сплайнов и ряда Котельникова.

Возникает вопрос, каковы будут ошибки аппроксимации рядом Котельникова и сплайн-функциями для сигналов с «резким» возрастанием их формы, удовлетворяющих условию (1); каковы рекомендации по их применению и, наконец, единственный ли это математический аппарат, который позволяет снизить ошибку аппроксимации, или существует другой альтернативный математический аппарат, более эффективный для заданного вида сигналов.

В связи с этим, возникает задача о получении оценок погрешности аппроксимации сигналов, характеризующихся резким возрастанием функции и удовлетворяющим условию (1) рядом Котельникова и кубическим сплайном.

2. Цель исследования

Целью данной работы является сравнительный анализ методов восстановления непрерывных сигналов, характеризующихся повышенной крутизной амплитуды и резким возрастанием функции по их отсчетам на основе ряда Котельникова и сплайн-функций.

3. Содержание работы

Пусть на промежутке $[0;T]$ задан непрерывный сигнал $s(t)$. Разобьем этот отрезок $[0;T]$ точками Δ: $0=t_0<t_1<...<t_N=T$ на частичные промежутки $[t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$, на каждом из которых построим многочлен определенной степени. В качестве таких многочленов будем рассматривать кубические сплайны. Таким образом, получаем на промежутке $[0;T]$ кусочно-непрерывную функцию, которая и будет определять кубический сплайн.

Пусть на отрезке [0; T] в узлах сетки Δ: $0=t_0<t_1<...<t_N=T$, заданы значения некоторой функции $s_i = s(t_i)$, $i=\overline{0,N}$.

Согласно [7] интерполяционным кубическим сплайном $S_3(t_i)$ называется сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$S_3(t_i)=S_i\ ,\ S_3(t_{i+1})=s_{i+1},\ i=\overline{0,N-1}\,; \tag{2}$$

- на каждом из отрезков $[t_i,t_{i+1}]$ $i=\overline{0,N-1}$ он является многочленом третьей степени;

- на всем отрезке [0; T] обладает непрерывностью производных:

$$S_3^{'}(0+0)=f'(0),$$

$$S_3^{'}(T-0)=f'(T).$$

Согласно теореме Котельникова [8], отсчеты берутся через шаг дискретизации τ, который равен $\tau=\dfrac{1}{2F_{max}}$, где F_{max} – максимальная частота в спектре исходного сигнала. Базисными функциями ряда Котельникова служат функции отсчетов, которые образуют ортогональную на бесконечном промежутке (–∞; +∞) систему функций, т.е.

$$\phi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k\tau)\frac{\sin\omega_m(t-k\tau)}{\omega_m(t-k\tau)}\,, \tag{3}$$

где $\omega_m=2\pi F_{max}$ – высшая круговая частота в спектре сигнала;

F_{max} – максимальная частота в спектре исходного сигнала;

τ – шаг дискретизации.

Допустим, что в любой момент времени на промежутке $[0;T]$ задан непрерывный сигнал $s(t)$ функцией вида:

$$s(t)=2\frac{\sin(16\pi(t-\frac{1}{2}))}{16\pi(t-\frac{1}{2})}-3\frac{\sin(8\pi(t-\frac{1}{2}))}{8\pi(t-\frac{1}{2})}\,. \tag{4}$$

На промежутке $[0;T]$ зададим равномерную сетку разбиения следующим образом: $\Delta:0=t_0<t_1<...<t_N=T$, где $t_1-t_0=t_2-t_1=...=t_N-t_{N-1}=\tau$ – шаг дискретизации. Пусть в точках разбиения известны значения функции $s=s(t)$: $s(t_i)=s_i$, $i=\overline{0,N}$.

Восстановление исходного непрерывного сигнала $s(t)$ осуществим с помощью ряда Котельникова вида (3) и кубическим сплайном вида (2).

Рассмотрим сигнал $s(t)$ вида (4), который ограничен по спектру F_{max} = 8 кГц с заданной частотой дискретизации $f_д$=16 кГц, при этом шаг дискретизации $\tau=\dfrac{1}{2F_{max}}=\dfrac{1}{16}$.

В качестве узлов интерполяции будем рассматривать отсчеты исходного сигнала $s(t)$.

Результаты расчета в среде *Mathcad* 15 представлены на рис. 1, при этом:

(1) – график заданного сигнала вида (4);

(2) – значения функции в узлах интерполяции;

(3) – аппроксимация исходного сигнала $s(t)$ рядом Котельникова;

(4) – аппроксимация исходного сигнала $s(t)$ кубическим сплайном.

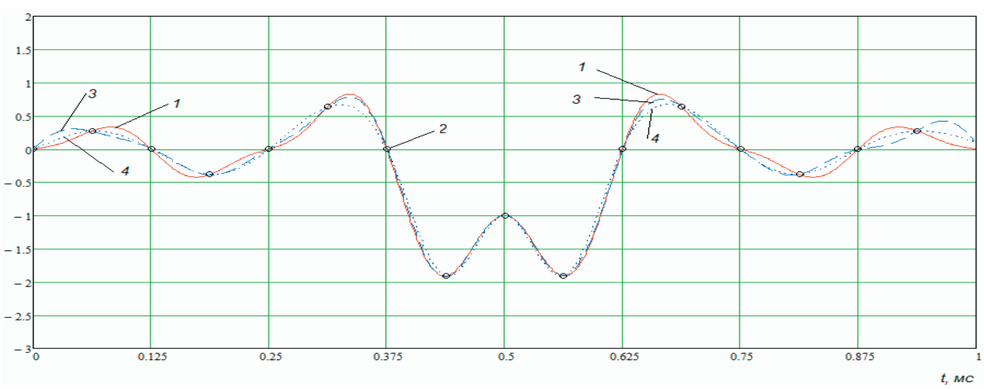

Рис. 1. Аппроксимация сигнала $s(t)$ с помощью ряда Котельникова и кубическим сплайном

Пусть $\phi(t)$ – аппроксимирующая функция, в качестве которой в рассмотренном примере выступает ряд Котельникова и кубический сплайн. На рис. 2 показано отклонение значений восстановленного сигнала от его исходного значения при аппроксимации рядом Котельникова (1) и кубическим сплайном (2).

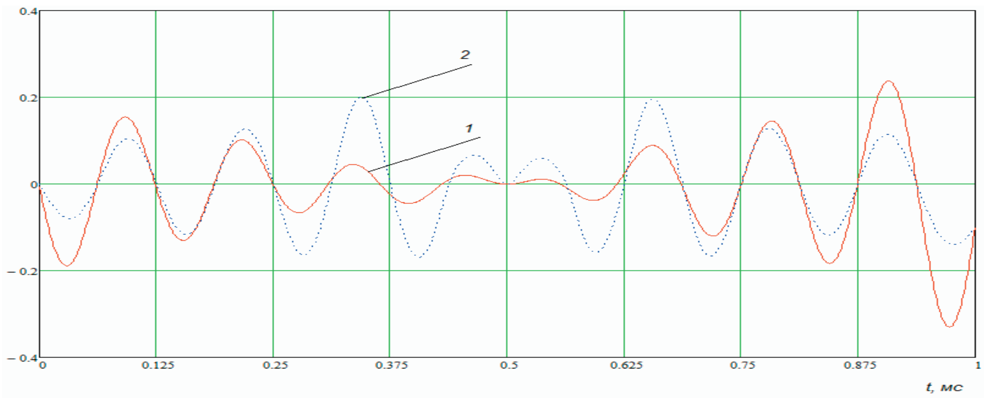

Рис. 2. Отклонение исходного сигнала $s(t)$ от восстановленного

Рассмотрим произвольный частичный промежуток разбиения $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$. Разобьем каждый из этих промежутков на n частей. Точки разбиения каждого такого промежутка обозначим через t_{ij}, $i=\overline{0,N}$, $j=\overline{1,n}$. Таким образом, на каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$ задана своя сетка разбиения Δ': $t_i=t_{i0}<t_{i1}<...<t_{in}=t_{i+1}$ с шагом разбиения $\tau'=\dfrac{1}{64}$.

Согласно формуле (5) работы [6] определим среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_n на каждом из частичных промежутков $[t_i, t_{i+1}]$, где $i=\overline{0,N-1}$, значения ε_n сведем в табл. 1.

Вычислим среднеквадратическое отклонение (СКО) разности восстановленного и исходного сигналов [9]:

$$\sigma_n=\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i,j}(\phi(t_{ij})-\varepsilon_n)^2},\quad i=\overline{0,N},\quad j=\overline{1,n} \qquad (5)$$

где $\phi(t_{ij})$ – значение интерполирующей функции в точках разбиения каждого частичного промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$;

ε_n – средняя величина отклонения значения восстановленного сигнала от его исходного значения на каждом частичном промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$;

t_{ij} – точки разбиения каждого частичного промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$, $j=\overline{1,n}$;

$k=n$ –количество точек разбиения на каждом частичном промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,N-1}$.

Результаты значений СКО разности восстановленного и исходного сигнала рядом Котельникова и кубическим сплайном для каждого частичного промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, где $i=\overline{0,N-1}$ приведены в табл. 1.

Несложно заметить, что на промежутках интерполяции «с плавным изменением амплитуды» (табл. 1, промежутки $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_{12}, t_{13}]$, $[t_{13}, t_{14}]$, $[t_{14}, t_{15}]$, $[t_{15}, t_{16}]$), где форма сигнала непрерывно изменяется без «повышенной крутизны амплитуды» лучшие результаты дает сплайн-интерполяция. А на участках с «повышенной крутизной амплитуды» (табл. 1, промежутки $[t_3, t_4]$, $[t_4, t_5]$, $[t_5, t_6]$, $[t_6, t_7]$, $[t_7, t_8]$, $[t_8, t_9]$, $[t_9, t_{10}]$, $[t_{10}, t_{11}]$, $[t_{11}, t_{12}]$) – интерполяционный ряд Котельникова.

Таким образом, становится очевидным тот факт, что для восстановления непрерывных сигналов, обладающих повышенной крутизной амплитуды и резким возрастанием функции, необходимо рассмотреть возможность использования другого математического аппарата, который позволит уменьшить ошибку аппроксимации и будет более эффективным для восстановления заданного вида сигналов.

Таблица 1

Значения СКО

разности восстановленного и исходного сигнала

№	Промежуток	Численные границы промежутка	ε_n ряда Котельникова	ε_n кубического сплайна	σ_n рядом Котельникова	σ_n кубическим сплайном
1	$[t_0, t_1]$	[0; 0,063]	0,119	0,05	0,059	0,025
2	$[t_1, t_2]$	[0,063; 0,125]	0,098	0,066	0,048	0,032
3	$[t_2$, t3]	[0,125; 0,188]	0,083	0,074	0,041	0,036
4	$[t_3, t_4]$	[0,188; 0,25]	0,066	0,082	0,031	0,038
5	$[t_4, t_5]$	[0,25; 0,313]	0,039	0,103	0,023	0,051
6	$[t_5, t_6]$	[0,313; 0,375]	0,023	0,128	0,02	0,061
7	$[t_6, t_7]$	[0,375; 0,438]	0,027	0,106	0,017	0,053
8	$[t_7, t_8]$	[0,438; 0,5]	0,012	0,041	0,0072	0,022
9	$[t_8, t_9]$	[0,5; 0,563]	0,0048	0,036	0,0049	0,02
10	$[t_9, t_{10}]$	[0,563; 0,625]	0,022	0,099	0,015	0,049
11	$[t_{10}, t_{11}]$	[0,625; 0,688]	0,059	0,121	0,026	0,062
12	$[t_{11}, t_{12}]$	[0,68; 0,75]	0,079	0,107	0,035	0,05
13	$[t_{12}, t_{13}]$	[0,75; 0,813]	0,091	0,081	0,046	0,04
14	$[t_{13}, t_{14}]$	[0,813; 0,875]	0,117	0,076	0,056	0,036
15	$[t_{14}, t_{15}]$	[0,875; 0,938]	0,149	0,072	0,075	0,037
16	$[t_{15}, t_{16}]$	[0,938; 1]	0,225	0,102	0,092	0,038

На наш взгляд, таким аппаратом могут служить вейвлет-функции [10], которые имеют вид коротких ограниченных по времени волн, изменяющихся в масштабе и перемещающихся по оси времени, благодаря чему эти «короткие волны» способны отражать локальные изменения в сигнале.

4. Выводы

1. Проведено сравнение двух способов восстановления непрерывных сигналов по их дискретным отсчетам с помощью ряда Котельникова и сплайн-функций для сигналов с «повышенной крутизной амплитуды».

2. Полученные оценки погрешности аппроксимации сигнала рядом Котельникова и кубическим сплайном позволяют утверждать, что при небольшой частоте дискретизации, в случае, когда амплитуда сигнала имеет плавное изменение лучше использовать сплайн-интерполяцию, а для сигналов с резким возрастанием амплитуды предпочтительнее использовать интерполяционный ряд Котельникова. Иначе ошибка интерполяции может достигать 6,2% и 9,2% в первом и во втором случаях соответственно (табл. 1).

3. Проведенное исследование показывает, что необходимо рассмотреть возможность использования другого математического аппарата, который позволит восстанавливать сигналы, характеризующиеся наличием быстрых осцилляций с большей точностью, чем ряд Котельникова или кубические сплайны.

На наш взгляд, таким аппаратом могут служить вейвлет-функции. Но это уже вопрос дальнейших исследований.

Литература

1. Аджемов, А.С. Метод аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразований на основе сплайн-интерполяции [Текст] / А. С. Аджемов, П. А. Бакут, В. А. Богданович. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
2. Николаенко, В.М. Сглаженная сплайн-аппроксимация при обобщенном макромоделировании [Текст] / В. М. Николаенко, О. В. Логинов // Радиоэлектроника: Изв. высш. учебн. Заведений. – 1988. – Т. 31 - №9. – С. 69-71.
3. Агиевич, С.Н. Приложения сплайн-аппроксимации к обработке функций частотно-временной плотности распределения сигналов /[Текст] С. Н. Агиевич, А. А. Алексеев, Е. И. Глушанков, А. Б. Кириллов // Радиоэлектроника. – 1994. - №6. – С. 41-49.
4. Желудев, В. А. Восстановление функций и их производных по сеточным данным с погрешностью при помощи локальных сплайнов [Текст] / В. А. Желудев // Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. – 1987. – Т. 27, №1. С. 22-34.
5. Желудев, В.А. Локальная сплайн-аппроксимация на равномерной сетке [Текст] / В.А. Желудев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27, №9. – С. 1296-1309.
6. Стрелковская, И. В. Восстановление непрерывных сигналов на основе ряда Котельникова и кубических сплайнов [Текст] / И. В. Стрелковская, Д. Ю. Бухан // Радиотехника. – 2007. Вып. 151. – С. 181-185.
7. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / [Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко]. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
8. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] / И. С. Гоноровский. – М.: Радио и связь, 1986. – 512с.
9. Навицкий, П. В. Оценка погрешности результатов измерений – 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / П. В. Навицкий, И. А. Зограф – Ленинград: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1991. – 301 с.
10. Геранін, В. О. Теорія вейвлетів з елементами фрактального аналізу [Текст] / В. О. Геранін, Л. Д. Писаренко, Я. Я. Рушицький.: Науково-методичне видання. – Київ: ВПФ УкрІНТЕІ, 2002. – 364 с.

УДК 519.854

GRID-СИСТЕМИ ТА РОЗПОДІЛЕНІ (ХМАРНІ) ОБЧИСЛЕННЯ

В. А. Лабжинський
Кандидат технічних наук
Кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів і систем
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
вул. Політехнічна, 6, м. Київ, Україна, 01056
E-mail: info@aspirantura.org.ua

Досліджено технології Grid в сучасних ресурсномістких інформаційних системах. Визначено поняття Grid-системи, подано будову Grid-технології, описано напрямки застосування Grid. Увагу приділено використанню Grid-технологій в науковій сфері. Визначено проблеми використання Grid-технологій в мережі Інтернет

Ключові слова: Grid-системи, Grid-технології, інструменти, інформаційні системи, наукова сфера, національна Grid-інфраструктура

Проведено исследование технологии Grid в современных ресурсоемких информационных системах. Определены понятия Grid-системы, представлено строение Grid-технологии, описаны направления применения Grid. Внимание уделено использованию Grid-технологий в научной сфере. Определены проблемы использования Grid-технологий в сети Интернет

Ключевые слова: Grid-системы, Grid-технологии, инструменты, информационные системы, научная сфера, национальная Grid-инфраструктура

1. Вступ

В останні десятиріччя відбулись зміни в засобах сприйняття і використання обчислювальних ресурсів і послуг. Якщо раніше вважалося нормальним задовольняти обчислювальні потреби через локальні обчислювальні платформи та обмежені інфраструктури типу персональних комп'ютерів та локальних