

Експериментальні дані вказують, що за 30 хвилин, при рівні акустичного випромінювання 165 дБ, гіроскоп втрачає одну ступінь вільності.

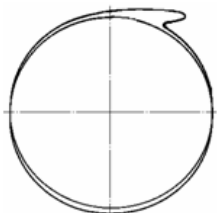


Рис. 6. Тангенціальні переміщення $V = \sum_{-150}^{150} \sum_1^{10} V_{mn}$; $z=0,01\text{м}$; $w=1 \times 10^3 c^{-1}$

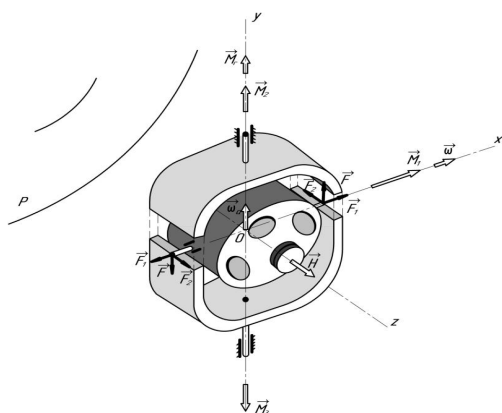


Рис. 7. Механізм взаємодії акустичної хвилі з кожухом та наружною рамкою гіроскопу

4. Висновки

Отримані аналітичні апроксимації пружних переміщень поверхні підвісу дозволяють в подальшому, з огляду на природу появи Ейлеревих сил інерції за хитаючи корпусу ракети-носія, внести інтегровані оцінки додаткових збурень гіроскопа у вигляді моментів сил інерції Кориоліса в правих частинах рівнянь руху відносно осей – внутрішньої і зовнішньої рамок.

Пояснення природи явища і механізму його прояву можуть слугувати підґрунтям для вибору шляхів боротьби з негативним впливом акустичного випромінювання.

Література

1. Данилин, В.П. Гироскопические приборы [Текст]: учебник / В.П. Данилин. – М.: Высшая шк., 1965. – 538с.
2. Даэр, И. Колебания корпуса космического аппарата под действием шума ракетных двигателей [Текст] / И. Даэр // Случайные колебания / Под ред. С. Крендела.- М.: Мир, 1967. – С. 192-211.
3. Гладкий, В.Ф. Динамика конструкции летательного аппарата [Текст] / В.Ф. Гладкий. – М.: Наука, 1969. – 496 с.
4. Melnik, V.N., Karachun, V.V. Some aspects of gyroscopic stabilisation in acoustic fields // International Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 88, №1. – P.74-80.

УДК 629.7.054

СТАЦІОНАРНА ВЗАЄМОДІЯ АКУСТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ З КОЛОВОЮ ПЛАСТИНОЮ

Т.М. Лозовик

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кафедра математичної фізики
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
Контактний тел.: (044) 454-94-51
E-mail: karachun 1@gala.net

Аналізується стаціонарна взаємодія хвилі надлишкового тиску звукової частоти з коловою ізотропною пластинною. Будується розрахункова модель явища на підґрунті променевої акустики

Ключові слова: акустическая волна, круглая пластина, акустический импеданс

Анализируется стационарное взаимодействие волны избыточного давления звуковой частоты с круглой изотропной пластиной. Строится расчетная модель явления на основе лучевой акустики

Ключевые слова: акустична хвиля, колова пластина, акустичний імпеданс

The stationary co-operating of wave of surplus pressure of audio-frequency is analysed with a round isotropic plate. The calculation model of the phenomenon is built on the basis of radial acoustics

Keywords: acoustic wave, round plate, acoustic impedance

Вступ

Дослідження відносяться до області прикладної механіки і присвячені вивченню і аналітичному опису природи пружної взаємодії колової пластини з проникаючим акустичним випромінюванням. Колові пластини являють собою найпоширеніший елемент комплектуючих бортової апаратури рухомих об'єктів і підвищений інтерес до вивчення їх динаміки постає в певній мірі актуальним.

Побудову розрахункових моделей пластин у цьому разі слід починати з вивчення граничних умов – дифракція звуку на абсолютно м'якій поверхні (задача Діріхле), дифракція звуку на абсолютно жорсткій поверхні (задача Неймана), дифракція звуку на імпедансній поверхні (змішана крайова задача). Зупинимось на останньому.

Аналіз стану проблеми і постановка задачі досліджень

Вивчення динаміки пластин для різних потреб їх використання мають досить тривалу історію. Зокрема, питання віброізоляції постали перед дослідниками значно раніше, ніж питання звукоізоляції. Тому вони вже досить ґрунтовно вивчені вітчизняними вченими і закордонними [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Разом з тим, питання пружної взаємодії пластин бортової апаратури з проникаючим акустичним випромінюванням з боку рушійних установок почали свій шлях нещодавно. Це обумовлено особливістю їх динаміки в механічних системах підвісів гіроскопа і впливом на похибки приладів інерціальної навігації.

Метою досліджень постає побудова розрахункових моделей пружної взаємодії акустичного випромінювання з тонкою ізотропною коловою пластиною.

Рівняння руху. Одновимірна задача

Механічну модель проходження звуку крізь колову пластину наведемо наступним чином (рис. 1).

З лівого, лицьового боку, на пластину падає плоска монохроматична хвиля тиску P в напрямку \vec{n} до фронту. Товщину пластини приймемо рівною h , а радіус – R .

Систему координат $Oxyz$ сполучимо з серединною площиною, точку O розташуємо у геометричному центрі пластини. Таким чином, вона найбільш підвладна дії акустичного променя в напрямку Oz нормалі до поверхні, бо саме тут мінімальний імпеданс у порівнянні з іншими двома.

Проаналізуємо збурений рух пластини за цих умов. Диференціальне рівняння вимушених коливань у формі Софі Жермен має вигляд:

$$D\Delta^2 W(x,y,t) + \rho h \ddot{W}(x,y,t) = q(x,y,t), \quad (1)$$

де $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = A$ – ітерований

лапласіан, бігармонічний оператор; $D = Eh[12(1-\sigma)]^{-1}$, ρ , h , σ – циліндрична жорсткість, щільність матеріалу, товщина, коефіцієнт Пуасона, відповідно.

Пластина вібрує відносно площини xOy . Рівняння (1) доречне в плоскій області V , яка розташована в системі xOy . Розв'язки шукаємо для $t > 0$.

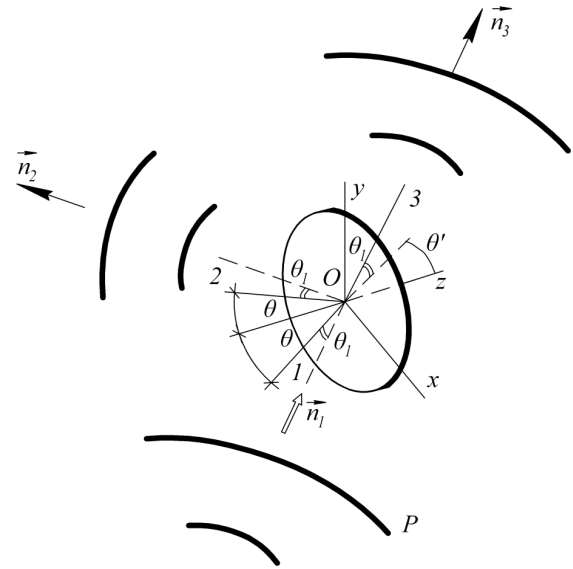


Рис. 1. Схема проходження звукової хвилі крізь колову пластину

Рівняння (1) дає достатні результати, якщо відношення товщини до найменшої довжини генеруємої хвилі не перевищує 0, 1. В іншому разі слід враховувати зсув та інерцію обертання, або вирішувати тривимірну задачу.

Стаціонарна взаємодія. Виключимо з розгляду час t . Рівняння (1) набуде вигляду:

$$AW = \Delta^2 W(x,y) = D^{-1}q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x,y), \quad (2)$$

де $f(x,y)$ – проекція щільності збурюючої сили $\vec{k}f(x,y)$ на нормаль до лицьової поверхні.

На бічній поверхні M пластини

$$M: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3)$$

мають місце граничні умови першого роду

$$W|_M = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n_1} \Big|_M = 0 \quad (4)$$

що відповідає жорсткому закріпленню площі Міделя. Символом n_1 позначена зовнішня нормаль до бічної поверхні.

Побудуємо систему лінійно незалежних функцій

$$u_i = u_i(x,y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

які належать області визначення бігармонічного оператора $A = \Delta^2$ і задовольняють умовам (3). Назвемо їх координатними. Їх лінійну оболонку позначимо через U^N . Таким чином, координатні функції u_i утворюють базис

$$\{U\} = u_1, u_2, \dots, u_N$$

в своїй лінійній оболонці U^N .

Окреслимо наближене розв'язання W задачі (2) ... (4) у вигляді лінійної комбінації координатних функцій

$$W \approx c^i u_i(x,y), \quad i = \overline{1, N} \quad (6)$$

із стовпцем

$$C = (c^1 \quad c^2 \quad \dots \quad c^N)^T \quad (7)$$

невизначених коефіцієнтів c^i , які підлягають обчисленню. Тоді вираз (6) приводить до наступної наближеної рівності –

$$AW \approx A c^i u_i(x,y) = c^i A u_i(x,y) \approx f(x,y) \quad (8)$$

З'ясуємо найкращий шлях вибору стовпця C . Для цього позначимо

$$A u_i(x,y) = v_i \quad (9)$$

i назвемо ці величини образами координатних функцій u_i . Лінійну оболонку образів назвемо V^N і зауважимо, що

$$A : U^N \rightarrow V^N \quad (10)$$

Спочатку доведемо, що образи координатних функцій також лінійно незалежні і, отже, утворюють базис у V^N . Для цього побудуємо лінійну комбінацію образів v_i координатних функцій u_i :

$$\alpha^i v_i(x,y) = \alpha^i A u_i(x,y) = A \alpha^i u_i(x,y) \equiv 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

Відомо, що оператор A додатньо визначений для класу функцій, які відповідають граничним умовам (4), що означає

$$(A \alpha^i u_i, \alpha^i u_i) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (A \alpha^i u_i) \alpha^i u_i dx dy \geq \gamma^2 \|\alpha^i u_i\|^2,$$

де $0 < \gamma$ – стала, що вільна від $\alpha^i u_i$. Звідси

$$\alpha^i u_i(x,y) \equiv 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

Але координатні функції лінійно незалежні, тому

$$\alpha^i = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

i це доводить лінійну незалежність функцій $v_i = A u_i$, отже вони утворюють базис

$$\{V_i\} = v_1, v_2, \dots, v_N$$

у своїй лінійній оболонці V^N .

Вирази (8), (9) приводять до наближеної рівності

$$c^i v_i(x,y) \approx f(x,y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad i = \overline{1, N} \quad (11)$$

Найкращим вважається стовпець

$$C = (c^1 \quad c^2 \quad \dots \quad c^N)^T$$

при якому

$$c^i v_i(x,y) = \text{пр}_1^N f(x,y) \quad (12)$$

Ця умова являє собою один з варіантів класичної ідеї, що сходиться до *Ld. Rayleigh*, В. Рітца, І. Бубнова, С. Тимошенка, Б. Галеркіна.

За цих умов, стовпець C постає розв'язанням системи рівнянь

$$(v_i, v_j) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_i(x,y) v_j(x,y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} g_{ij}; \quad (13)$$

$$(f, v_j) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) v_j(x,y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} f_j.$$

В більш компактній формі це має наступний вигляд

$$GC = (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N)^T \quad (14)$$

де $G = (g_{ij})$, $i, j = \overline{1, N}$, що є матрицею Грама

лінійно незалежних векторів v_i ($i = \overline{1, N}$), внаслідок чого $\det G > 0$ і система (14) однозначно розв'язувана –

$$C = G^{-1} (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N)^T \quad (15)$$

Оберемо за координатні функції наступні:

$$u_1 = \left(1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} \right)^2; \quad u_2 = \frac{x}{R} u_1; \quad u_3 = \frac{y}{R} u_1; \quad (16)$$

$$u_4 = \frac{x^2}{R^2} u_1 \quad u_5 = \frac{y^2}{R^2} u_1 \quad u_6 = \frac{xy}{R^2} u_1.$$

Вони безрозмірні, належать до області визначення бігармонічного оператора $A = \Delta^2$, а також задовольняють граничним умовам (4). Образи $A = \Delta^2$ цих функцій визначаються співвідношеннями:

$$v_1 = A u_1 = \frac{4!}{R^4} + \frac{4!}{R^4} + \frac{16}{R^4} = \frac{64}{R^4};$$

$$v_2 = A u_2 = \frac{120}{R^5} x + \frac{48}{R^5} x + \frac{24}{R^5} x = \frac{192}{R^5} x;$$

$$v_3 = A u_3 = \frac{24}{R^5} y + \frac{48}{R^5} y + \frac{120}{R^5} y = \frac{192}{R^5} y;$$

$$v_4 = A u_4 = \frac{32}{R^4} \left(-2 + \frac{15}{R^2} x^2 + \frac{3}{R^2} y^2 \right); \quad (17)$$

$$v_5 = A u_5 = \frac{32}{R^4} \left(-2 + \frac{3}{R^2} x^2 + \frac{15}{R^2} y^2 \right);$$

$$v_6 = A u_6 = \frac{120}{R^6} xy + \frac{144}{R^6} xy + \frac{120}{R^6} xy = \frac{384}{R^6} xy.$$

Залишається тільки обчислити елементи матриці Грама образів координатних функцій

$$g_{ij} = (v_i, v_j) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_i(x,y) v_j(x,y) dx dy$$

Остаточно матриця Грама набуває виду:

$$G = (g_{ij}) = \frac{4^5}{R^6} \pi \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad i, j = \overline{1, 6} \quad (18)$$

Обчислимо елементи стовпця F:

$$(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6)^T \stackrel{\text{def}}{=} F.$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_1 f(x,y) dx dy = \frac{64}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) dx dy; \\ f_2 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_2 f(x,y) dx dy = \frac{192}{R^5} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x f(x,y) dx dy; \\ f_3 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_3 f(x,y) dx dy = \frac{192}{R^5} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y f(x,y) dx dy; \\ f_4 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_4 f(x,y) dx dy = \frac{32}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(-2 + \frac{15}{R^2} x^2 + \frac{3}{R^2} y^2\right) f(x,y) dx dy; \\ f_5 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_5 f(x,y) dx dy = \frac{32}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(-2 + \frac{3}{R^2} x^2 + \frac{15}{R^2} y^2\right) f(x,y) dx dy; \\ f_6 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_6 f(x,y) dx dy = \frac{384}{R^6} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy f(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \frac{3^2}{R^4} \begin{pmatrix} 2I_0 \\ \frac{6}{R} I_x \\ \frac{6}{R} I_y \\ -2I_0 + \frac{15}{R^2} I_{x^2} + \frac{3}{R^2} I_{y^2} \\ -2I_0 + \frac{3}{R^2} I_{x^2} + \frac{15}{R^2} I_{y^2} \\ \frac{12}{R^2} I_{xy} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x,y) dx dy; & I_x &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x f(x,y) dx dy; \\ I_y &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y f(x,y) dx dy; & I_{x^2} &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 f(x,y) dx dy; \\ I_{y^2} &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y^2 f(x,y) dx dy; & I_{xy} &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy f(x,y) dx dy. \end{aligned} \quad \text{де} \quad (21)$$

Внаслідок умови (15) –

$$C = G^{-1} F \quad (22)$$

Залишається тільки окреслити значення моментів щільності зведеної сили

Висновки

Наведені результати не тільки аналітично описують механізм пружної взаємодії звукових полів з пластинами, але формують можливості вивчення явища на ЕОМ. Це дозволяє надалі будувати більш складні розрахункові моделі і вивчати дію безлічі чинників на ізотропну пластину

Література

1. Валеев, К.Г., Квитка, В.Е. Определение напряженного состояния плоской панели в акустическом поле выхлопной струи [Текст] / К.Г. Валеев, В.Е. Квитка // Прикл. механика. – 1970. – Т VI, № 4. – С. 39-43.
2. Боголепов, И.И., Авферонов, Э.И. Звукоизоляция на судах [Текст] / И.И. Боголепов, Э.И. Авферонов. – Л.: Судостроение, 1970. – 192 с. – Библиогр.: с. 190-191.
3. Заборов, В.И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций [Текст] / В.И. Заборов. – М.: Стройиздат, 1969. – 179 с.
4. Ржевкин, С.Н. Курс лекций по теории звука [Текст]: учеб. / С.Н. Ржевкин. – М.: Наука, 1960. – 307 с.
5. Cremer, L., Heckl, M. Körperschall. – Springer – Verlag, 1967. – 498 p.
6. Plunkett, R. Interaction between a vibratory machine and its foundation // Noise Control, 1958. – Vol. 4, № 1. – P. 18-22.