

*Розглянуто можливість застосування нелінійного методу можливих переміщень [1, 2] для розрахунку плоскої статичної задачі теорії пружності [3], в нелінійній постановці. Показано вплив урахування нелінійних ефектів як на побудову моделі так і на алгоритм розрахунку*

*Ключові слова: дискретна модель, геометрична нелінійність*

*Рассмотрена возможность применения нелинейного метода возможных перемещений [1, 2] для расчета плоской статической задачи теории упругости [3] в нелинейной постановке. Показано влияние учета нелинейных эффектов, как на построение модели, так и на алгоритм расчета*

*Ключевые слова: дискретная модель, геометрическая нелинейность*

*The possibility of applying non-linear method of virtual displacements [1, 2] to calculate the plane static problem of elasticity theory [3] in a nonlinear formulation is described in this article. The effect of allowing nonlinear effects, as in model building, and the calculation algorithm is observed here*

*Keywords: discrete model, geometric nonlinearity*

# РОЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**А. Д. Шамровский**

Профессор, доктор технических наук\*

E-mail: adshamr@rambler.ru

**Д. Н. Колесник**

Аспирант

\*Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия

пр. Ленина, 226, г. Запорожье, 69006

Контактный тел.: (061) 223-82-21

E-mail: mylogin2006@rambler.ru

## Введение

Ранее в работах [1, 2] был изложен метод возможных перемещений, позволяющий решать статические задачи о нагружении стержневых систем без составления уравнения равновесия. Важной особенностью метода является то, что он одинаково пригоден как для линейных, так и нелинейных задач. В работе [3] была показана возможность применения данного метода для расчета плоской статической задачи теории упругости в линейной постановке. Данная работа посвящена возможности применения указанного метода для решения аналогичных задач с учетом геометрической нелинейности, а так же рассмотрению проблем возникающих при этом.

Аналогично работе [3] используется дискретный элемент прямоугольной формы, состоящий из четырех узлов, соединенных шестью упругими связями (рис. 1).

Жесткости этих упругих связей находятся исходя из экспериментальных данных. При этом значения жесткостей зависят от вида деформирования элемента. Решение задач на основе данной дискретной модели дает в линейном случае те же результаты для перемещений угловых точек, что и на основе экспериментальных данных либо на основе эквивалентной континуальной модели.

Однако, как указывалось, метод возможных перемещений [1, 2] позволяет решать и нелинейные задачи. При этом приходится пересматривать многие клас-

сические понятия. В частности в механике деформируемого твердого тела одним из основных является понятие краевой задачи, т.е. предполагается, что для тела заданной формы и размеров известны напряжения и (или) перемещения на границах тела и требуется найти деформации и напряжения для всех точек тела.

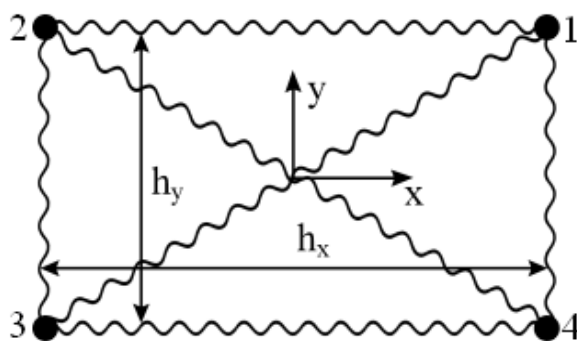


Рис. 1. Дискретная модель прямоугольного элемента

Этот существенно-линейный подход опирается на предположения о малости деформаций по сравнению с размерами тела. В силу этого считается, что граничные условия заданы для тела исходной формы и размеров, пренебрегая перемещениями нагруженных границ. С этим связано и понятие напряжения в линейном случае, которое определяется как отношение нагрузки к размерам площадки нагружения в недеформирован-

ном случае. Т.е. вновь пренебрегается изменением размеров нагруженного тела под действием приложенной нагрузки. В нелинейном случае классическое понятие краевой задачи становится недействительным. Мы не можем указать напряжения на границах тела, поскольку эти границы нам заранее неизвестны.

Так же возникают вопросы и по приложенной нагрузке. Эта нагрузка может изменяться по величине и направлению в процессе нагружения и изменения формы и размеров тела. Фактически нелинейная задача сводится к изучению процесса нагружения, при котором одновременно выясняются формы и размеры тела после нагружения и вид нагружения. Метод последовательны перемещений соответствует содержанию нелинейных задач, поэтому в данной работе рассматриваются типичные виды нагружения предлагаемого прямоугольного элемента конечных размеров и анализируются возникающие при этом нелинейные эффекты.

Для элемента прямоугольной формы основными являются деформации растяжения-сжатия, изгиба и сдвига. В линейном случае смысл этих деформаций очевиден, как было указано выше в подобных случаях результаты, полученные на основе дискретной модели, фактически совпадают с результатами, полученными на основе решения уравнений теории упругости либо на основе экспериментальных данных. В нелинейном случае будем рассматривать каждый из видов таких деформаций в отдельности с анализом нелинейных эффектов для каждого вида нагружения, а так же при совместных нагружениях.

**Растяжение-сжатие**

В случае растяжения-сжатия (рис. 2) главным нелинейным эффектом является изменение размера нагруженной площадки. В линейном случае суммарная сила, действующая на площадку, делится на ее исходную длину. В нелинейном случае она делится на ту длину, которая получилась в процессе деформирования.

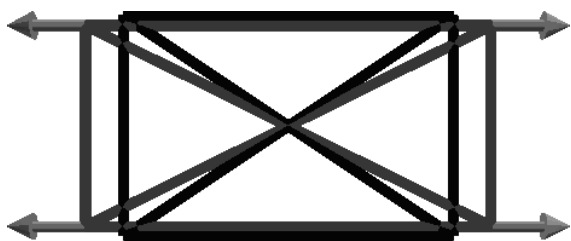


Рис. 2. Растяжение элемента, направление сил до деформации

Поэтому при растяжении нелинейные напряжения оказываются больше чем линейные, а при сжатии — меньше (рис. 3).

Соответствующая зависимость между приложенной силой и образованной им напряжением изобра-

жена на рис. 4. Виден параболический характер зависимости.

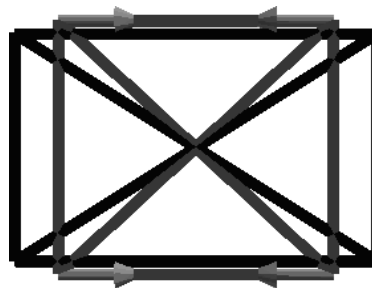


Рис. 3. Сжатие элемента, направление сил до деформации

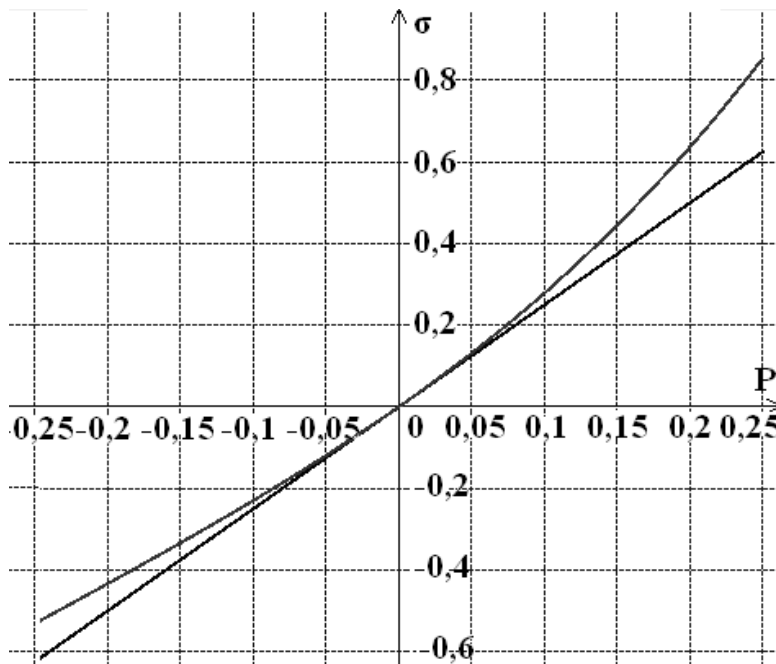


Рис. 4. Зависимость между силой и вызываемым ею напряжением в нелинейном случае (кривая) в сравнении с линейным случаем (прямая)

Изгиб. При изгибе, в процессе нагружения, происходит поворот нагруженных граней, поэтому необходимо решить вопрос об ориентации приложенных к граням сил.

Возможны два варианта. Либо их ориентация не изменяется (рис. 5).

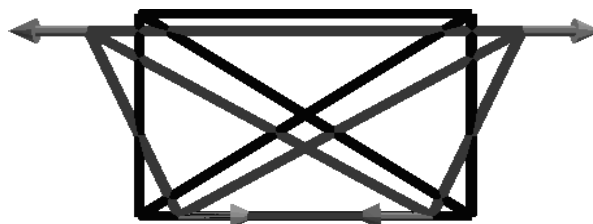


Рис. 5. Изгиб элемента, направление сил после деформации

Либо силы в процессе нагружения поворачиваются вместе с гранями (рис. 6).

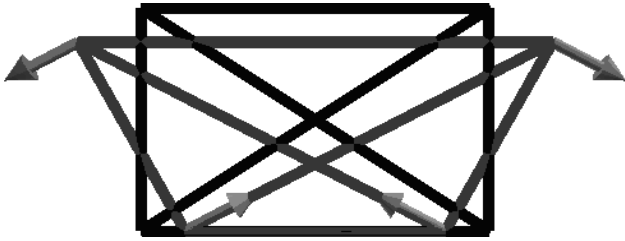


Рис. 6. Изгиб элемента, направление сил после деформации

В каждом из этих случаев надо решать так же следующий вопрос: поскольку указанные силы образуют пары сил и в процессе нагружения плечи этих пар изменяются, то следует либо оставлять неизменными силы и учитывать, как следствие, изменение моментов пар, либо сохранять моменты пар и изменять с учетом новых плеч величины сил.

Таким образом задача об изгибе прямоугольного элемента сводится к ряду различных задач результаты решения которых фактически не совпадают. Увидеть это можно на графиках зависимостей относительных перемещений узлов прямоугольного элемента от действующей нагрузки (рис. 7-9). Во всех случаях результирующие модели перемещаются, как твердое тело, так что бы положение узла 3 оставалось постоянным.

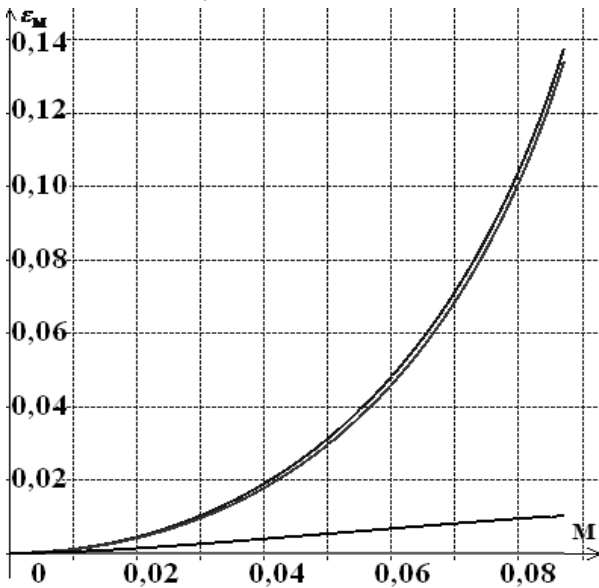


Рис. 7. Зависимость относительного перемещения от приложенной нагрузки для случаев учета изменения моментов и без учета изменения

В данном случае, ось ординат отображает относительное перемещение вершины элемента  $\epsilon_M = \sqrt{(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2}$ ,

где  $i$  – номер вершины,  $x', y'$  – положение вершины в случае учета изменения величины момента,  $x, y$  – без учета. Ось абсцисс отображает действующую силу.

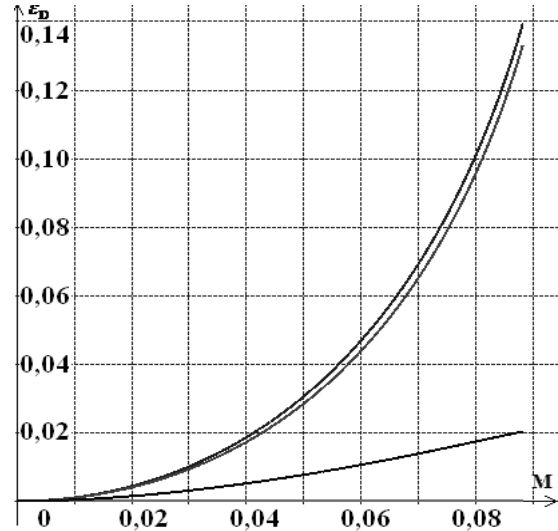


Рис. 8 Зависимость относительного перемещения от приложенной нагрузки для случаев учета поворота сил и без учета поворота

В данном случае,  $\epsilon_D = \sqrt{(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2}$ , где  $x', y'$  –

положение вершины в случае учета изменения направления сил,  $x, y$  – без учета.

Наибольшее отличие, наблюдается в случае учета, как поворота сил, так и изменения их величин (Рис. 12).

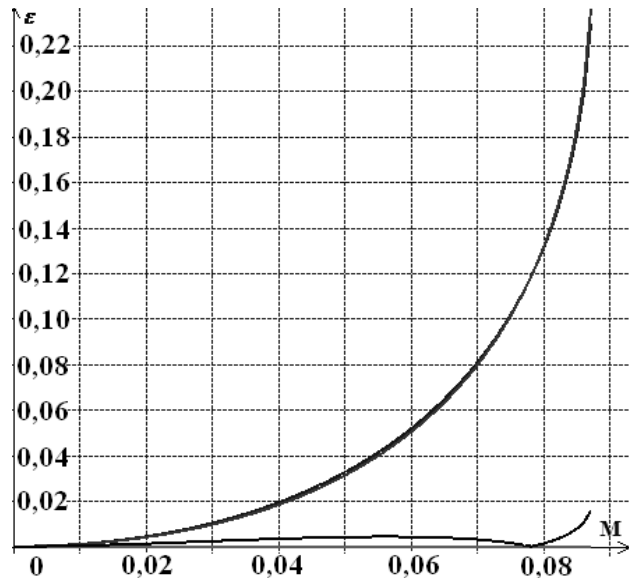


Рис. 9. Зависимость относительного перемещения от приложенной нагрузки для случаев учета поворота сил и изменения их величин и без учета

Здесь  $\epsilon = \sqrt{(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2}$ , где  $x', y'$  – положение

вершины в случае учета изменения направления сил и их величины,  $x, y$  – без учета.

Как видно из приведенных графиков отличия в получаемых результатах с увеличением нагрузки растут по параболическому закону, таким образом учет либо не учет того или иного нелинейного эффекта в модели

и методе расчета может значительно повлиять на получаемый результат.

Так же, следует отметить, что для случая нелинейного расчета, в задаче о растяжении-сжатии и изгибе, в отличие от линейного, нет эффекта суперпозиции. То есть перемещения, получаемые путем сложения результатов расчета задач отдельно о растяжении-сжатии и отдельно, об изгибе, не будут равны перемещениям, получаемым при решении задачи о совместном нагружении элемента такими же нагрузками.

---

### Сдвиг

---

Фактически, при сдвиге, касательные (сдвиговые) нагрузки эквивалентны усилиям, направленным вдоль диагонали (рис. 10).

В процессе деформирования следует либо сохранять начальные направления этих усилий либо изменять эти направления так, чтобы они продолжали оставаться направленными вдоль диагонали. Естественно результаты в таких двух случаях будут существенно различными (рис. 11-12).

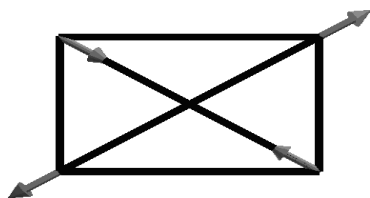


Рис. 10. Модель сдвигового нагружения прямоугольного элемента

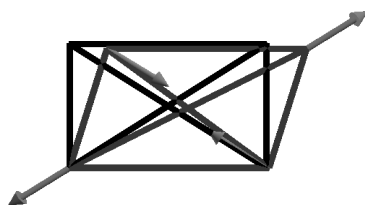


Рис. 11. Картина деформации элемента при сдвиге, без изменения направления сил

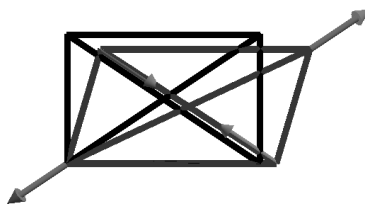


Рис. 12. Картина деформации элемента при сдвиге, с изменением направления сил

График зависимости относительных перемещений от действующей нагрузки в данном случае будет следующим:

Здесь  $\varepsilon = \sqrt{(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2}$ , где  $x'$ ,  $y'$  – положение

вершины в случае учета изменения направления,  $x$ ,  $y$  – без учета.

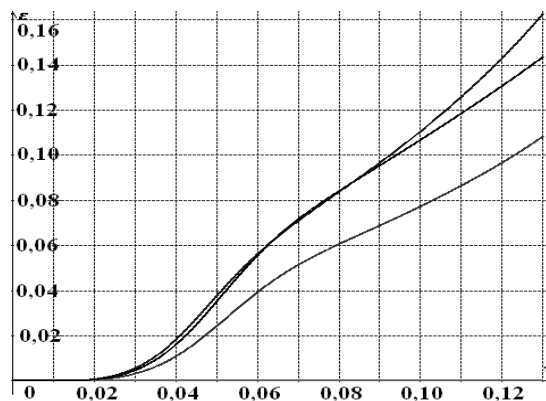


Рис. 13 Картина деформации элемента при сдвиге, без изменения направления сил

Аналогично случаю изгиба отличия в получаемых результатах с увеличением нагрузки значительно увеличиваются.

---

### Выводы

---

Получена модель для расчета геометрически нелинейного прямоугольного элемента для трех типов нагружения, которые в совокупности своей полностью описывают типы нагружения исключая перемещение объекта как твердого тела.

В пределах каждого нагружения рассмотрены возможные варианты изменения алгоритма расчета с учетом нелинейности модели, которая подразумевает не только перемещение точки приложения силы, но и в части случаев изменение направления ее действия.

Проведен ряд расчетов для каждого из возможных, базовых, случаев нагружения как с учетом изменения направлений сил, так и без изменения, построены графики разностей перемещений в зависимости от выбранной схемы расчета относительно приложенной силы. И показано что учет нелинейных эффектов сильно влияет на получаемые результаты.

---

### Литература

1. Шамровський О.Д. Метод послідовних наближень для розрахунку стержневих систем [Текст] / О.Д. Шамровський, А.І. Безверхий, В.В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2008. – № 2. – С. 110 –118.
2. Шамровський О.Д. Розрахунок стержневих конструкцій методом послідовних переміщень з урахуванням геометричної нелінійності [Текст] / О.Д. Шамровський, Д.М. Колесник, Ю.О. Лимаренко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – № 1. – С. 78–85.
3. Шамровський О.Д. Дискретні моделі для плоских статических задач теорії еластичності [Текст] / А.Д. Шамровський, Ю.А. Лимаренко, Д.Н. Колесник, Миняйло Т.А., В.В. Кривуляк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий // научный журнал. – Харьков: Технологический центр, 2011. – №3/7 (51). – С. 11–18.