УДК 621.391.1

МЕТОД СИНТЕЗА СИГНАЛОВ С ЗАДАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УРОВЕНЬ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Сформульовано підходи до вибору множин сигналів для застосування в широкосмугових системах зв'язку. Наведена загальна характеристика методів синтезу дискретних послідовностей, що мають задані кореляційні, ансамблеві, структурні властивості

Ключові слова: децимація, взаємокореляційна матриця, функція кореляції

Сформулированы подходы к выбору множества сигналов для применения в широкополосных системах связи. Дана общая характеристика методов синтеза дискретных последовательностей, обладающих заданными корреляционными, ансамблевыми, структурными свойствами

Ключевые слова: децимация, взаимокорреляционная матрица, функция корреляции

This article represents approaches to choosing sets of signals for use in wideband communication system. The general characteristic of discrete sequences synthesis methods with set correlation, ensemble and structural properties described

Keywords: decimation, cross-correlation matrix, correlation function

А.А. Замула
Кандидат технических наук, доцент, профессор*
Контактный тел.: (057) 702-14-25, 050-25-11-848
E-mail: bit@kture.kharkov.ua

Е.П. Колованова
Ассистент*
Контактный тел.: (057) 702-14-25, 097-930-80-03
E-mail: e.kolovanova@gmail.com

Т.Е. Ярыгина*

Р.И. Киянчук*

*Кафедра Безопасности информационных технологий
Национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

1. Введение

Одним из ограничений при синтезе сигналов в широкополосных системах связи является размерность сигнального пространства, внутри которого осуществляется их упаковка. Физическая сущность этого ограничения обусловлена практическим ресурсом, например, шириной частотной полосы. Если частотно-временной ресурс, в котором могут располагаться M сигналов, ограничен параметрами ΔF и T соответственно, то одно из ограничений учитывает экономию полосы, тогда как второе отражает желание передать данные с приемлемой скоростью $R = \log M | T$. Тогда, согласно теореме отсчётов, имеется около ΔFT независимых отсчётов, которые могут быть использованы при синтезе M сигналов, причём каждый из сигналов трактуется как вектор в пространстве размерности $n_S = \Delta FT$ [1].

Задача выбора множества сигналов может быть сформулирована следующим образом: найти в пространстве заданной размерности n_S созвездие из M векторов, удовлетворяющее энергетическим ограничениям и обладающее максимально возможным минимумом расстояния между векторами $d\min = \max$. Данная задача может быть переформулирована в дуальную: найти в пространстве заданной размерности n_S созвездие и M векторов с гарантированным минимальным расстоянием $d\min$, которое обеспечивает минимизацию энергетических затрат.

Известно, что предпочтительными являются сигналы с наименьшим значением максимального бокового лепестка функции корреляции. Это требование всегда сопровождается ограничением на метод модуляции или на алфавит, которому принадлежат символы кодовой последовательности. Таким образом, требования, предъявляемые к наилучшему сигналу, могут быть сформулированы в виде следующей оптимизационной задачи: на множестве всех возможных последовательностей длины N с символами из заранее выбранного алфавита найти последовательность или последовательности с минимальной величиной максимального бокового лепестка корреляционной функции [1].

2. Характеристика методов синтеза дискретных последовательностей

В настоящее время отсутствуют регулярные методы синтеза дискретных последовательностей (ДП) оптимальных по минимаксному критерию. Более того, не представляется возможным ответить на вопрос: насколько известные сигналы с большим числом позиций L близки к оптимальным.

Поэтому актуальным остается поиск эффективных методов расчета ДП с хорошими минимаксными свойствами.

Один из таких методов основан на использовании итерационных алгоритмов [2]. При соответствующем выборе начального приближения и использовании целочисленной оптимизации по минимаксному или среднестепенному критериям можно получить сравнительно хорошие в указанном смысле сигналы. Однако недостатком итерационных методов является зависимость от начального приближения, резкое увеличение времени расчета сигнала по мере увеличения N и то, что они приводят только к локальному экстремуму.

Другие методы предполагают поиск необходимых условий существования ДП с заданными параметрами. Примером такого подхода является следующий. Известно [1], что последовательности с хорошей апериодической автокорреляционной функцией (АКФ) могут быть найдены только среди последовательностей с хорошей периодической АКФ. На первом этапе формируется множество последовательностей кандидатов с хорошей периодической АКФ. На втором этапе осуществляют исчерпывающий поиск по критерию наименьшего уровня максимума бокового лепестка апериодической АКФ среди всех циклических сдвигов однопериодных сегментов последовательностей кандидатов. Результатом поиска служит последовательность с минимальным значением боковых лепестков апериодической АКФ.

Заслуживает внимания метод синтеза ДП путем гомоморфного отображения мультипликативных групп простого и расширенного поля Галуа с помощью к – значного характера. Исследования показали, что с ростом характеристики поля и числа классов, объем вычислений при направленном переборе резко возрастает.

В многопользовательских системах с кодовым разделением необходимы семейства дискретных сигналов с особенными взаимными корреляционными свойствами. Синтез семейств сигналов с необходимыми взаимокорреляционными свойствами заключается в отыскании семейства последовательностей, обладающего соответствующими взаимокорреляционными функциями.

Известные методы синтеза ДП с заданными корреляционными функциями практически всегда основаны на проведении операций перебора множества вариантов для выбора лучшего результата и при значительном периоде ДП применение таких методов становится проблематичным.

В статье предлагаются методы, которые позволяют существенно (по сравнению с известными методами перебора) сократить объем вычислений по нахождению ДП с заданными значениями боковых лепестков корреляционной функции, а также исследования корреляционных функций ДП.

Исследование корреляционных, спектральных и статистических свойств характеристических дискретных сигналов (ХДС) [2] показали, что данный класс сигналов по указанным свойствам весьма близок к широко используемым в системах связи в качестве расширяющих спектр М-последовательностям. Вместе с тем ХДС по сравнению с М-последовательностями обладают улучшенными ансамблевыми и структурными свойствами.

Теорема 1. Пусть W_μ и W_ν есть ХДС с числом символов L, построенные посредством децимации исходного сигнала W_1 (сигнал, построенный по наименьшему из значений первообразных элементов поля) соответственно по коэффициентам μ и ν, а μ' и ν' новые коэффициенты децимации, причём $\mu' = \mu \cdot x \pmod{L}$; $\nu' = \nu \cdot x \pmod{L}$, где x - целое число, такое, что наибольший общий делитель (НОД) чисел x и L равен 1. Тогда децимация исходного ХДС W_1 по коэффициентам μ' и ν' даёт новые пары, реализация ПФВК которых есть результат децимации ПФВК пары ХДС W_μ и W_ν.

Доказательство. Значение кодов ХДС, полученных путём децимации исходной последовательности по коэффициентам μ и ν, могут быть описаны выражениями [2]:

$$\mu_i = \begin{cases} \psi\left(\Theta_a^{\mu_i}+1\right), \text{если} \left(\Theta_a^{\mu_i}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta_a^{\mu_i}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\nu_i = \begin{cases} \psi\left(\Theta_m^{\nu_i}+1\right), \text{если} \left(\Theta_m^{\nu_i}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta_m^{\nu_i}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}, i=\overline{0, L-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку всегда можно найти такое k, что $\Theta_1 = \Theta^k$, где $\Theta = \Theta_1^\mu$, $\Theta_1 = \Theta_1^\nu$, и НОД $(k, L) = 1$, то (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\mu_i = \begin{cases} \psi\left(\Theta^{i}+1\right), \text{если} \left(\Theta^{i}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta^{i}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}; \end{cases}$$

$$\nu_i = \begin{cases} \psi\left(\Theta_1^{i}+1\right), \text{если} \left(\Theta_1^{i}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta_1^{i}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}. \end{cases}$$

Для сигналов, полученных по μ' и ν', имеем

$$\mu_i' = \begin{cases} \psi\left(\Theta^{i_1 x}+1\right), \text{если} \left(\Theta^{i_1 x}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta^{i_1 x}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}; \end{cases}$$

$$\nu_i = \begin{cases} \psi\left(\Theta_1^{i_1 x}+1\right), \text{если} \left(\Theta_1^{i_1 x}+1\right) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, \text{если} \left(\Theta_1^{i_1 x}+1\right) \equiv 0 \pmod{P}. \end{cases}$$

Выражения для ПФВК пар ХДС, построенных соответственно по μ, ν и μ', ν' имеют вид:

$$R_{\mu,\nu}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi\left(\Theta^{i}+1\right) \cdot \psi\left(\Theta_1^{i+m}+1\right);$$

$$R_{\mu',\nu'}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi\left(\Theta^{i_1 x}+1\right) \cdot \psi\left(\Theta_1^{(i+m_1)x}+1\right).$$

И с учётом (1)

$$R_{\mu,\nu}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi\left(\Theta^{i}+1\right) \cdot \psi\left(\Theta^{k(i+m)}+1\right)$$

$$R_{\mu',\nu'}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi\left(\Theta^{i_1 x}+1\right) \cdot \psi\left(\Theta^{kx(i_1+m_1)}+1\right)$$

Введём произвольные переменные $\{a, b, b'\} \in GF(P^n)$. Пусть для сигналов, построенных путём децимации исходного сигнала, выполняются условия $a=\Theta^{k(i+m)}$, $b=\Theta^{i}$. Тогда $a/b=\Theta^{ki+km-i}$. Для пары сигналов, полученных путём децимации исходного сигнала по коэффициентам $\mu^{'}$ и $\nu^{'}$, найдём некоторое значение $\Theta^{kx(i_1+m_1)}$ равное a, т.е.

$$\Theta^{kx(i_1+m_1)}=\Theta^{k(i+m)}=a. \quad (3)$$

Для выполнения равенства (3) необходимо, чтобы

$$kx(i_1+m_1)\equiv k(i+m)(\mathrm{mod}\,L). \quad (4)$$

Поскольку НОД $(k,L)=1$, выражение (4) можно переписать в виде

$$x(i_1+m_1)\equiv i+m(\mathrm{mod}\,L); xi_1+xm_1\equiv i+m(\mathrm{mod}\,L);$$
$$xi_1\equiv i(\mathrm{mod}\,L); xm_1\equiv m(\mathrm{mod}\,L).$$

Найдём отношение $a/b^{'}$, где $b^{'}=\Theta^{i_1x}$ для пары ХДС, построенной в соответствии с $\mu^{'}$ и $\nu^{'}$.

$$a/b^{'}=\frac{\Theta^{kx(i_1+m_1)}}{\Theta^{i_1x}}=\Theta^{kxi_1+kxm_1-i_1x}. \quad (5)$$

С учётом (5) можно заключить, что $a/b^{'}=a/b$, и следовательно, $b^{'}=b$. А это означает, что в выражении для ПФВК $R_{\mu^{'},\nu^{'}}(m_1)$ изменится лишь порядок набора суммы для некоторого фиксированного отсчёта ПФВК пары ХДС, построенной по $\mu^{'}$ и $\nu^{'}$. Другими словами, значения функции ПФВК для пары ХДС, построенной путём децимации исходного сигнала по коэффициентам $\mu^{'}$ и $\nu^{'}$ будут такими же, как для ПФВК последовательностей, полученных по μ и ν. Но с учётом того, что $m=xm_1$, $R_{\mu^{'},\nu^{'}}(m_1)$ - есть результат децимации $R_{\mu,\nu}(m)$ по коэффициенту x, т.е. реализация ПФВК $R_{\mu^{'},\nu^{'}}(m_1)$ будет результатом децимации ПФВК $R_{\mu^{'},\nu^{'}}(m)$. Теорема доказана.

С учётом теоремы 1 могут быть определены все предпочтительные пары ХДС, т.е. пары, имеющие минимальные значения боковых лепестков функции корреляции.

Для приложений важным является знание значений максимальных боковых выбросов ПФВК для данной системы сигналов с объёмом M. С тем, чтобы оценить значения, которые принимают выбросы ПФВК сигналов с помощью традиционных методов вычисления ПФВК, необходимо провести расчёты значений выбросов для всех возможных пар сигналов

Ниже приводится теорема, позволяющая уменьшить объем вычислений для нахождения ДП, обладающих требуемыми взаимокорреляционными функциями.

Введем ряд ограничений. В качестве ДП будем рассматривать характеристические коды. В дальнейших рассуждениях будем учитывать в качестве корреляционной функции – периодическую ФВК (ПФВК). Будем называть ПФВК различных пар ХДС функциями одного типа в случае, если реализации ПФВК (например, значения максимальных боковых лепестков ПФВК) для них одинаковы. Назовём взаимокорреляционной матрицу $\|R\|$, номерами строк и столбцов которой являются коэффициенты децимации, в соответствии с которыми формируются ХДС. На пересечении строк и столбцов матрицы размещены значения максимальных боковых выбросов ПФВК ХДС.

Теорема 2. Пусть $\|R\|$ есть матрица максимальных значений боковых лепестков ПФВК пар ХДС w_i и w_j, $i,j=\overline{1,M}$ размерности $M\times M$, причём M - число изоморфизмов ХДС, а строки и столбцы матрицы обозначены значениями упорядоченных по возрастанию коэффициентов децимации. Тогда строка матрицы (первая строка), содержащая значения боковых лепестков ПФВК исходного изоморфизма со всеми оставшимися $(M-1)$ изоморфизмами, содержит все возможные значения боковых лепестков ПФВК, которые дают пары w_i и w_j, $i,j=\overline{1,M}$.

Теорема указывает на тот факт, что для определения значений максимальных боковых выбросов ПФВК сочетаний всех пар ХДС достаточно рассчитать реализации ПФВК исходного сигнала w_1 со всеми оставшимися w_2, w_3, ..., w_{M-1} изоморфизмами, т.е. реализации ПФВК для первой строки матрицы $\|R\|$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что ПФВК двух ХДС, построенных по коэффициентам децимации, например, k_1 и k_2 (коэффициенты, принадлежащие первой строке матрицы и один из коэффициентов децимации равен 1), всегда существует некоторое число $\nu\in L$, являющееся взаимно простым с периодом характеристического кода L и можно вычислить коэффициенты $k_1^{'}=k_1\cdot\nu(\mathrm{mod}\,L)$ и $k_2^{'}=k_2\cdot\nu(\mathrm{mod}\,L)$. При этом пара коэффициентов k_1 и k_2 переходит в пару коэффициентов $k_1^{'}=1$ и $k_2^{'}$, находящуюся в первой строке взаимокорреляционной матрицы $\|R\|$.

Утверждение о том, что существует такое ν, для которого $k_1\cdot\nu=1\cdot(\mathrm{mod}\,L)$ следует из теоремы Эйлера, в соответствии с которой, если есть такое k_1, что $(k_1,L)=1$, то

$$k_1^{\varphi(L)}\equiv 1\cdot(\mathrm{mod}\,L), \quad (6)$$

где $\varphi(L)$ - функция Эйлера.

Из ( ) следует, что у каждого коэффициента из множества коэффициентов децимации есть обратный - $k_1^{\varphi(L)-1}$, при этом

$$k_1^{\varphi(L)}=k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_L=1(\mathrm{mod}\,L). \quad (7)$$

Число сомножителей в (7) определяется функцией Эйлера.

Пары ХДС, построенные по коэффициентам децимации k_1, k_2 и $k_1^{'}=1$, $k_2^{'}$, дают ПФВК одного типа, а это значит, что в первой строке матрицы $\|R\|$ содержатся все возможные типы ПФВК, существующие для системы сигналов с объёмом M. Теорема доказана.

Проиллюстрируем на примере возможности теоремы по нахождению пар ХДС, имеющих заданные характеристики (например, значения максимальных боковых лепестков ПФВК).

В табл. 1 приведена взаимокорреляционная матрица боковых лепестков ПФВК для ХК с числом элементов $L=60$ для пар ХК, Первая строка матрицы включает в себя значения боковых лепестков ПФВК исходного кода (коэффициент децимации $k_1=1$) со всеми другими ХК, полученными путём децимации исходного ХДС по множеству коэффициентов децимации $k_i \in \varphi\,(L)$. Исходя из данных таблицы, минимальное значение максимальных боковых лепестков ПФВК имеет место для пар ХК, полученных по коэффициентам децимации 1 и 7.

В соответствии с приведенной выше теоремой, могут быть установлены все пары ХДС, приводящие к таким же значениям боковых лепестков. Например, умножая коэффициенты децимации $k = 1$ и $k = 7$ на x = 7, мы получим новую пару изоморфизмов ХДС, для которой $k = 7$ и $k = 49$. Как следует из табл. 1, данная пара ХДС имеет такое же значение максимальных боковых лепестков ПФВК как и для исходной пары, т. е. 16.

Таблица 1

Взаимокорреляционная матрица для ХДС с числом элементов $L = 60$

Коэф. децимации \ Коэф. децимации	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	49
1	60	16	24	20	20	16	20	36	32	20	36	16	20	20	16	28
7	16	60	20	16	24	20	36	20	20	32	20	28	36	16	20	16
11	24	20	60	20	16	36	20	16	36	20	32	20	20	16	28	16
13	20	16	20	60	36	16	24	20	16	28	20	32	16	36	20	20
17	20	24	16	36	60	20	16	20	20	36	20	16	32	28	16	20
19	16	20	36	16	20	60	20	24	28	16	16	20	20	20	36	32
23	20	36	20	24	16	20	60	16	20	16	16	36	28	32	20	20
29	36	20	16	20	20	24	16	60	16	20	28	20	16	20	32	36
31	32	20	36	16	20	28	20	16	60	16	24	20	20	20	36	16
37	20	32	20	28	36	16	16	20	16	60	20	16	24	36	20	20
41	36	20	32	20	20	16	16	28	24	20	60	20	16	20	16	36
43	16	28	20	32	16	20	36	20	20	16	20	60	36	24	20	16
47	20	36	20	16	32	20	28	16	20	24	16	36	60	16	20	20
53	20	16	16	36	28	20	32	20	20	36	20	24	16	60	16	20
59	16	20	28	20	16	36	20	32	36	20	16	20	20	16	60	24
49	28	16	16	20	20	32	20	36	16	20	36	16	20	20	24	60

Выводы

Нетрудно убедиться в том, что знание значений первой строки взаимокорреляционной матрицы является исчерпывающим для расчёта статистических характеристик ПФВК системы ХДС.

Оценим вычислительную сложность предложенного метода исследования корреляционных свойств дискретных последовательностей (ДП).

Полный перебор всех возможных пар ДП характеристического кода для получения значений максимальных боковых лепестков функции корреляции требует выполнения N_1 операций. Очевидно, что $N_1 = C^2_{\varphi(L)}$.

Для реализации предлагаемого метода число операций N_2 определяется из соотношения $N_2 = \varphi(L)$.

Литература

1. Ipatov, Valery P. Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications [Текст] / Valery P. Ipatov. University of Turku, Finland and St. Petersburg Electrotechnical University 'LETI', Russia. - John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, 2005. – 385 p.
2. Свердлик, М.Б. Оптимальные дискретные сигналы М.Б. Свердлик. - М.: Советское радио ,1975. - 200 с.