

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ- АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

**О. В. Серая**

Кандидат технических наук, доцент  
Кафедра компьютерного мониторинга  
и логистики

Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»  
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

**Контактный тел.:** (057) 707-66-28

**E-mail:** Seraya@kpi.kharkov.ua

*Запропоновано технологію прогнозування часового ряду, який описано вейвлет-апроксимацією. Обчислювальну процедуру засновано на незалежному прогнозуванні компонентів розкладання вейвлет-апроксимації.*

*Ключові слова:* вейвлет-апроксимація, прогнозування часового ряду.

*Предложена технология прогнозирования временного ряда, описанного вейвлет-апроксимацией. Вычислительная процедура основана на независимом прогнозировании компонентов разложения вейвлет-апроксимации.*

*Ключевые слова:* вейвлет-апроксимация, прогнозирование временного ряда.

*Technology of prediction of time series, described wavelet-approximation, is offered. Calculable procedure is based on independent prediction of components of decomposition of wavelet-approximation.*

*Keywords:* wavelet-approximation, prediction of time series.

## 1. Введение

При решении многочисленных проблем в технике, экономике, социологии, медицине и т. д. возникает однотипная задача описания и прогнозирования временного ряда, образованного совокупностью наблюдений соответствующего случайного процесса. Эта задача решается с использованием полиномиальных аппроксимаций или путем разложения в ряд по системе специальным образом выбираемых координатных (базисных) функций. В зависимости от характера наблюдаемого процесса в качестве базисных функций выбирают либо ортогональные многочлены (Эрмита, Лагерра, Чебышева и т. п.), либо систему гармонических колебаний (ряд Фурье). Нужно отметить, что эти подходы не обеспечивают надлежащую точность аппроксимации для описания процессов с локальными особенностями, что является следствием конструктивных недостатков самих этих подходов. К их числу относятся [1]:

- практически неизбежное ограничение числа базисных функций приводит к ошибкам при восстановлении процесса;

- базисные функции определены на всей оси и их параметры не меняются во времени;

- отдельные (локальные) особенности наблюдаемого процесса вызывают изменения частотного образа процесса, которые «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру сигнала практически невозможным;

- плавный характер базисных функций затрудняет представление локальных пиков, разрывов процесса, что приводит к необходимости использования в его представлении функций высокого порядка, которые влияют на форму восстановленного сигнала и за пределами локальных особенностей процесса;

- по составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение особенностей;

- при наличии локальных особенностей процесса его спектр содержит компоненты высокого порядка, амплитуда которых мала, в силу чего они могут быть при анализе не замечены и отброшены.

Таким образом, известные методы представления реальных случайных процессов наталкиваются на серьезные теоретические ограничения, не позволяющие осуществить адекватное их математическое описание.

Серьезной альтернативой традиционному подходу является вейвлет-аппроксимация, которая теоретически позволяет приблизить любую функцию, в том числе состоящую из разных нестационарных компонент, действующих в разные промежутки времени, содержащую пики, разрывы и другие особенности [2–3].

Основополагающая идея вейвлет-представления функций заключается в разбиении приближения к наблюдаемому процессу на две составляющие — аппроксимирующую (грубую) и детализирующую с их последующим итерационным уточнением.

Задача аппроксимации наблюдаемого процесса решается с использованием системы функций, получаемых из так называемой порождающей функции с помощью целочисленных сдвигов. Принципиальное свойство, которым должна обладать порождающая функция состоит в следующем: для порождающей функции  $\varphi(x)$  система функций  $\varphi(x-n)$ ,  $n \in Z$ , образует ортонормированный базис [2].

С использованием масштабируемого сдвига получим новую систему функций:

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n), \quad j=1,2,\dots$$

Легко показать, что система функций  $\varphi_{j,n}(x)$  также образует ортонормированный базис.

Совокупность систем функций  $\varphi_{j,n}(x)$ ,  $j \in N$ , может быть использована для описания произвольной функции  $f(x)$  путем ее разложения по элементам ортогонального базиса  $\varphi_{j,n}(x)$  с применением операторов ортогонального проектирования. Разложение  $f(x)$  имеет стандартный вид:

$$P_j(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \varphi_{j,n}(x)) \varphi_{j,n}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$(f(x), \varphi_{j,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j,n}(x) dx = \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^j x - n) dx.$$

При этом, если  $j = 0$ , то

$$(f(x), \varphi_{0,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x - n) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx = f_{0n}$$

есть среднее значение функции  $f(x)$  на промежутке  $[n, n+1)$ . Тогда

$$P_0(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \varphi_{0,n}(x)) \varphi_{0,n}(x) = \sum_{n \in Z} f_{0n} \varphi(x - n) \quad (1)$$

это кусочно-постоянная функция, принимающая значение  $f_{0n}$  на промежутке  $[n, n+1)$ , приближенно описывающая  $f(x)$ .

Если теперь  $j = 1$ , то

$$\begin{aligned} (f(x), \varphi_{1,n}(x)) &= \sqrt{2} \int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(x) dx = \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} \right) \frac{1}{\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}} \int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{1n}, \end{aligned}$$

где  $f_{1n}$  есть среднее значение функции  $f(x)$  на промежутке  $\left[ \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P_1(f(x)) &= \sum_{n \in Z} (f(x), \varphi_{1,n}(x)) \varphi_{1,n}(x) = \\ &= \sum_{n \in Z} \frac{1}{\sqrt{2}} f_{1n} \sqrt{2} \varphi(2x - n) = \sum_{n \in Z} f_{1n} \varphi(2x - n) \end{aligned}$$

это кусочно-постоянная функция, принимающая значение  $f_{1n}$  на промежутке  $\left[ \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$ , более точно описывающая  $f(x)$ , нежели (1).

Ясно, что с увеличением индекса оператора проектирования точность приближения функции возрастает. При этом более точное приближение  $P_{j+1}(f(x))$  можно представить как сумму приближения  $P_j(f(x))$  и дополнения — слагаемого  $P_j^W(f(x))$ , отражающего уточнение при переходе от  $P_j(f(x))$  к  $P_{j+1}(f(x))$ , то есть

$$P_{j+1}(f(x)) = P_j(f(x)) + P_j^W(f(x)). \quad (2)$$

Для получения аналитического представления уточняющего элемента разложения используется другой ор-

тонормированный набор базисных функций — вейвлеты. Соответствующая порождающая функция  $\psi(x)$  отыскивается по формуле [2–3]:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{N-n} \varphi(2x - n). \quad (3)$$

Здесь  $\{h_k\}$ ,  $n \in Z$  — набор коэффициентов, отыскиваемых путем решения специальной системы уравнения [1–3].

Базисный набор вейвлетов формируется путем масштабированного сдвига порождающего вейвлета (3). Уточняющее разложение также имеет стандартный вид:

$$P_j^W(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \psi_{j,n}(x)) \psi_{j,n}(x),$$

где

$$\begin{aligned} (f(x), \psi_{j,n}(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,n}(x) dx = \\ &= \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - n) dx. \end{aligned}$$

Введем разложение  $f(x)$  на некотором уровне  $j_0$ :

$$\begin{aligned} P_{j_0}(f(x)) &= \sum_{n \in Z} (f(x), \varphi_{j_0,n}(x)) \varphi_{j_0,n}(x) = \\ &= \sum_{n \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \varphi_{j_0,n}(x) dx) \varphi_{j_0,n}(x) = \sum_{n \in Z} a_{j_0,n} \varphi_{j_0,n}(x). \end{aligned}$$

Представим теперь разложение  $P_{j_0}(f(x))$  как сумму приближения  $P_{j_0-1}(f(x))$  и уточняющего дополнения  $P_{j_0-1}^W(f(x))$ :

$$P_{j_0}(f(x)) = \sum_{k \in Z} a_{j_0-1,k} \varphi_{j_0-1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j_0-1,k} \psi_{j_0-1,k}(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{j_0-1,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j_0-1,k}(x) dx, \\ d_{j_0-1,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j_0-1,k}(x) dx. \end{aligned}$$

Заметим, теперь, что сглаженную функцию  $P_{j_0-1}(f(x))$  можно еще раз разложить на еще более сглаженную часть  $P_{j_0-2}(f(x))$  и уточняющую ее часть  $P_{j_0-1}^W(f(x))$ .

Эту процедуру можно продолжить, получая все более сглаженную аппроксимацию функции  $f(x)$  и совокупность ее уточнений.

## 2. Постановка задачи

Таким образом, последовательное применение процедуры получения разложения и уточняющего его дополнения позволяет аппроксимировать временной ряд с требуемой степенью точности. Соответствующая процедура может быть организована следующим образом.

1. Выбирается достаточно высокий уровень разложения  $j_0$  такой, что аппроксимация  $P_{j_0}(x)$  достаточно точно отражает функцию  $f(x)$ . На практике, поскольку функция  $f(x)$  обычно задается массивом ее значений, то они и используются как начальное приближение  $P_{j_0}(x)$ .

2. Выполняется шаг разложения, на котором в соответствии с (4) получаем сглаженное описание  $P_{j_0-1}(f(x))$  и детализирующую поправку к нему  $P_{j_0-1}^W(f(x))$ . Если коэффициенты  $(d_{j_0-1,k})$  заметно отличны от нуля, то процедура уточнения продолжается.

В результате проведения этой процедуры, если глубина разложения оказалась равной  $N$ , будет получен аппроксимирующий набор  $A_N = \{a_{j_0-N,k}\}$  и совокупность детализирующих наборов  $D_N = \{d_{j_0-N,k}\}$ ,  $D_{N-1} = \{d_{j_0-N+1,k}\}$ , ...,  $D_1 = \{d_{j_0-1,k}\}$ .

Открытым остается вопрос относительно возможности прогнозирования процесса с использованием его вейвлет-разложения. Рассмотрим возможную процедуру решения этой задачи.

### 3. Основные результаты

Предлагается следующий подход к решению этой задачи, основанный на том обстоятельстве, что аппроксимирующая и детализирующие функции являются существенно более гладкими, нежели исходная функция. Пусть получены сглаженная аппроксимация функции  $f(x)$  и совокупность уточняющих детализаций в виде соответствующих наборов  $A_N, D_N, D_{N-1}, \dots, D_1$ . Каждый из этих наборов задает совокупность коэффициентов перед базисными функциями  $\phi_{j_0-N,k}(x)$  и вейвлетами  $\psi_{j_0-s,k}(x)$ ,  $s=1,2,\dots,N$ . Все эти коэффициенты в силу специфики вейвлет-анализа можно трактовать как отсчеты соответствующих функций, описывающих сглаженную и детализирующие части функции  $f(x)$ . Поэтому для каждой из них в отдельности может быть построена соответствующая аппроксимирующая модель, аналитическое описание которой легко получить методом наименьших квадратов.

Введем модель дискретно заданной функции  $a_{j_0-N}(k)$ , описывающей сглаженную часть  $f(x)$ :

$$a_{j_0-N}(k) = u_{j_0-N,0} + u_{j_0-N,1}k + \dots + u_{j_0-N,s}k^s, \quad k \in Z. \quad (5)$$

Аналогично этому введем модели функций,  $d_{j_0-r}(k)$ ,  $r=1,2,\dots,N$ , описывающих детализирующие составляющие  $f(x)$ :

$$d_{j_0-r}(k) = v_{j_0-r,0} + v_{j_0-r,1}k + \dots + v_{j_0-r,N}k^s, \quad r=1,2,\dots,N. \quad (6)$$

Кроме того, зададим векторы

$$A_{j_0-N} = \begin{pmatrix} a_{j_0-N,1} \\ a_{j_0-N,2} \\ \dots \\ a_{j_0-N,N} \end{pmatrix}, \quad D_{j_0-r} = \begin{pmatrix} d_{j_0-r,1} \\ d_{j_0-r,2} \\ \dots \\ d_{j_0-r,N} \end{pmatrix}, \quad r=1,2,\dots,N,$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{j_0-N,0} \\ u_{j_0-N,1} \\ \dots \\ u_{j_0-N,s} \end{pmatrix}, \quad V_r = \begin{pmatrix} v_{j_0-r,0} \\ v_{j_0-r,1} \\ \dots \\ v_{j_0-r,s} \end{pmatrix}, \quad r=1,2,\dots,N,$$

и матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^s \\ 1 & 3 & \dots & 3^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N & \dots & N^s \end{pmatrix}.$$

Тогда функционалы наименьших квадратов для отыскания оценок векторов  $U, V_r$ ,  $r=1,2,\dots,N$ , имеют вид

$$J_U = (HU - A_{j_0-N})^T (HU - A_{j_0-N}),$$

$$J_{V_r} = (HV_r - D_{j_0-r})^T (HV_r - D_{j_0-r}), \quad r=1,2,\dots,N,$$

откуда

$$\hat{U} = (H^T H)^{-1} H^T A_{j_0-N}, \quad \hat{V}_r = (H^T H)^{-1} H^T D_{j_0-r},$$

$$r=1,2,\dots,N.$$

Теперь полученные описания функций (5), (6) могут быть использованы для независимого вычисления величины отсчетов значений сглаженной и детализирующих частей процесса на момент прогноза. Сумма этих отсчетов определяет искомое прогнозное значение функции  $f(x)$ .

### 4. Вывод

Таким образом, предложена вычислительная процедура прогнозирования временного ряда, описанного вейвлет-аппроксимацией, представляющей собой суперпозицию сглаженной и набора детализирующих составляющих. Предложенная технология основана на возможности независимого прогнозирования каждой составляющей вейвлет-аппроксимации процесса.

### Литература

1. Серая О. В. Вейвлет-аппроксимация сложных процессов [Текст] / О. В. Серая, Т. А. Клименко // Математическое моделирование. — № 1(20). — Днепропетровск: ДДТУ, 2009. — С. 15–18.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам [Текст] / И. Добеши. — М.: РХД, 2001. — 189 с.
3. Мала С. Вэйвлеты в обработке сигналов [Текст]: пер. с англ. / С. Малла. — М.: Мир, 2005. — 671 с.