Література

1. Доля, В.К. Прогнозування параметрів транспортних систем [Текст] : підручник / В.К. Доля, Я.В. Санько, Т.О. Самісько; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 312 с.
2. Ярещенко, Н. В. Долгосрочное прогнозирование скоростей движения на автомобильных дорогах [Текст]: дис. ....канд. техн. наук / Н. В. Ярещенко. – Х., 1999. – 160 с.
3. Гаврилов, Э.В. Прогнозирование общественно необходимых скоростей движения на автомобильных дорогах [Текст] / Э.В. Гаврилов, И.А. Школяренко, Н.В. Дацко(Ярещенко) // Проблемы развития автотранстпорта и транзитных коммуникаций в Центрально - Азиатском регионе: Сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. – Ташкент. – 1996.
4. Мусиенко, И. В. Долгосрочное прогнозирование расчетных нагрузок на автомобильных дорогах [Текст]: дис. ....канд. техн. наук / И. В. Мусиенко. – Х., 2004. – 155 с.
5. Араб-Оглы, Э. А. Рабочая книга по прогнозированию [Текст] / Э. А. Араб-Оглы, И. В. Бестужев-Лада, Н. Ф. Гаврилов и др. – М. : Мысль, 1982. – 430 с.
6. Каганович, В. Е. Прогнозирование интенсивности движения методами математической статистики [Текст]. – В кн. : Повышение транспортно-эксплуатационных показателей автомобильных дорог Казахской ССР / В. Г. Каганович, В. К. Пашкин. – Алма-Ата : ЦБНТИ Минавтодора КазССР, 1971. - с. 67 - 91.
7. Хилюк, Ф. М. Методы прогнозирования научно - технического прогресса [Текст] / Ф. М. Хилюк, В. А. Лисичкин. - К. : УкрНИИНТИ, 1969. – 132с.
8. Горелова, В. Л. Основы прогнозирования систем [Текст] : учеб. пособие для инж.-экон. спец. вузов / В. Л. Горелова, Е. Н. Мельникова. – М.: Высшая школа, 1986. – 285 с.
9. Lewis Al. Automobiles of the World [Текст] / Al. Lewis, W. A. Musciano. – New York : Simon and Schuster, 1977. – 731 p.
10. Мацкерле, Ю. Автомобиль сегодня и завтра[Текст] / Ю. Мацкерле; [Пер. с чешк.]. – М. : Машиностроение, 1980. – 384 с.

УДК 519.8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ НЕСКІНЧЕННО-ВИМІРНИХ ЗАДАЧ РОЗТАШУВАННЯ ПІДПРИЄМСТВ

М. С. Сазонова
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кафедра прикладної математики та обчислювальної техніки
Національна металургійна академія України
пр. Гагарина, 4, м. Дніпропетровськ, Україна, 49600
E-mail: nmetau@nmetau.edu.ua

Розглядаються нескінченновимірні задачі розташування підприємств із одночасним розбиттям регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується підприємством, із метою мінімізації виробничих та транспортних витрат. Пропонується їх зведення у математичній постановці до неперервних нелінійних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) і їх розв'язання методами та алгоритмами ОРМ

Ключові слова: нескінченновимірні задачі, задачі розташування підприємств, оптимальне розбиття множин

Рассматриваются бесконечномерные задачи размещения предприятий с одновременным разбиением региона, непрерывно заполненного потребителями, на области потребителей, каждая из которых обслуживается предприятием, с целью минимизации производственных и транспортных затрат. Предлагается их сведение в математической постановке к непрерывным нелинейным задачам оптимального разбиения множеств (ОРМ) и их решение методами и алгоритмами ОРМ

Ключевые слова: бесконечномерные задачи, задачи размещения предприятий, оптимальное разбиение множеств

1. Вступ

Нескінченновимірні транспортні задачі [1-5] або (більш загальні) нескінченновимірні задачі розташування підприємств із одночасним розбиттям даного регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується одним підприємством, із метою мінімізації транспортних і виробничих витрат [2- 11] є типовими представниками широкого класу прикладних задач оптимізації з різних сфер людської діяльності (економічної, виробничої, соціальної, медичної та інших).

У якості споживачів тут можуть виступати телефонні, радіо-, телеабоненти, школярі, виборці, точки зрошуваної території, пацієнти для діагностики захворювань та багато інших практично важливих задач.

Теоретичні та практичні задачі з названого класу можуть бути зведені у математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) [12-18].

Але досі мало уваги приділялося урахуванню нелінійності функціоналу сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача. В цій статті згадані задачі вперше досліджуються у такій постановці, що надає можливість більш адекватно моделювати названі реальні процеси.

2. Постановка задачі

Задача А. Споживач деякої однорідної продукції, яку виробляють N підприємств, неперервно розподілений в області Ω з E_n.

Координати розташування підприємств $\tau_i = (\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})$, $i = 1,...,N$, невідомі заздалегідь, причому $\tau = (\tau_1,...,\tau_N) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} \in \Omega^N$.

Для кожного i-го підприємства, $i = 1,...,N$, задано:

$c(x,\tau_i)$ – функцію вартості транспортування одиниці продукції з i-го підприємства до споживача $x = (x^{(1)},...,x^{(n)})$, де x – будь-яка точка підмножини Ω, причому $c(x,\tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$ функції, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})$ з Ω_i для всіх $i = 1,...,N$; і

$\rho(x,y) \equiv 1$ – функцію попиту на продукцію для кожного пункту споживання x області Ω.

Функції $\varphi_i(Y_i)$, $i = 1,...,N$, описують залежність вартості виробництва продукції на i-ому підприємстві від його потужності Y_i, $i = 1,...,N$, і є дійсними, обмеженими, опуклими, двічі неперервно-диференційовними функціями свого аргументу, що визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i:

$$Y_i(\cdot) = \int_{\Omega_i} \rho(x)dx,\ i = 1,...,N,$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега і будемо вважати, що міра множини граничних точок Ω_i, i = 1,..., N, дорівнює нулю.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на зони Ω_i, $i = 1,...,N$, обслуговування їх N підприємствами, що не перетинаються, тобто на зони обслуговування споживачів i-м пунктом виробництва:

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\quad mes(\Omega_i \cap \Omega_j)_{i \neq j} = 0,\quad i,j = 1,...,N,$$

де mes(·) – міра Лебега, і розташувати ці підприємства в області Ω так, щоб мінімізувати нелінійний функціонал сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача:

$$F((\Omega_1,...,\Omega_N),(\tau_1,...,\tau_N)) = \sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i\left(\int_{\Omega_i} \rho(x)dx\right) + \int_{\Omega_i} c(x,\tau_i)\rho(x)dx\right], \quad (1)$$

за умов, що потужності підприємств з номерами $i = 1,...,p$ строго дорівнюють заданим об'ємам b_i, $i = 1,...,p$:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx = b_i,\ i = 1,...,p, \quad (2)$$

а з номерами $i = p+1,...,N$ не повинні перевищувати заданих об'ємів b_i, $i = p+1,...,N$:

$$0 \le \int_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i,\ i = p+1,...,N. \quad (3)$$

3. Аналіз досліджень і публікацій, в яких розв'язувалися нескінченновимірні задачі розташування підприємств

Нескінченновимірним задачам розташування підприємств із одночасним розбиттям даного регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується одним підприємством, із метою мінімізації транспортних і виробничих витрат [2, 11], присвячено багато публікацій. У ролі споживачів тут можуть виступати телефонні (*задача про розбиття множини телефонних абонентів на підмножини*, що обслуговуються кожною АТС, місце знаходження яких може бути заздалегідь невідоме, з метою мінімізації загальної вартості телефонного проведення) [4, 7], радіо - і телеабоненти (*задачі розташування радіо - і телестанцій*) [19-22]; школярі (*задача розбиття деякого адміністративного району на шкільні регіони* з метою мінімізації сумарних витрат на доставку школярів у школи) [4]; банки, торговельні точки, ретранслятори, proxy-сервери в мережі й багато інших (*задача територіального планування сфери обслуговування*) [3, 6, 8, 10]; виборці (*задача встановлення границь виборчих округів*) [4]; точки території для зрошування (задача зрошення) [21]. Також у цьому зв'язку можна назвати *задачі складського планування* [4, 7]; *задачі розташування нафтових вишок* для експлуатації родовища нафти [22]; *задачі розташування військових баз* із метою забезпечення найкращої можливої оборони даного регіону [8]; задачі розташування на даній територ*ії притулків для захисту населення на випадок ядерної атаки* з одночасним розбиттям цієї території на райони, кожний з яких буде обслуговуватися одним притулком [1]; *задачі, що виникають при дослідженні молекулярних і іонних з'єднань*, термодинамічні характеристики та стійкість яких залежать від просторового розташування іонів і форми їх «областей впливу» [11]; *задачі проектування мереж зі штучних супутників Землі* для контролювання діапазону кругових орбіт; *задачі про розподіл посівних площ* із метою одержання максимально можливого урожаю [13]; *задачі медичної діагностики різних захворювань* із метою мінімізації помилки при встановленні діагнозу [12]; *задачі геологічного прогнозування*, тобто задачі розбиття даної території на райони, зв'язані деякою спільністю геологічних властивостей [23]; *задачі, що* *виникають у теорії статистичних рішень* при розбитті простору ознак на неперетинні класи [24]; *задачі класифікації сигналів в умовах невизначеності* [24]; *задачі*, що виникають *при проектуванні генеральних схем облаштованості нафтових родовищ* [25-26], та багато інших практично важливих задач.

Теоретичні та практичні задачі з названого класу можуть бути зведені у математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) [18]. Неперервні задачі ОРМ вперше з'являються в літературі, починаючи з шістдесятих років майже одночасно у роботах H. W. Corley, S. D. Roberts [4, 5], та у чисельних роботах О. М. Кисельової. У ряді робіт іноземних авторів R. L. Francis [7], M. Friedman [8], H. Jandl , K. Wieder [9] розглядаються задачі, близькі до задач оптимального розбиття множини на підмножини.

Наукова теорія ОРМ, що започаткована та розвинена О. М. Кісельовою, і, пізніше, її науковою школою дозволяє розробити та обґрунтувати методи розв'язання неперервних лінійних задач ОРМ, а також сформулювати ефективні алгоритми на їх основі, тобто створити потужний математичний апарат для розв'язання неперервних лінійних задач ОРМ.

Ця теорія базується на єдиному підході, що полягає у зведенні вихідних нескінченновимірних задач оптимізації (які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування з булевими значеннями змінних) певним чином (наприклад, через функціонал Лагранжа) до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації. Для чисельного розв'язання таких задач засовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації – різні варіанти r-алгоритму Шора [27].

Особливість такого підходу полягає у тому, що розв'язок вихідних нескінченновимірних задач оптимізації вдається отримати аналітично в явному вигляді, причому в аналітичний вираз входять параметри, що відшукуються як оптимальний розв'язок допоміжних скінченновимірних задач оптимізації з негладкими цільовими функціями.

Таким чином, нескінченновимірні задачі розташування підприємств можна розв'язувати як досліджені математичною школою О.М.Кісельової лінійні задачі ОРМ. Але на практиці функціонал сумарних виробничих та транспортних витрат у загальному випадку є нелінійним.

Тому для більш адекватного моделювання названих реальних процесів необхідне подальше дослідження названих задач.

Неперервним нелінійним задачам ОРМ із фіксованими центрами підмножин присвячено ряд наукових робіт О. М. Кісельової спільно з В. В. Сусідко [17], С. А. Ус [19, 26], але оскільки майже в усіх практичних і теоретичних задачах, що можуть бути зведені до неперервних нелінійних задач ОРМ, у найбільш загальному випадку центри підмножин є заздалегідь невідомими та підлягають знаходженню, то для розв'язання нескінченновимірних задач розташування підприємств актуальним стало узагальнення існуючих математичних постановок, розробка методів і алгоритмів розв'язання цих задач із нелінійним функціоналом сумарних витрат та розташуванням центрів підмножин.

У дисертаційній роботі [14] автором статті розроблено методи та алгоритми розв'язання неперервних нелінійних задач ОРМ із розташуванням центрів підмножин.

Ідея цих методів полягає у переході від вихідної нелінійної нескінченновимірної задачі оптимізації через функціонал Лагранжа до скінченновимірної двоїстої з негладким цільовим функціоналом та допоміжного операторного рівняння.

4. Мета і задачі дослідження

Наступна робота присвячена застосуванню розроблених автором для неперервних нелінійних задач ОРМ методів та алгоритмів [14], а також програмної реалізації [15] до розв'язання практичних прикладних нескінченновимірних задач розташування підприємств із нелінійним функціоналом сумарних витрат на виробництво продукції та її доставку до споживача.

5. Метод розв'язання задачі А

Уводячи характеристичну функцію підмножин Ω_i у вигляді

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1,\dots,N,$$

вектор-функцію $\lambda(x)$ у вигляді $\lambda(x) = (\lambda_1(x),\dots, \lambda_N(x))$ та функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau) = \sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i\left(\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx\right) + \int_{\Omega}c(x,\tau_i)\rho(x)\lambda_i(x)dx\right],$$

перепишемо нескінченновимірну задачу розташування підприємств у термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножин Ω_i, $i = 1,\dots,N$, тобто як задачу ОРМ у наступному вигляді.

Задача B.

Знайти $(\lambda_*(\cdot),\tau_*) \in {}^{'}_{1} \times \Omega^N: \ I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) = \min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau)} I(\lambda(\cdot),\tau)$, де

$$\Gamma'_1 = \{\lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega;$$
$$\int \rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i,\ i = 1,\dots,N\},$$

$$\tau \in \Omega^N,$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x):\ \lambda_i(x) = 0 \vee 1,\ i = 1,\dots,N,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x) = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x) = 1 \text{ м. в. для } x \in \Omega\}.$$

Очевидно, що має місце рівність

$$I(\lambda(\cdot),\tau) = F\left(\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\},\tau\right).$$

Від задачі B нескінченновимірного математичного програмування з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1,\dots,N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$ з відрізку $[0,1]$, тобто розглянемо задачу С.

Задача С.

Знайти $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)\in\Gamma_1\times\Omega^N$:

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N} I\,(\lambda(\cdot),\tau)\ ,$$

де

$$\Gamma_1=\{\lambda(x):\lambda(x)\in\Gamma \text{ м. в. для } x\in\Omega;$$

$$\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\ i=1,\dots,p\ ,$$

$$\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i,\ i=p+1,\dots,N\}, \tag{4}$$

$$\tau\in\Omega^N,\ \Gamma=\{\lambda(x):\ 0\le\lambda_i(x)\le1,\ i=1,\dots,N,$$

$$\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1 \text{ м. в. для } \ x\in\Omega\},$$

У такій постановці нескінченновимірна задача розташування підприємств є неперервною нелінійною задачею ОРМ із розташуванням центрів підмножин із обмеженнями у формі рівностей та нерівностей (4), яка досліджувалась автором статті у роботах [16, 20, 14]. Тому для неї можна застосувати розроблені автором у цих статтях для неперервних нелінійних задач ОРМ методи та алгоритми розв'язання. Ідея цих методів полягає у переході від вихідної нелінійної нескінченновимірної задачі оптимізації через функціонал Лагранжа до скінченновимірної двоїстої з негладким цільовим функціоналом та допоміжного операторного рівняння.

6. Розв'язання модельних задач

Алгоритми [16, 20] розв'язання задачі С застосовано і протестовано на модельних нескінченновимірних задачах розташування при обмеженнях на потужності підприємств у вигляді рівностей та нерівностей, коли залежності вартостей виробництва продукції підприємств від їх потужностей можуть бути описані у вигляді опуклих функцій.

Модельна задача 1. Споживач деякої однорідної продукції, яку виробляють три підприємства, неперервно розподілений в області

$$\Omega=\left\{(x,y):0\le x\le1,\ 0\le y\le1\right\}. \tag{5}$$

Координати розташування підприємств

$\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},\tau_i^{(2)}\right),\ i=1,2,3$, невідомі заздалегідь.

Для кожного i-го підприємства, $i=1,2,3$, задано функцію

$$c(x,y,\tau_i)=\sqrt{\left(x-\tau_i^{(1)}\right)^2+\left(y-\tau_i^{(2)}\right)^2}$$

вартості транспортування одиниці продукції з i-го підприємства до споживача (x,y) і попиту

$$\rho(x,y)\equiv1$$

на продукцію для кожного пункту споживання (x,y) області Ω . Функції

$$\varphi_i(Y_i)=\frac{1}{5}Y_i^3,\ i=1,2,3\ ,$$

описують залежність вартості виробництва продукції на i-ому підприємстві від його потужності $Y_i,\ i=1,2,3$, що визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i :

$$Y_i=\iint_{\Omega_i}\rho(x,y)dxdy,\ i=1,2,3\ .$$

Потрібно розбити множину споживачів Ω на зони $\Omega_i,\ i=1,2,3$, обслуговування їх трьома підприємствами, що не перетинаються, тобто на зони обслуговування споживачів i-м пунктом виробництва:

$$\bigcup_{i=1}^3\Omega_i=\Omega\ ,\ \operatorname{mes}(\Omega_i\cap\Omega_k)_{i\ne k}=0\ ,\ i=1,2,3,$$

і розташувати ці підприємства в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача:

$$F\left(\{\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\},\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^3\left[\varphi_i\left(\iint_{\Omega_i}\rho(x,y)dxdy\right)+\iint_{\Omega_i}c(x,\tau_i)\rho(x,y)dxdy\right],$$

за умов, що потужності i-тих підприємств, $i=1,2,3$, для першого та другого підприємств не повинні перевищувати заданих об'ємів:

$$0\le\iint_{\Omega_i}\rho(x,y)dxdy\le b_i,\ i=1,2\ ,\ b_1=0.8,\ b_2=0.5\ ,$$

а для третього підприємства повинна строго дорівнювати 0.45, тобто

$$\iint_{\Omega_i}\rho(x,y)dxdy=b_i,\ i=3\ ,\ b_3=0.45\ .$$

Для розв'язання задачі за допомогою алгоритму з [16, 20] і розробленого в [15] програмного комплексу NZORM область Ω з (5), поміщали у прямокутник П, що покривався прямокутною сіткою з вузлами $(i,j),\ i,j=1,\dots,21$. Умовою припинення рахунку було виконання нерівності

$$\left\|\left(Y^{(k)},\tau^{(k)},\Psi^{(k)}\right)-\left(Y^{(k+1)},\tau^{(k+1)},\Psi^{(k+1)}\right)\right\|\le\varepsilon,\quad \varepsilon>0\ , \tag{6}$$

де k – номер ітерації алгоритму з [16, 20], на якій відбувся зупин, $\varepsilon=10^{-6}$ – точність обчислень r-алгоритмом Шора.

За 543 ітерації отримано наступні результати:

– оптимальне розбиття множини для модельної задачі 1 (рис. 1);

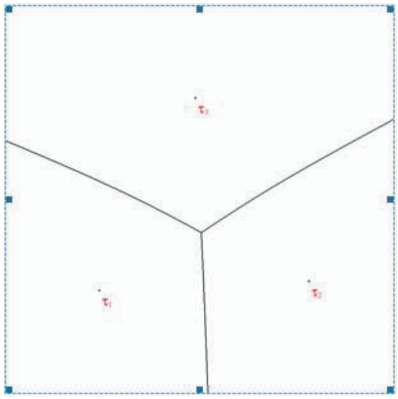

Рис. 1. Оптимальне розбиття множини споживачів для модельної задачі 1

– оптимальні координати розташованих підприємств:

$$\tau_1^* = (0.241711;\ 0.26597),\ \tau_2^* = (0.779724;\ 0.288794),$$

$$\tau_3^* = (0.487941; 0.759909);$$

– оптимальні потужності кожного з підприємств:

$$Y_1^* = 0.277767;\ Y_2^* = 0.266347;\ Y_3^* = 0.449547;$$

– мінімальне значення прямого функціонала з : $F_* \approx 0.264134$;

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі: $G^* \approx 0.264497$.

Модельна задача 2. Вихідні дані ті ж, що й для модельної задачі 1, за виключенням області Ω:

$$\Omega = \left\{(x,y):\ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \le 0.25\right\}.$$

Для розв'язання задачі за допомогою алгоритму з [16, 20] область Ω поміщали в квадрат П, що покривався прямокутною сіткою з вузлами $(i,j),\ i,j = 1,...,31$. Умовою припинення рахунку було виконання нерівності , де k – номер ітерації алгоритму, на якій відбувся зупин, $\varepsilon = 10^{-6}$ – точність обчислень r-алгоритмом Шора. За 312 ітерацій отримано:

– оптимальне розбиття множини для модельної задачі 2 (рис. 2);

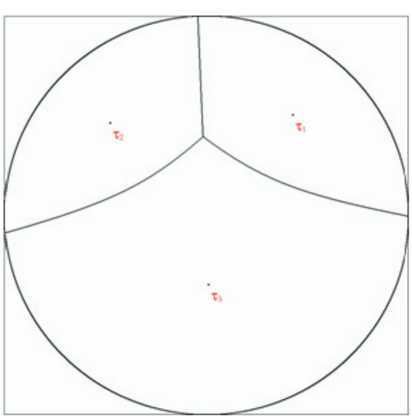

Рис. 2. Оптимальне розбиття множини споживачів для модельної задачі 2

– оптимальні координати розташованих підприємств:

$$\tau_1^* = (0.713442;\ 0.750851),\ \tau_2^* = (0.262139;\ 0.731031),$$

$$\tau_3^* = (0.504205; 0.326437);$$

– оптимальні потужності кожного з підприємств:

$$Y_1^* = 0.167201;\ Y_2^* = 0.157664;\ Y_3^* = 0.449482;$$

– мінімальне значення прямого функціонала: $F_* \approx 0.192442$;

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі: $G^* \approx 0.192326$.

Як видно з результатів розв'язання модельних задач 1, 2:

1) суми оптимальних потужностей підприємств у кожній із задач дорівнюють сумарній потужності, що чисельно дорівнює площі області Ω:

$S = 1 \times 1 = 1$ – у модельній задачі 1; $S = \pi \times 0.5^2$ – у модельній задачі 2;

2) оптимальні потужності підприємств із номерами 1, 2 не перевищують заданих об'ємів b_i, $i = 1,2$, тобто виконані обмеження у формі нерівностей;

3) оптимальна потужність підприємства з номером 3 наближено дорівнює заданому об'єму $b_3 \approx 0.45$, тобто виконано обмеження у формі рівності;

4) значення прямого (цільового) та двоїстого функціоналів модельних задач наближено однакові.

7. Висновки

1. Сформульовано нові математичні постановки нескінченновимірних задач розташування підприємств із нелінійним функціоналом сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача, які надають можливість більш адекватно моделювати реальні процеси.

2. Запропоновано зведення нескінченновимірних задач розташування підприємств у математичній постановці до неперервних нелінійних задач ОРМ.

3. Для розв'язання задач розташування підприємств запропоновано застосування розроблених раніше автором ефективних методів та алгоритмів розв'язання неперервних нелінійних задач ОРМ із розташуванням центрів підмножин, а також систему NZORM, що є їх програмною і може бути впроваджена у виробництві, економіці і т. д.

4. Побудовано математичні моделі ряду прикладних виробничо-економічних нескінченновимірних задач розташування підприємств із одночасним розбиттям регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів. За допомогою системи NZORM одержано чисельні розв'язки та графічну візуалізацію результатів цих задач.

Автор приносить глибоку вдячність Кісельовій Олені Михайлівні, заслуженому діячеві науки і техніки України, д. ф.-м. н., професору, декану ФПМ Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, завідувачу кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики, за наукове керівництво.

Література

1. Alexander, M. N. Effect of Population Mobility on the Location of Communal Shelters [Текст] / Michael N. Alexander, J. Brooks Ferebee, Paul J. Grim [etc.] // Operations Research. - 1958. - Vol. 6, No 2. - P. 207-231.
2. Bollabas, B. The Optimal Arrangement of Producers [Текст] / B. Bollabas // Journal of the London Mathematical Society. - 1973. - Vol. 6, No 4. - P. 605-613.
3. Chen, R. Relaxation Methods for the Solution of the Minimax Location-Allocation Problem in Euclidean Space [Текст] / R. Chen, G. Y. Handler // Naval Research Logistics. - 1987. - Vol. 34., No 6. - P.775-788.
4. Corley, H. W. A Partitioning Problem with Applications in Regional Design [Текст] / H. W. Corley, S. D. Roberts // Operations Research. - 1972. - Vol. 20, No 5. - P. 1010-1019.
5. Corley, H. W. Duality Relationships a Partitioning Problem [Текст] / H. W. Corley, S. D. Roberts // SIAM Journal of Applied Mathematics. - 1972. - Vol. 23, No 4. - P. 490-494.
6. Durier, R. Continuos Location Theory under Majority Rule [Текст] / R. Durier // Mathematics of Operations Research. - 1989. - Vol. 14, No 2. - P. 258-274.
7. Francis, R. L. Sufficient Conditions for some Optimum-Property Facility Design [Текст] / R. L. Francis // Operations Research. - 1967. - Vol. 15, No 3. - P. 448-466.
8. Friedman, M. On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems [Текст] / M. Friedman // Computers & OR. - 1976. - Vol. 3, No 4. - P. 283-294.
9. Jandl, H. A continuous Set Covering Problem as a Quasidifferentiable Optimization Problem [Текст] / H. Jandl, K. Wieder // Optimization. - 1988. - Vol. 19 , No6. - P. 781-802.
10. Juel, H. A Localization Property for Facility-Location Problems with Arbitrary Norms [Текст] / H. Juel, R. Love // Naval Research Logistics. - 1988. - Vol. 35, No 2. - P. 203-207.
11. Акимова, И. Я. Применение диаграмм Вороного в комбинаторных задачах [Текст] / И. Я. Акимова // Техническая кибернетика. - 1984. - № 2. - С. 102-109.
12. Быховский, М. Л. Кибернетические системы в медицине [Текст]: учеб, пособие / М. Л. Быховский, А. А. Вишневский. - М. : Наука, 1981. - 400 с. - (Университетская книга).
13. Гольштейн, Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст]: учеб, пособие / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. - М. : Наука, 1969. — 382 с. - (Университетская книга).
14. Дунайчук, М.С. Методи та алгоритми розв'язання неперервних нелінійних задач оптимального розбиття множин [Текст]: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук / М.С. Дунайчук. - Д., 2008. - 170 с.
15. Дунайчук, М. С. Система NZORM для розв'язання неперервної нелінійної задачі оптимального розбиття множин [Текст] / М. С. Дунайчук // Питання прикладної математики і математичного моделювання : збірник наукових праць. - Дніпропетровськ : ДНУ, 2006. - С. 49-61.
16. Кісельова, О. М. Про розв'язання неперервної нелінійної задачі оптимального розбиття множини на її непертинні підмножини із розташуванням їх центрів, із обмеженнями у формі рівностей та нерівностей [Текст] / О. М. Кісельова, М. С. Дунайчук // Питання оптимізації обчислень : міжнар. симп. Інстит. кіберн. ім. В.М. Глушкова НАН України, верес. 2007 р. : праці міжнар. симп. - К., 2007. - С. 126-127.
17. Киселёва, Е. М. Нелинейная задача оптимального разбиения с ограничениями [Текст] / Е. М. Киселёва, В. В. Сусидко, С. А. Ус // Методы решения математической физики и обработки данных. - Днепропетровск : ДГУ, 1990. - С. 28-31.
18. Киселёва, Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения [Текст]: Монография / Е. М. Киселёва, Н. З. Шор. - К.: Наукова думка, 2005. — 564 с.
19. Киселёва, Е. М. Об одной нелинейной модели определения зон обслуживания [Текст] / Е. М. Киселёва, С. А. Ус // Математичне моделювання. - Дніпродзержинськ : ДДТУ, 1998. - № 3. - С. 3—6.
20. Киселёва, Е. М. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала [Текст] / Е. М. Киселёва, М. С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. - К. : Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украіни, 2008. - № 2. - С. 134-152.
21. Киселёва, Е. М. Свойства оптимальных решений для одной задачи орошения [Текст] / Е. М. Киселёва, И. В. Бейко // Краевые задачи фильтрации. - К. : Ин-т математики АН УССР, 1973. - С. 255-261.
22. Кротов, В. Ф. Достаточные условия оптимальности в задачах об оптимальных покрытиях [Текст] / В. Ф. Кротов, С. А. Пиявский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1968. - № 2. - С. 10-17.
23. Мазуров, В. Д. Применение методов теории распознавания образов в оптимальном планировании и управлении [Текст] / В. Д. Мазуров // Тр. ин-та мат. и мех. Уральск. научн. центр. АН СССР. - 1974. - 6, вып. 5. - С. 58-80.
24. Миленький, А. В. Классификация сигналов в условиях неопределенности [Текст] / А. В. Миленький. - М. : Сов. радио. - 1975. -328 с.
25. Туев, С. В. Оптимизация сбора и переработки распределенного ресурса [Текст] / С. В. Туев // Оптимизация и устойчивость. - М. : ВЦ АН СССР, 1980. - С. 23-31.
26. Ус, С. А. Решение одного класса бесконечномерных задач [Текст]: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / С.А. Ус. - Х., 1992. - 161 с.
27. Шор, Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение [Текст] / Н. З. Шор. - К. : Наук. думка, 1979. - 200 с.