

УДК 001.8:635.8

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Н. Е. Сапожников

Доктор технических наук, профессор, проректор по учебной работе*

Д. В. Моисеев

Кандидат технических наук, доцент*

П. С. Бейнер

Аспирант*

*Кафедра компьютеризованных систем**

Н. В. Бейнер

Аспирант

Кафедра начертательной геометрии и компьютерной графики**

**Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности

ул. Курчатова, 7, г. Севастополь, Украина, 99033

E-mail: beyner@list.ru

Проведена оцінка точності виконання арифметичних операцій додавання і множення двох операндів, представлених у вигляді ймовірнісних відображень, що робить можливим застосування ймовірнісної форми подання інформації для побудови інформаційно-вимірювальних систем. У статті виявлені фактори, що впливають на похибки виконання ймовірнісних арифметичних операцій, серед яких кількість статистичних випробувань, закон розподілу випадкових сигналів та ін.

Ключові слова: ймовірна форма подання інформації, арифметичні операції, точність, похибка

Проведена оценка точности выполнения арифметических операций сложения и умножения двух операндов, представленных в виде вероятностных отображений, что делает возможным применение вероятностной формы представления информации для построения информационно-измерительных систем. В статье выявлены факторы, влияющие на погрешности выполнения вероятностных арифметических операций, среди которых количество статистических испытаний, закон распределения случайных сигналов и др.

Ключевые слова: вероятностная форма представления, арифметические операции, точность, погрешность

1. Введение

В специализированных компьютерных системах многоцелевого назначения над сигналами, получаемыми от датчиков и передаваемыми по линиям связи, производятся самые разнообразные операции и преобразования [1-3]. В общем случае их можно разделить на три группы:

- операции преобразований;
- логические операции;
- арифметические операции.

К операциям первой группы относятся операции преобразования информации из исходной формы в двоичные позиционные коды.

Вторая группа операций включает в свой состав операции:

- инверсии;
- сравнения на равенство;
- сравнения на больше (меньше).

К операциям третьей группы относятся операции:

- умножения и возведения в степень;
- сложения;
- вычитания;
- деления,

из которых наиболее часто встречающимися являются операции сложения и умножения.

2. Постановка задачи

Известны основные преимущества вероятностной формы представления данных: малый аппаратный объём, повышенная помехозащищённость, способность функционировать в масштабе реального времени [4]. Однако недостаточно освещённым является вопрос оценки точности при выполнении основных арифметических операций в вероятностных информационно-измерительных системах (ИИС).

Целью данной работы является оценка погрешности выполнения арифметических операций сложения и умножения при представлении информации в вероятностной форме.

3. Решение задачи

Операция сложения вероятностно преобразованных сигналов может быть выполнена двумя путями. Первый предполагает использование операции дизъюнкции над вероятностными отображениями слагаемых, сдвинутых одно относительно другого на время τ . При этом для однолинейного однополярного представления выражение для оценки суммы имеет вид

$$\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = \frac{1}{K} \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^K y_{qj} \quad (1)$$

С другой стороны, помня, что вероятностное отображение дизъюнкции соответствует схеме испытаний Бернулли, она же является асимптотически эффективной [5]. Ее математическое ожидание

$$M\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = M\left(\frac{1}{K} \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^K y_{qj}\right) = \sum_{q=1}^Q M(y_{qj}) = \sum_{q=1}^Q F_{x_q}(R_q) \quad (2)$$

Для случая, когда вспомогательные случайные сигналы $R_q(t)$ распределены равномерно, МО оценки равно [5]

$$M\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = \sum_{q=1}^Q x_q \quad (3)$$

а, следовательно, оценка и несмещённая.

Найдем погрешность вероятностного преобразования при суммировании вероятностных отображений слагаемых. Для этого определим дисперсию оценки [6]

$$D\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = \frac{1}{K^2} \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^K D(y_{qj}) = \frac{1}{K} \sum_{q=1}^Q [F_{x_q}(R_q) - F_{x_q}^2(R_q)] \quad (4)$$

и через нее среднеквадратическое отклонение

$$\sigma\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\sum_{q=1}^Q F_{x_q}(R_q)[1 - F_{x_q}(R_q)]} \quad (5)$$

и абсолютную погрешность определения оценки суммы

$$\Delta_1 = \sqrt{2}\Phi^{-1}(P)\sigma\left(\sum_{q=1}^Q x_q\right)^* = \frac{1,41\Phi^{-1}(P)}{\sqrt{K}} \sqrt{\sum_{q=1}^Q F_{x_q}(R_q)[1 - F_{x_q}(R_q)]} \quad (6)$$

Для случая, когда количество слагаемых $Q = 2$, а закон распределения $R_1(t)$ и $R_2(t)$ равномерен, значение для приведенной погрешности примет вид

$$\gamma_{BC} = \frac{141\Phi^{-1}(P)}{\sqrt{K}} \sqrt{x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2)}, \quad (7)$$

откуда следует, что для получения сравнимого с позиционной формой представления значения погрешности, равного $\gamma_1 \leq 0,2\%$ при $x_1 = x_2 = 0,5$, то есть для оценки сверху, количество независимых статистических испытаний следует выбирать не менее $2,5 * 10^2$.

Вероятностный сумматор для суммирования Q слагаемых представляет собой (рис. 1) Q -входовую логическую схему "ИЛИ" и $Q-1$ устройств временной задержки на время τ каждое.

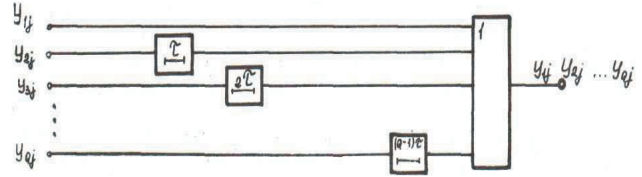


Рис. 1. Функциональная схема вероятностного сумматора при однолинейном однополярном представлении слагаемых

Таким образом, при суммировании вероятностных отображений с помощью дизъюнктора и задержки вероятностных отображений слагаемых одно относительно другого на время τ значение абсолютной и приведенной погрешностей суммирования не зависит от метода представления слагаемых. Для двух слагаемых аппаратный объем вероятностного сумматора сравнительно с детерминированным будет меньше в 90 раз.

При однолинейном однополярном представлении вероятностное отображение [4] произведения Q вероятностно преобразованных величин x_q , где $q = 1, 2 \dots Q$, имеет вид конъюнкции вероятностных отображений сомножителей. Оценка произведения $\prod_{q=1}^Q x_q$, в соответствии с выражением для его оценки, представляет собой среднее арифметическое конъюнкции членов вероятностных отображений сомножителей.

Учитывая, что вероятностное отображение произведения, в силу независимости вероятностных отображений сомножителей, соответствует схеме испытаний Бернулли, следует считать, что рассматриваемая оценка также является асимптотически эффективной [5]. В соответствии с

$$M\left(\prod_{q=1}^Q x_q\right)^* = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \prod_{q=1}^Q M(y_{qj}) = \prod_{q=1}^Q \sum_{l=1}^K y_{ql} P_l = \prod_{q=1}^Q F_{x_q}(R) \quad (8)$$

она же является несмещенной.

Погрешность вероятностного умножения будем искать, используя метод последовательного определения дисперсии и среднеквадратического отклонения оценки [7]. Тогда

$$D\left(\frac{1}{K} \sum_{q=1}^Q \& y_{qj}\right) = \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^K D(\& y_{qj}) = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \left[\sum_{q=1}^Q \& y_{ql} - M\left(\& y_{ql}\right) \right]^2 P_l = \frac{1}{K} \prod_{q=1}^Q F_{x_q}(R) \left[1 - \prod_{q=1}^Q F_{x_q}(R) \right] \quad (9)$$

и выражение для абсолютной погрешности умножения вероятностно преобразованных сигналов примет вид

$$\Delta_{By} = \frac{141\Phi^{-1}(P)}{\sqrt{K}} \sqrt{\prod_{q=1}^Q F_{x_q}(R) \left[1 - \prod_{q=1}^Q F_{x_q}(R) \right]}, \quad (10)$$

а формула для вычисления приведенной погрешности при $Q=2$ и равномерном распределении $R_1(t)$ и $R_2(t)$ запишется как [8]

$$\gamma_{\text{ВУ}} = \frac{141\Phi^{-1}(P)}{\sqrt{K}} \sqrt{x_1x_2(1-x_1x_2)}, \quad (11)$$

откуда видно, что при фиксированном числе испытаний погрешность вероятностного умножения достигает максимального значения при $x_1x_2=0,5$.

Воспользовавшись табулированной функцией Лапласа, построим график на рис. 2, отображающий зависимость $\Delta_{\text{ВУ, max}}$ от числа статистических испытаний при $P=0,997$, откуда хорошо видно, что для получения погрешности меньшей 10% количество статистических испытаний должно выбираться не менее 225 [9, 10].

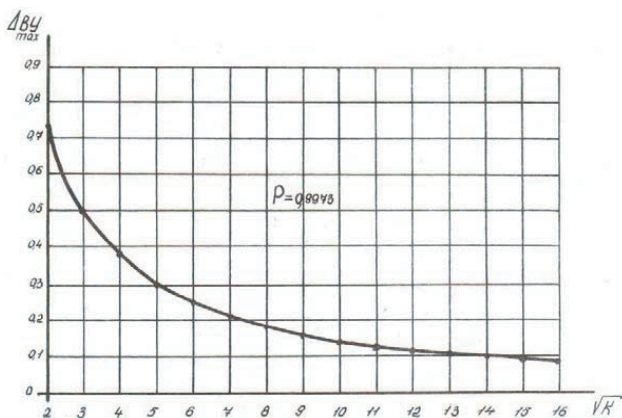


Рис. 2. Зависимость максимального значения абсолютной погрешности $\Delta_{\text{ВУ, max}}$ вероятностного умножения от количества статистических испытаний K

4. Выводы

Подводя итоги по данному вопросу, можно сделать следующие выводы:

1) для получения сравнимого с позиционной формой представления значения погрешности при выполнении операции сложения количество независимых статистических испытаний следует выбирать не менее $2,5 \cdot 10^2$;

2) погрешность вероятностного преобразования при выполнении операции умножения зависит от количества статистических испытаний преобразуемых величин, законов распределения вспомогательных случайных сигналов и положения преобразуемых величин внутри динамического диапазона;

3) значения погрешностей практически не зависят от количества сомножителей и метода их вероятностного преобразования;

4) при использовании для возведения в целую степень вероятностного квадратора с задержкой входной последовательности на один такт для получения одинаковой погрешности со схемой обычной конъюнкции количество статистических испытаний следует увеличивать в 1,84 раза;

5) при удовлетворительной точности выполнения операций умножения и возведения в целую степень, количество статистических испытаний следует выбирать от 225 до 900, что при существующей элементной базе с верхней граничной частотой более 1000 мГц, позволяет использовать вероятностные процессоры в СКС реального времени с верхней частотой 1000 кГц, что удовлетворяет практические потребности 90% СКС.

Литература

1. Гладкий, В. С. Вероятностные вычислительные модели. / В. С. Гладкий - М.: Наука, 1973.- 300 с.
2. Сапожников, Н. Е. Математическое моделирование вероятностных процессоров с помощью ППЭВМ / Н. Е. Сапожников, В. Л. Хайков // Севастополь - СВВМИУ, 1992 г. - С. 24-28.
3. Моисеев, Д. В. О методе построения вероятностного широкодиапазонного спектрометра повышенной точности / Д. В. Моисеев, Н. Е. Сапожников. // Зб. наук. пр. СНУЯЕтаП. - Севастополь: СНУЯЕтаП, 2010. - Вып. 2(34), -С.209-215.
4. Сапожников, Н. Е. О вероятностном преобразовании информации / Н. Е. Сапожников // Приборостроение. - Вып.34, 1983. - С.31-38.
5. Сапожников, Н. Е. К вопросу о выполнении операции сложения над вероятностно преобразованными сигналами / Н. Е. Сапожников // сб. Всесоюзной школы-семинара "Передача, обработка и отображение информации". - Теберда - Харьков, 1991. - С. 25 - 28.
6. Сапожников, Н. Е. Вероятностный сумматор / Н. Е. Сапожников // Подходы в улучшении профессионального становления выпускников высшей школы: сб. - Севастополь: ВВМИУ, 1992. - С. 53 - 54.
7. Сапожников, Н. Е. Сравнительная оценка методов вероятностного преобразования информации / Н. Е. Сапожников // Вестник СевГТУ. Информатика, электроника, связь. - Севастополь: СевГТУ, 1997. - № 5. - С. 37 - 41.
8. Сапожников, Н. Е. О природе погрешностей при умножении нелинейно преобразованных величин / Н. Е. Сапожников // Повышение боевой эффективности, тактических и технических характеристик систем вооружения и техники ВМС: сб. ст. - Севастополь: СВМИ, 1993. - С. 130 - 133.
9. Сапожников, Н. Е. Вероятностное множительное устройство / Н. Е. Сапожников // Подходы в улучшении профессионального становления выпускников высшей школы: сб. - Севастополь: ВВМИУ, 1992. - С. 47 - 49.
10. Сапожников, Н. Е. Сравнительная оценка методов суммирования вероятностно преобразованных сигналов / Н. Е. Сапожников // Вестник СевГТУ, Механика, энергетика, экология.- N6, 1997. - С.89-95.