

• приведенные результаты методических расчетов ряда общепринятых тестовых задач подтверждают заявленную скорость сходимости и экономичность разработанных КРС.

В дальнейшем предполагается обобщить предложенный подход на случай систем ДУЧП в многомерном случае.

### Литература

1. Encyclopedia of Computational Mechanics Volume 1 Fundamentals [Текст] / Editors Erwin Stein, Rene de Borst, Thomas J. R. Hughes – WILEY, 2004. – 798 p.
2. Drikakis D. Rider W. High-Resolution Methods for Incompressible and Low-Speed Flows – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005 – 622 p.
3. Самарский, А. А. Теория разностных схем. Учебное пособие [Текст] / Самарский А.А. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 616 с.
4. Бучарский, В.Л. Метод совместной аппроксимации построения разностных схем для решения уравнений в частных производных [Текст] / В.Л. Бучарский // Техническая механика. – 2007. – № 1. – с. 50 – 57.
5. Бучарский, В.Л. Симметричные разностные схемы метода совместной аппроксимации для решения линейного уравнения переноса [Текст] / В.Л. Бучарский, Е.М. Калинин // Математичні машини і системи. – 2011. – №4. – с. 161-165.
6. Бучарский, В. Л. Двухшаговые разностные схемы метода совместной аппроксимации для решения квазилинейных одномерных гиперболических уравнений [Текст] / В.Л. Бучарский // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – №2/4 (62). – с. 34-38.
7. Аквис, М.А. Тензорное исчисление: Учеб. пособие [Текст] / Аквис М.А., Гольдберг В.В. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
8. Shokin Y.I. The Method of Differential Approximation / Shokin Y.I. – Springer-Verlag Berlin And Heidelberg GmbH & Co. – 1983. – 224p.
9. Shu, C.-W. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [Текст] / C.-W. Shu, S.Osher // J. Comp. Phys. – 1988. – v.77. – p.439-471.
10. Qiu, J. Finite-difference WENO schemes with Lax-Wendroff-type time discretizations [Текст] / J. Qiu, C.-W. Shu // SIAM J.Sci. Comput. – 2003. – v.24. – №6. – p.2185-2198.
11. Qiu, J. Hermite WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretizations for Hamilton-Jacobi equations [Текст] / J. Qiu // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – v.25 – p.131-144.

*Складні об'єкти, як правило, мають спільну рису – у них на скінченній множині «носіїв» розподілено обмежену множини «ресурсів». Така точка зору на складну систему разом із застосуванням принципу максимуму ентропії може допомогти в з'ясуванні феномену негауссових ступеневих розподілів*

*Ключові слова: гіперболический розподіл, негауссовий розподіл, ступеневий розподіл, гіперболический закон розподілу*

*Сложные объекты, как правило, обладают одним общим свойством – у них на конечном множестве «носителей» распределено ограниченное множество «ресурсов». Такой взгляд на сложную систему в сочетании с принципом максимума энтропии может дать ключ к объяснению феномена негауссовых степенных распределений*

*Ключевые слова: гиперболическое распределение, негауссово распределение, степенное распределение, гиперболический закон распределения*

УДК 517.956.3+519.246+519.218.7

## ЭВОЛЮЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

**Н. И. Делас**

Кандидат технических наук, докторант  
Национальный авиационный университет  
пр. Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03680  
E-mail: nikolaivad@gmail.com

### 1. Введение

Широко известен феномен негауссова распределения, проявленный как в природе, так и в сфере человеческой деятельности. Есть множество объектов,

которым свойственен степенной (гиперболический) закон распределения.

Иногда он носит имя Дж. Ципфа, обнаружившего этот закон в лингвистике. В экономике – это закон Парето (распределение материальных благ в

обществе); в социальной географии (распределение городов по численности населения) – закон Ауэрбаха. Законом Бредфорда называют распределение ученых по их продуктивности, законом Кудрина – распределение уровня энергопотребления типовых технических агрегатов на крупных промышленных комбинатах.

Гиперболический (степенной) характер имеют распределения размеров усталостных микротрещин в конструктивных материалах [1], а также распределение масштабов турбулентных вихрей в атмосфере [2]. Он проявляется даже в таких далеких друг от друга областях как продажи в Интернете (правило Криса Андерсона) [3], астрономия [4], музыка [5], педагогика [6], криминалистика [7]. Ему подчинена повторяемость стихийных явлений природы по степени их разрушительности, а также – строение биоценозов в различных экосистемах.

В статье [8] рассмотрено более десятка различных подходов, объясняющих данный феномен.

Большое разнообразие теорий свидетельствует лишь о том, что в настоящее время не существует единой точки зрения на механизм формирования степенного (гиперболического) закона распределения в сложных системах.

Цель настоящей статьи – выявить физические основы формирования гиперболического распределения, вывести соотношения для его параметров, выявить факторы, определяющие эволюцию систем с таким распределением.

## 2. Идеи подхода

**Во-первых**, принята точка зрения, что большинство сложных систем, в том числе и вышеперечисленные примеры, представляют собой объекты, у которых на некотором конечном множестве «носителей» распределено ограниченное множество «ресурсов». Например, среди людей распределены материальные блага, среди множества городов – население, среди усталостных микротрещин и турбулентных вихрей – энергия и т.д.

Такой взгляд на природу сложного объекта довольно продуктивен. Он позволяет увидеть физические послышки, которые могут формировать внутри системы негауссовы распределения.

В связи с этим рассмотрим абстрактное сообщество, состоящее из  $N$  элементов, в дальнейшем – «носителей».

В нем неравномерно распределено какое-то ограниченное количество «ресурсов»  $E$ . Каждый  $i$ -й «носитель» располагает своей индивидуальной порцией  $\epsilon_i$  этого «ресурса». Можно построить дискретную шкалу разбиения  $\epsilon$  на  $M$  равных интервалов со средними (в пределах интервала) значениями  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_M$ .

По этому признаку сообщество делится на  $M$  классов, в каждом из которых содержится  $E_i$  – «ресурсов» и  $n_i$  – «носителей», обладающих примерно одинаковым количеством индивидуальной доли «ресурса»  $\epsilon_i$ . Иными словами, можно выделить  $M$  ячеек фазового пространства с координатами  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_M$  (рис. 1).

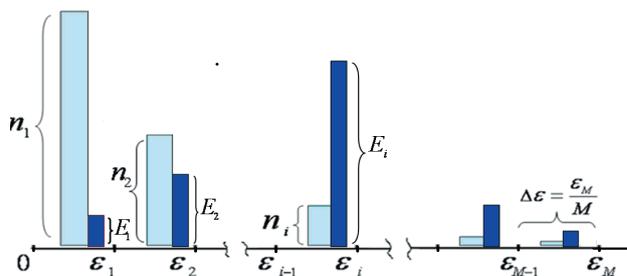


Рис. 1. Распределения  $n_i$  – «носителей» и  $E_i$  – «ресурсов» среди  $M$  ячеек фазового пространства

При таких обозначениях очевидны равенства:

$$\sum_{i=1}^M n_i = N, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^M E_i = \sum_{i=1}^M n_i \epsilon_i = E. \tag{2}$$

Распределение ограниченного ресурса складывается не произвольно. Возникают определенные статистические закономерности, которые формируют характер зависимости  $n_i = f(\epsilon_i)$ , а также определяют величину максимальной координаты  $\epsilon_M$ . Ниже осуществлен поиск такого распределения. Основой для решения задачи используется принцип максимума энтропии.

Энтропийный принцип эффективен для исследования сложных трудно-формализуемых объектов. В его основе лежит понимание, что в процессе своего «расселения» некоторая величина стремится достичь *наивысшей степени экспансии*, а ее распределение приобретает наиболее вероятную из всех доступных форм. При этом энтропия достигает своего *условного* максимума (например, энтропия Шеннона:

$$H = - \sum_{i=1}^M p_i \cdot \ln p_i, \tag{3}$$

где  $p_i$  – вероятность исхода); условия формируются ограничениями (1) и (2).

Таким образом, условный максимум энтропии выступает *интегральным критерием* того, что из множества возможных вариантов система реализует себя наиболее вероятно именно в *данной* конфигурации.

Важно понимать, что должна означать вероятность  $p_i$  в формуле (3). Обращает на себя внимание следующий факт.

Как правило, предполагается (смотри, например [9], или главу в Википедии, посвященную выводу распределения Гиббса), что входящая в формулу (3), частота  $p_i$ , имеет вид:

$$p_i = \frac{n_i}{N}. \tag{4}$$

В этом случае искомое распределение  $n_i = f(\epsilon_i)$  выводится как решение задачи на условный максимум энтропии:

$$H_N = - \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{N} \cdot \ln \frac{n_i}{N}. \tag{5}$$

С учетом условий (1) и (2) решение имеет известный [9] экспоненциальный вид:

$$n_i = C \cdot \exp(-\mu \cdot \epsilon_i), \tag{6}$$

где  $C$  и  $\mu$  – множители, определяемые из этих условий.

Физически это означает, что в данном случае именно «носители» проявляют максимальную активность. Они максимально полно (насколько позволяют ограничения (1) и (2)) заселяют все  $M$  классов. Заметим, что подавляющее большинство авторов при использовании энтропийного принципа, предпочитают именно такую постановку задачи.

**Вторая идея**, используемая в настоящей статье, есть точка зрения, что в сложной системе более динамичными часто бывают «ресурсы»  $E_i = n_i \cdot \epsilon_i$ , а не «носители»  $n_i$ . Как раз такой случай рассмотрим ниже, и покажем, что именно для таких систем свойственны негауссовы распределения типа гиперболических.

В действительности, систем, где более активными являются «ресурсы», наверное, больше остальных. Ведь, например, более естественным было бы полагать, что в обществе распределяется капитал, по городам – население, а среди турбулентных вихрей и усталостных трещин – энергия, чем наоборот.

В этом случае вероятность  $p_i$ , входящая в формулу (3), имеет вид:

$$p_i = \frac{E_i}{E} = \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E}. \tag{7}$$

### 3. Предельно гиперболический закон распределения

Найдем распределение  $n_i = f(\epsilon_i)$  как результат решения задачи на условный максимум энтропии, которая с учетом (7) выражается формулой

$$H_E = - \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E}, \tag{8}$$

где в качестве условий выступают требования (1) и (2).

Условный экстремум функции получим методом множителей Лагранжа. Для нахождения *условного* максимума  $H_E$ , определим *безусловный* максимум новой функции  $X(E_i)$ , которая, кроме энтропии (8), аддитивно включает уравнения связи (1) и (2), взвешенные множителями Лагранжа  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$X(E_i) = - \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} + \lambda \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{N} - 1 \right) + \mu \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} - 1 \right). \tag{9}$$

Распределение  $n_i = f(\epsilon_i)$ , при котором (9) достигает экстремума, удовлетворяет требованию:

$$\frac{\partial X(E_i)}{\partial n_i} = - \frac{\epsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} - \frac{\epsilon_i}{E} + \lambda \cdot \frac{1}{N} + \mu \cdot \frac{\epsilon_i}{E} = 0.$$

Вторая производная всегда отрицательна, поэтому найденный экстремум являет собой максимум.

Отсюда получим:

$$n_i = \frac{C}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\bar{\lambda}}{\epsilon_i}\right), \tag{10}$$

где  $C = E \cdot \exp(\mu - 1)$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda \cdot \frac{E}{N}$ .

Физический смысл множителя  $\lambda$  становится ясным после определения экстремума функции  $n_i = f(\epsilon_i)$ , задаваемого формулой (10).

Удобнее искать экстремум соответствующего непрерывного распределения  $p(\epsilon) = \frac{C}{\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{\bar{\lambda}}{\epsilon}\right)$ , которое получается при  $M \rightarrow \infty$ .

Из условия  $\frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon} = 0$  следует, что  $\bar{\lambda} = -\epsilon_*$  и  $C = n_* \cdot \epsilon_* \cdot e$ , где  $e \approx 2.718$ , а  $\epsilon_*$  и  $n_*$  – координаты точки, в которой распределение (10) достигает максимума (рис. 2).

Как правило, количество ячеек фазового пространства  $M$  достаточно велико, поэтому полученные решения  $\epsilon_*$  и  $n_*$  можно с высокой точностью использовать и для дискретной задачи.

В итоге, искомое распределение  $n_i = f(\epsilon_i)$ , можно записать в виде:

$$\frac{n_i}{n_*} = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i}\right). \tag{11}$$

С уменьшением координаты экстремума  $\epsilon_*$  (его причины будут рассмотрены ниже) влияние экспоненциального множителя в выражении (11) нивелируется, и оно асимптотически приближается к чисто гиперболической зависимости:

$$\frac{n_i}{n_*} = \frac{\epsilon_* \cdot e}{\epsilon_i} = \frac{A}{\epsilon_i}. \tag{12}$$

В связи с этим соотношение (11) было предложено [10] называть *предельно гиперболическим законом распределения* (рис. 2).

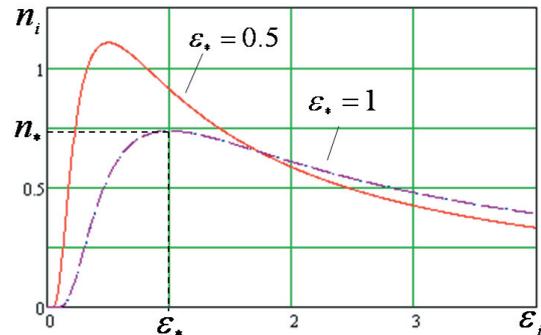


Рис. 2. Предельно гиперболический закон распределения (11)

Примечательно, что такой же результат можно получить, если вместо (8) записать выражение для энтропии в форме:

$$S_E = g \cdot \ln G(E_i), \tag{13}$$

где  $g$  – множитель, учитывающий размерность, а  $G(E_i)$  – статистический вес, характеризующий число возможных перестановок порций «ресурса»  $E_i = n_i \cdot \epsilon_i$ , за исключением количества тривиальных комбинаций внутри каждого класса.

Выбором размерности всегда можно добиться, чтобы  $n_i \cdot \epsilon_i$  была целочисленной, тогда:

$$G(E_i) = \frac{(\sum_{i=1}^M n_i \cdot \epsilon_i)!}{\prod_{i=1}^M (n_i \cdot \epsilon_i)!} = \frac{E!}{\prod_{i=1}^M (n_i \cdot \epsilon_i)!} \tag{14}$$

Применив известную формулу Стирлинга

$$\ln K! \approx K \cdot (\ln K - 1),$$

выражение (11) можно записать в виде:

$$S_E = g \cdot \left[ E \cdot (\ln E - 1) - \sum_{i=1}^M (n_i \cdot \epsilon_i \cdot (\ln(n_i \cdot \epsilon_i) - 1)) \right],$$

Или

$$S_E = g \cdot [E \cdot \ln E - \sum_{i=1}^M n_i \cdot \epsilon_i \cdot \ln(n_i \cdot \epsilon_i)].$$

По аналогии с (8) условный максимум энтропии  $S(E)$  определим, находя безусловный максимум функции:

$$Y(E_i) = S_E + \vartheta \cdot (\sum_{i=1}^M \frac{n_i}{N} - 1) + \eta \cdot (\sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} - 1).$$

Решением является:

$$n_i = \frac{C_1}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\vartheta/g}{\epsilon_i}\right) = \frac{C_1}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\epsilon_i}\right),$$

что совпадает с выражением (10).

Такая *независимость* результата от формы энтропии подтверждает справедливость самой идеи энтропийного подхода для описания сложных объектов.

#### 4. Параметры предельно гиперболического закона распределения

Задача определения параметров распределения (11) имеет три неизвестных  $\epsilon_*$ ,  $n_*$ ,  $\epsilon_M$  и два уравнения связи (1), (2). Соотношения для  $n_*$  и  $\epsilon_*$  можно получить, подставляя (11) в уравнения (1) и (2):

$$n_* \cdot \epsilon_* \cdot \sum_{i=1}^M \frac{1}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i}\right) = N, \tag{15}$$

$$n_* \cdot \epsilon_* \cdot \sum_{i=1}^M \exp\left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i}\right) = E. \tag{16}$$

Разбивая шкалу  $\epsilon$  на  $M$  равных интервалов (рис. 1) с шагом  $\Delta\epsilon = \epsilon_M / M$ , можно записать равенство:

$$\epsilon_i = i \cdot \Delta\epsilon = i \cdot \frac{\epsilon_M}{M}, \tag{17}$$

где  $i$  – порядковый номер интервала, содержащего величину  $\epsilon_i$ .

Аналогично

$$\epsilon_* = i_* \cdot \Delta\epsilon = i_* \cdot \frac{\epsilon_M}{M}. \tag{18}$$

Введем обозначение:  $\phi = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_M} = \frac{i_*}{M}$ . (19) Очевидно, что эта величина изменяется в диапазоне:  $\phi \in (0;1)$ . Тогда из (15) и (16), с учетом (17), (18), следует:

$$n_* = N \cdot \frac{1}{e \cdot F(\phi)}, \tag{20}$$

$$\epsilon_* = \frac{E}{N} \cdot \frac{F(\phi)}{\Phi(\phi)}, \tag{21}$$

$$\epsilon_M = \frac{E}{N} \cdot \frac{F(\phi)}{\Phi(\phi) \cdot \phi}, \tag{22}$$

где

$$F(\phi) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{\phi}{j/M} \cdot \exp\left(-\frac{\phi}{j/M}\right), \tag{23}$$

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{\phi}{j/M}\right). \tag{24}$$

На рис. 3 приведены графики зависимости модальной  $\epsilon_*$  и максимальной  $\epsilon_M$  величин от параметра  $\phi$ . Примечательно, что, начиная уже, примерно, с  $M > 10$ , вид этих кривых малочувствителен к росту количества классов  $M$ .

Подставляя (17) и (18) в формулу (11), с учетом (19) получим:

$$\frac{n_i}{n_*} = \frac{\phi}{i/M} \cdot \exp\left(1 - \frac{\phi}{i/M}\right). \tag{25}$$

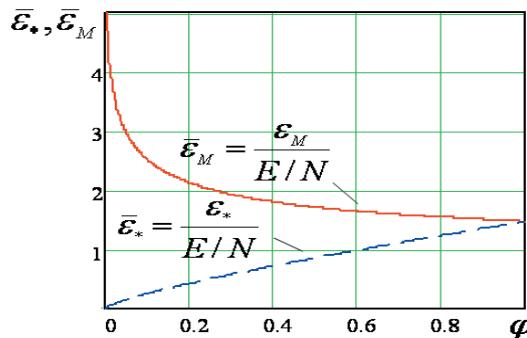


Рис. 3. Модальная  $\epsilon_*$  и максимальная  $\epsilon_M$  величина индивидуальной доли ресурса (21), (22)

Далее, используя (20), получим выражение предельно гиперболического распределения с безразмерным аргументом  $1/M$  в правой части:

$$\frac{n_i}{N} = \frac{\frac{\phi}{i/M} \cdot \exp\left(-\frac{\phi}{i/M}\right)}{\sum_{j=1}^M \frac{\phi}{j/M} \cdot \exp\left(-\frac{\phi}{j/M}\right)}. \tag{26}$$

Семейство этих кривых, зависящих от единственного безразмерного параметра  $\phi = \epsilon_* / \epsilon_M = i_* / M$ , приводится ниже (рис. 4).

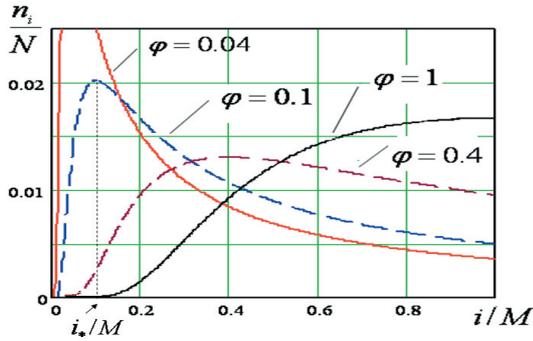


Рис. 4. Семейство кривых предельно гиперболического закона распределения (26) от безразмерного аргумента

Выражение (26) удобно использовать для общего анализа свойств самого распределения. Однако, для практического использования необходимо иметь зависимость  $n_i = f(\epsilon_i)$  от размерного аргумента. Подставляя (20) и (21) в (11), получим рабочее выражение для предельно гиперболического закона распределения, включающее количество «ресурсов»  $E$ , «потребителей»  $N$  и пока неопределенный параметр  $\phi$ ,

$$\frac{n_i}{N} = \frac{E/N}{\epsilon_i} \cdot \frac{1}{M \cdot \Phi(\phi)} \cdot \exp\left(-\frac{E/N}{\epsilon_i} \cdot \frac{F(\phi)}{\Phi(\phi)}\right) \quad (27)$$

Здесь  $F(\phi)$  и  $\Phi(\phi)$  – представлены формулами (23) и (24).

Величина  $\frac{n_i}{N} = p_i$  – вероятность заселения  $i$ -й ячейки. Разделив ее на размер самой ячейки  $\Delta\epsilon = \epsilon_M/M$ , получим с учетом (22) выражение для плотности вероятности:

$$f(\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{n_i/N}{\epsilon_M/M} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\phi}{F(\phi)} \cdot \exp\left(-\frac{E/N}{\epsilon_i} \cdot \frac{F(\phi)}{\Phi(\phi)}\right) \right) \quad (28)$$

Как следует из (28), приближение предельно гиперболического распределения к чисто гиперболическому распределению возможно в силу двух независимых тенденций. Это может произойти как при неограниченном уменьшении отношения  $E/N$  (дефицитаресурсов  $E$ , или чрезмерно большого количества претендующих на эти ресурсы «носителей»  $N$ ), так и при стремлении к нулю параметра  $\phi$ . Последний, как оказалось, является отдельной важной характеристикой системы, выступая своеобразным показателем ее зрелости.

### 5. Параметр $\phi$ как отдельная характеристика сложной системы

Неопределенность параметра  $\phi$  обусловлена неопределенностью значения  $\epsilon_M$  – наибольшей величины на шкале  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_M$  (рис. 1). Это может быть, например, энергия самого мощного турбулентного вихря, численность населения самого густонаселенного города, или уровень состояния самого богатого члена общества. Очевидно, величина  $\epsilon_M$  так же, как и сам закон распределения  $n_i = f(\epsilon_i)$ , формируются внутри сообщества не произвольно, а на основе каких-то внутренних законо-

мерностей. От значения  $\epsilon_M$  (а, значит, от параметра  $\phi$ ) существенно зависит форма кривой распределения (рис. 4).

Автору статьи не известны работы, где был бы предложен рецепт определения максимальной координаты фазового пространства  $\epsilon_M$ . В некоторых источниках его просто устремляют в бесконечность, хотя ясно, что  $\epsilon_M$  не может превышать общего объема «ресурсов» ( $\epsilon_M \leq E$ ). Очевидно, для определения  $\epsilon_M$  (а, значит, параметра  $\phi$ ) требуются некоторые дополнительные соображения. С этой целью изучим, как от параметра  $\phi$  зависит энтропия «носителей»  $H_N = -\sum_{i=1}^M \frac{n_i}{N} \cdot \ln \frac{n_i}{N}$  и энтропия «ресурсов»  $H_E = -\sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{E}$ , которые были рассмотрены в начале статьи (см. (5) и (8)).

Используя распределение (26), их можно привести к виду:

$$H_E = \frac{\sum_{i=1}^M \left[ \frac{\phi \cdot M}{i} \cdot \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{i}\right) \right]}{\sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{j}\right)} + \ln \left( \sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{j}\right) \right) \quad (29)$$

$$H_N = \frac{-\sum_{i=1}^M \left[ \frac{1}{i} \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{i}\right) \cdot \ln \left( \frac{1}{i} \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{i}\right) \right) \right]}{\sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{j} \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{j}\right) \right)} + \ln \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{j} \exp\left(-\frac{\phi \cdot M}{j}\right) \right) \quad (30)$$

Ниже (рис. 5) приведены их графики.

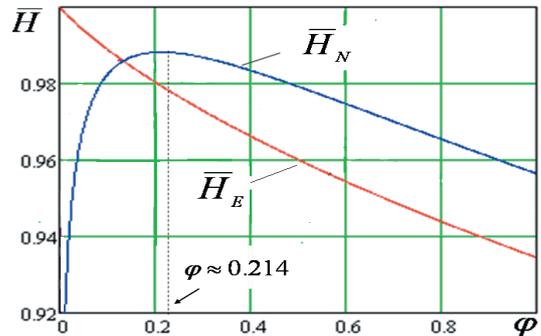


Рис. 5. Энтропия «носителей»  $\bar{H}_N$  и энтропия «ресурсов»  $\bar{H}_E$ . (Здесь  $\bar{H} = H / \ln(M)$ )

Как видно из графика (рис. 5), энтропия «ресурсов»  $H_E$  достигает наибольшего значения при  $\phi = 0$ . Именно в этом случае предельно гиперболическое распределение (27) превращается в чисто гиперболическое:

$$n_i = \frac{E}{\epsilon_i} \quad (31)$$

Однако, в случае чисто гиперболического распределения (31) подавляющая часть «носителей»  $n_i$  концентрируется вблизи минимального значения  $i/M$  (см. тенденцию на рис. 4).

Следовательно, при  $\phi = 0$  энтропия «носителей»  $H_N$  минимальна (рис. 5), что противоречит ее природному стремлению к росту.

Возникает вопрос, как указанное в начале статьи широкое распространения гиперболических распределений согласуется с тем фактом, что энтропия «носителей»  $H_N$  в этом случае близка к нулю? Ответ может быть один – *по-видимому, все эмпирические факты проявления гиперболического распределения (29) являются на самом деле проявлениями предельно гиперболического распределения (11) (или (27))*. Дело в том, что отклонение от чистой гиперболы может быть для опыта практически не заметным в случаях, когда значение параметра  $\phi$  достаточно мало (рис. 4).

Как стало ясно из вышеприведенных результатов, *распределения гиперболического типа, возникают в системах, для которых характерна высокая динамичность «ресурсов» и незначительная активность «носителей»*. Например, население (в данном случае – «ресурсы») мигрирует значительно активнее, чем населенные пункты («носители») меняют свою географию.

В качестве показателя динамичности можно использовать *время релаксации*  $\tau$  – время, в течение которого система приходит в равновесное состояние, а энтропия достигает своего максимально возможного значения. Далее обозначим:  $\tau_R$  – для «ресурсов»,  $\tau_C$  – для «носителей». Таким образом, более высокая динамичность «ресурсов» означает, что  $\tau_R < \tau_C$ .

## 6. Эволюция сложной системы

При достижении множеством «ресурсов» времени релаксации  $\tau_R$  система приобретает квазиравновесное состояние, однако, окончательное равновесие наступает значительно позже – лишь по истечению времени  $\tau_C$ . В течение периода  $\tau_R < t < \tau_C$  распределение «ресурсов» постепенно корректируется изменениями, которые производят в процессе своего движения к равновесию «носители». В течение этого времени энтропия  $H_N$  растет. Но ее рост, как видно из рис. 5, сопровождается снижением энтропии «ресурсов»  $H_E$ . Окончательное равновесие, очевидно, достигается в точке экстремума энтропии «носителей»  $H_N$  при  $\phi \approx 0.214$ .

Заметим, что на самом деле энтропия «носителей»  $H_N$  здесь уже является условной энтропией (ее можно было бы обозначить как  $H_{N/E}$ ), так как выражение (30) получено с учетом распределения (26), предварительно найденного для конкретного  $H_E$ .

Таким образом, в течение времени  $t = \tau_R$  относительно быстро устанавливается чисто гиперболическое распределение с  $\phi \approx 0$ . Далее, в период  $\tau_R \leq t \leq \tau_C$ , происходит более медленная квазистационарная эволюция объекта. При этом параметр  $\phi$  меняется в диапазоне  $0 < \phi < 0.214$ .

Очевидно, будет справедливым полагать, что системы, близкие к с чисто гиперболическому распределению (при  $\phi = 0$ ) – это молодые системы. Они достигли квазиравновесного распределения «ресурсов», но еще далеки до состояния полного равновесия из-за более медленного расселения «носителей». С увели-

чением возраста системы параметр  $\phi$  должен расти. Если данное утверждение справедливо, оно могло бы иметь практическую пользу.

Так по виду кривой распределения можно было бы получать ретроспективную оценку процессов происходившим в социальных, экологических, геологических и других сложных системах.

Оценить изменение во времени параметра  $\phi(t)$  можно следующим образом.

Вначале оценим изменение во времени энтропии  $H_N(t)$ . Для этого запишем часто используемое для оценки изменения параметров системы (температур, концентраций и др.) соотношение

$$\frac{dH(t)}{dt} \approx -\frac{1}{\tau} \cdot (H(t) - H_\infty),$$

которое имеет решение

$$H(t) \approx H_\infty \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \approx H_\infty \cdot \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2 \cdot \tau^2} + \dots\right). \quad (32)$$

Здесь  $H_\infty$  – максимальное значение энтропии,  $\tau$  – время релаксации.

Выражение (32) позволяет оценить рост энтропии  $H_E$  системы до момента достижения времени релаксации  $t = \tau_C$ .

Найти изменение во времени параметра  $\phi(t)$  можно с помощью выражения (30).

Однако эта задача может быть решена только численно, так как  $\phi(H)$  выразить в явном виде из (30) невозможно.

Подставляя далее  $\phi(t)$  в (26), можно получить семейства распределений  $\frac{n_i(t)}{N}$  для различных значений  $\phi(t)$ , а значит – для любого момента времени  $\tau_R \leq t \leq \tau_C$  (рис. 4).

## 7. Выводы

Большинство сложных, трудно формализуемых систем с большим количеством элементов могут рассматриваться как объекты, у которых на конечном множестве «носителей» распределено ограниченное множество «ресурсов». Гиперболическое распределение характерно для систем, у которых «ресурсы» более динамичны, чем «носители». То есть время релаксации у «ресурсов»  $\tau_R$  меньше, чем время релаксации у «носителей».

Применение принципа максимума энтропии позволяет получить выражения для *предельно гиперболического закона распределения* (11), который при определенных значениях его параметров может асимптотически приближаться к гиперболическому.

Эволюция сложного объекта во времени выражается в изменении его кривой распределения. Процесс эволюции выглядит как квазиравновесное движение системы к состоянию полного равновесия, когда максимума достигает не только энтропия «ресурсов»  $H_E$ , но также и энтропия «носителей»  $H_N$ . Параметр  $\phi$ , являясь отдельной важной характеристикой системы, отражает эволюцию этого процесса.

Системы, близкие к чисто гиперболическому распределению (при  $\phi \approx 0$ ) – это, скорее всего, молодые системы. Они достигли квазиравновесного распределения «ресурсов», но еще далеки до состояния полного равновесия из-за более медленного расселения «носи-

телей». С увеличением возраста системы параметр  $\phi$  растет, а кривые распределения  $p_i = f(\epsilon_i)$  изменяются так, как показано на рис. 4. Описан алгоритм определения  $p_i = f(\epsilon_i)$  для разных значений времени в диапазоне  $\tau_R \leq t \leq \tau_C$ .

---

### Литература

1. Ботвина. Л. Р., Автомодельность накопления повреждаемости [Текст] / Л. Р. Ботвина, Г. И. Баренблатт // Проблемы прочности. – 1985. – №12. – С. 17–24.
2. Голицин. Г. С., Функции распределения вероятностей для циклонов и антициклонов [Текст] / Г. С. Голицин, И. И. Мохов, М. Г. Акперов, М. Ю. Бардин // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413, №2. – С. 254–256.
3. Андерсен. К. Длинный хвост. Новая модель ведения бизнеса [Текст] : пер. с англ. – М. : Вершина, 2008. – 272 с.
4. Хайбуллов. Р. А., Ранговый анализ космических систем [Текст] / Р. А. Хайбуллов // Известия главной астрономической обсерватории в Пулкове. – 2009. – Вып.3, №219. – С. 95–104.
5. Орлов. Ю. К., Невидимая гармония [Текст] / Ю. К. Орлов // Число и мысль. – 1980. – Вып.3. – С. 70–105.
6. Гурина. Р. В., Ранговый анализ педагогических систем (ценологический подход). Методические рекомендации для работников образования. [Текст] / Р. В. Гурина. – М. : Технетика, 2006. – 40 с.
7. Никитина, Е. Ю. Применение математических методов при исследовании криминологических данных (на примере Японии). Россия и АТР [Текст] / Е. Ю. Никитина, М. А. Гузев. – 2009. №2, – С. 77–85.
8. Делас. Н.И. Негауссово распределение как свойство сложных систем, организованных по типу ценозов [Текст] / Н. И. Делас, В. А. Касьянов // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2012. – №3/4. – С. 27–32.
9. Вильсон, А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем.- М.: Наука,-1978, 248 с.
10. Делас .Н.И. Предельно гиперболический закон распределения в самоорганизованных системах [Текст] / Н.И. Делас, В.А. Касьянов // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2012. – №4/4 – С. 13–18.