

УДК 004.942

# КІНЦЕВО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІКИ ОТОЛІТА ЗАСОБАМИ ПАКЕТУ COMSOL MULTIPHYSICS

**О. В. Кондрачук**

Кандидат фізичних наук, старший науковий співробітник

Відділ теоретичної фізики  
Інститут фізики НАН України  
пр-т Науки, 46, м. Київ, Україна, 03028  
E-mail: kondr@kondr.kiev.ua

**Л. М. Бугаєва**

Кандидат технічних наук, доцент\*  
E-mail: kxtp@xtf.ntu-kpi.kiev.ua

**І. І. Бочкор\***

E-mail: igorbochkor@gmail.com

\*Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»  
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

*Засобами пакету програм COMSOL Multiphysics розглянуто поведінку кінцево-елементної моделі отолітової мембрани у випадку статичних навантажень. Отримані оцінки модулів Юнга і Пуассона отоконіального і гелевого шарів. Показано, що величини фізичних параметрів отолітового органу мають бути узгоджені між собою для правильної роботи цього біоакселерометра*

*Ключові слова: математичне моделювання, отолітова мембрана (ОМ), макулярна поверхня (МП), модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона*

*С помощью пакета программ COMSOL Multiphysics рассмотрено поведение конечно-элементной модели отолитовой мембраны в случае статических нагрузок. Получены оценки модулей Юнга и Пуассона отоконияльного и гелевого слоев. Показано, что величины физических параметров отолитового органа должны быть согласованы между собой для правильной работы этого биоакселерометра*

*Ключевые слова: математическое моделирование, отолитовая мембрана (ОМ), макулярная поверхность (МП), модуль Юнга, коэффициент Пуассона*

## 1. Вступ

Отолітовий орган відповідає за сприйняття тваринами та людьми лінійних прискорень, в тому числі і гравітації. Його функціонування визначає просторову орієнтацію і поведінку живих істот.

Математичне моделювання отолітової структури – один з методів дослідження функції отоліта та її можливих змін під впливом різних механічних умов. Цей метод особливо ефективний в тих випадках, коли прямі експериментальні вимірювання утруднені або неможливі [1].

Отоліти ссавців розташовані дзеркально-симетричними парами, відносно площини симетрії голови, і лежать в наближено перпендикулярних площинах: утрикулярний отоліт – в горизонтальній площині, сакулярний – у вертикальній.

Дана стаття присвячена моделюванню властивостей утрикулярного отоліта ссавців, який може бути спрощено описаний як тонка м'яка пластинка змінної товщини і щільності (отолітова мембрана-ОМ), що лежить на злегка викривленій тривимірній епітеліальній поверхні (макулі), де розташовані пучки рецепторних волоскових клітин (ПВК). Зовнішня поверхня ОМ межує з ендолімфою (рис. 1). Під дією інерціального прискорення або гравітації верхній, більш щільний, отоконіальний шар ОМ зміщується відносно макули. Це призводить до виникнення зсувних сил в об'ємі

отолітової мембрани, які викликають деформацію рецепторних волоскових клітин, розташованих на макулярній поверхні (МП), що моделює нервову активність відповідних аферентів.

## 2. Моделювання ОМ

Розглянемо поведінку ОМ у випадках статичних навантажень (гравітація та зміна тиску в навколишній ендолімфі), використовуючи спрощену аналітичну та комп'ютерну моделі отоліта.

Для аналітичного опису механіки отоліта будемо вважати, що ОМ можна наближено описати як тонку протяжну пластину постійної товщини, що складається з двох однорідних шарів: нижнього, гелеподібного, та верхнього, отоконіального, шарів, що відрізняються товщиною  $H$  і механічними властивостями: густиною  $\rho$ , модулями Юнга  $E$ , коефіцієнтами Пуассона  $\sigma$  і в'язкості  $\nu$ ).

Будемо також вважати, що вязкопружні властивості ОМ описуються узагальненою моделлю Максвелла, яка для спрощеної одношарової моделі отоліта має наступний вигляд:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{\partial^2 U_x}{\partial Z^2} + \nu \frac{\partial^3 U_x}{\partial t \cdot \partial Z^2} + \Delta p A_0 a(t), \quad (1)$$

де  $U_x$  – визначає x-компоненту зміщення  $U$  на відстані  $Z$  від макулярної поверхні в момент часу  $t$ ;  $\Delta\rho = \rho_o - \rho_E$  різниця густин ОМ і ендолімфи,  $A_0$  – амплітуда інерційного прискорення.

Граничні умови для двошарової моделі при  $z = 0$ :

$$z = H_U + H_L, z = 0: U_{x_1}(z=0) = 0; \frac{dU_{x_1}}{dz} = 0. \quad (2)$$

На границі двох шарів ( $z = H_U$ ) передбачається неперервність зміщень і деформацій:

$$z = H_U: U_{x_1}(z = H_U) = U_{x_2}(z = H_U); \frac{dU_{x_1}}{dz} = \frac{dU_{x_2}}{dz}. \quad (3)$$

Тут  $U_{x_1}(z), U_{x_2}(z)$  відповідно визначають x-компоненти зміщень гелеобразного і отоконіального шарів на відстані  $z$  від макулярної поверхні,  $H_U$  та  $H_L$  – товщина цих шарів.

Модель, яка описується рівняннями (1-3), допускає точне рішення, але сама є наближеною. Для перевірки зроблених наближень за допомогою методу скінченних елементів (інженерний пакет COMSOL Multiphysics) була розроблена трьохвимірна комп'ютерна модель утрикулярного отоліта [2, 3].

Комп'ютерна модель дозволяє детально досліджувати просторовий розподіл деформацій і зміщень, що виникають в об'ємі тривимірної ОМ під дією статичних навантажень, зокрема, сили тяжіння і зміни ендолімфатичного тиску.

Дані розподілу, що залежать від особливостей тривимірної структури ОМ, не могли бути проаналізовані в аналітичному вигляді.

### 3. Цілі і задачі дослідження

Основними цілями кінцево-елементного моделювання статичних навантажень отоліта були:

1) оцінка величин невідомих механічних параметрів ОМ, які визначають роботу отоліта: модулів Юнга і коефіцієнтів Пуассона різних шарів ОМ;

2) перевірка обґрунтованості наближень аналітичної моделі.

### 4. Результати моделювання статичних навантажень

Першим завданням моделювання була оцінка модуля Юнга в спрощеній двошаровій моделі ОМ (рис. 3, 5) шляхом порівняння величин зміщень в нижньому, гелеподібному шарі ОМ, який прилягає до макулярної площини, з відомими з експерименту значеннями зсувів ПВК, які відповідають лінійній ділянці їх робочих характеристик. Згідно [4] ці зміщення при висоті ПВК порядку 6-10 мікрон складають 0,1-1 мкм.

Припускалося, що такі зміщення можуть бути отримані під дією сили тяжіння при прискоренні гравітації  $G$ , направленої паралельно МП. На рис. 4, 5 показані залежності зміщень ОМ від відстані до макулярної площини для різних значень модуля Юнга гелеподібного шару ОМ, отримані при комп'ютерному моделюванні двошарової моделі ОМ.

Як впливає з моделі, зміщення ОМ на відстанях, порядку висоти ПВК досягають 1 мкм, якщо величина модуля Юнга гелеподібного шару  $E_g$  лежить в межах  $1-10 \frac{H}{M^2}$ . Оскільки отоконіальний шар, згідно морфологічному опису [5] має більш високий модуль Юнга  $E_o$ , практично вся зсувна деформація ОМ відбувається в гелевидному шарі, прилеглому до макулярної поверхні [6]. Як показало моделювання для цього необхідно щоб  $E_o > 10 \cdot E_g$ .

При цьому виявилось, що розподіл зсувів в даному шарі є нелінійною функцією відстані до цієї поверхні (рис. 2).

Другим завданням моделювання була перевірка справедливості оцінок, заснованих на аналітичній моделі ОМ

Рішення аналітичної моделі (1-3) в статичному випадку розглядалося у випадку двошарової моделі структури отолітової мембрани, яка складається з верхнього, отоконіального, більш щільного шару товщиною  $H_o$  і нижнього, гелеподібного, шару товщиною  $H_g$ . Залежність зміщень отоліта в цих шарах, як функція відстані  $Z$  до МП мають вигляд:

$$0 < z < H_b$$

$$U_{xg}(z) = [(1 + \sigma_g) \cdot \frac{G_x}{E_g}] \cdot [2 \cdot (\rho_o \cdot H_o + \rho_g \cdot H_g)z - \rho_g \cdot z^2] \quad (4)$$

$$H_g < z < H_o + H_g,$$

$$U_{xo}(z) = [G_x(1 + \sigma_o) \cdot \frac{\rho_o}{E_o}] \cdot [2 \cdot (H_b + H_o)z - z^2] + G_x \cdot H_g^2 \cdot [\frac{\rho_g \cdot (1 + \sigma_g)}{E_g} - \frac{\rho_o(1 + \sigma_o)}{E_o}] + 2G_x \rho_o H_o H_g [\frac{1 + \sigma_g}{E_g} - \frac{1 + \sigma_o}{E_o}], \quad (5)$$

де  $U_{xg}(z)$ ,  $U_{xo}(z)$  позначають x-компоненти зміщень гелеподібного і отоконіального шарів відповідно на відстані  $z$  від макулярної поверхні,  $\rho_o$  та  $\rho_g$  – густини цих шарів,  $E_o$  та  $E_g$  – модулі Юнга,  $\sigma_o$  та  $\sigma_g$  – коефіцієнти Пуассона.

Результати розрахунків зміщень ОМ за допомогою кінцево-елементної моделі двошарової структури ОМ при напрямку прискорення гравітації  $G$  паралельного та перпендикулярного МП, показано на рис. 6, 11.

Отримані дані показали, що локальні зміщення ОМ поблизу МП можуть бути непаралельні макулярній поверхні і їх напрямки можуть не співпадати з напрямком інерційного прискорення. При цій невідповідності функціонування отолітового органу втрачає сенс.

Ця проблема була вирішена природою наступним чином. Згідно з результатами комп'ютерного моделювання і формулами (4-5) найбільше зміщення має місце в тому шарі ОМ, який має найменший модуль Юнга, і відмінність у зміщеннях шарів при даному інерційному прискоренні тим вище, чим більше розходження в їх модулях Юнга.

Таким чином, якщо модуль Юнга найнижчого гелеподібного шару, що примикає до макулярної поверхні (так званий "супрамакулярний" шар [6]) буде істотно нижче модуля Юнга вище розміщеного геле-

подібного шару, то практично весь зсув ОМ буде відбуватися саме в супрамакулярному шарі. При цьому матиме місце не тільки найбільш ефективна передача зміщення ОМ на рівень ПВК, але і напрямки векторів зміщення супрамакулярного шару в цьому випадку буде практично паралельним МП, а їх амплітуда буде в основному залежати від проекції прискорення на МП. Необхідно відзначити, що на припущенні про паралельність векторів зміщення ПВК макулярної поверхні був заснований аналіз орієнтаційної залежності аферентної імпульсації в класичній роботі [7].

Зважаючи на свою важливість, питання про розподіл напрямків векторів зміщень супрамакулярного шару відносно МП і вектора прискорень вимагає спеціальної експериментальної перевірки і подальшого теоретичного вивчення.

Важливим являється також наступний результат даної задачі. Згідно (4, 5), в тому випадку, коли структура отоліта може бути наближено описана як тонка пластинка, зміщення супрамакулярного шару і, таким чином, зміщення рецепторних клітин під дією інерційних сил визначається не масою всього отоліта, а відношенням тиску, який утворюється вагою отоліта на макулярну поверхню, до модуля Юнга більш м'якого гелеподібного шару ОМ, що примикає до епітеліальної поверхні:  $G(\rho_o - \rho_g) \cdot H_o / E_g$ , де  $G$  – прискорення гравітації.

Важливим фізичним параметром ОМ, що впливає на величини і характер деформацій отоліта, який викликається зміною ендолімфатичного тиску, є коефіцієнт Пуассона (рис. 7, 9, 10). Згідно з експериментальними даними [8, 9] зміна положення тіла щодо вектора гравітації від 0 до 30 градусів приводить до зміни ендолімфатичного тиску порядку 3-4 см водяного стовпа (в.с.).

Комп'ютерна модель отоліта була використана для аналізу впливу величини коефіцієнта Пуассона речовини ОМ на зміщення гелеподібного шару поблизу макули [10].

Необхідно відзначити, що вплив зміни тиску ендолімфи на зміщення ОМ визначається двома причинами: деформацією ОМ, пов'язаною зі зміною форми отоліта без зміни об'єму (якщо ОМ розглядається як нестисливе тіло з коефіцієнтом Пуассона рівним 0.5), і деформацією ОМ, пов'язаною зі зміною об'єму (стисливістю речовини ОМ) і залежить від величини коефіцієнта Пуассона.

Результати досліджень показують, що навіть незначні відмінності коефіцієнта Пуассона від значення 0.5 можуть призводити до зсувів ОМ, які перевищують порогові. Враховуючи відмінності в структурах і властивостях речовин, що складають отоліт можна припускати і відмінність у величинах відповідних коефіцієнтів Пуассона.

Це може істотно впливати на форму і поведінку ОМ (рис. 12, 13).

Важливість цього результату додає той факт, що зміна ендолімфатичного тиску або порушення механізмів його регуляції може бути обумовлено різноманітними, в тому числі клінічними причинами і факт можливого зв'язку між динамікою цього тиску і станом отолітового органу може мати значення для практичної медицини.

5. Візуалізація розрахунків

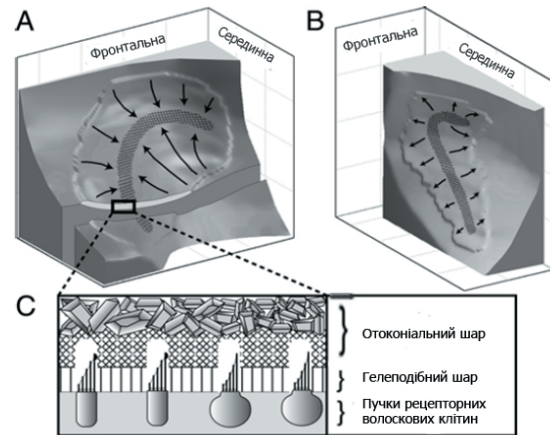


Рис. 1. Вигляд отолітового органу людини [3]

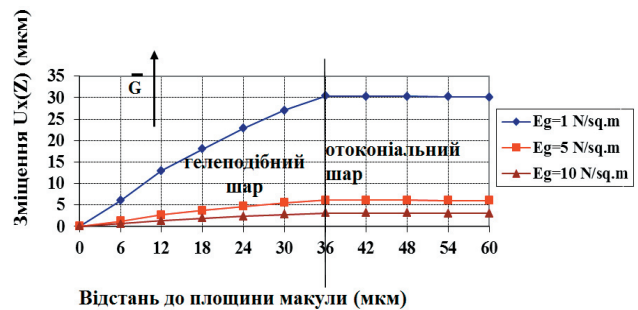


Рис. 2. Залежність зміщення ОМ від відстані Z до площини макули для різних значень модуля Юнга гелеподібного шару ( $E_o = 50 \text{ N/m}^2$ )

Поведінка отоліта при закріпленій поверхні нижнього шару для різних типів статичних навантажень: Сила тяжіння напрямлена по осі -x

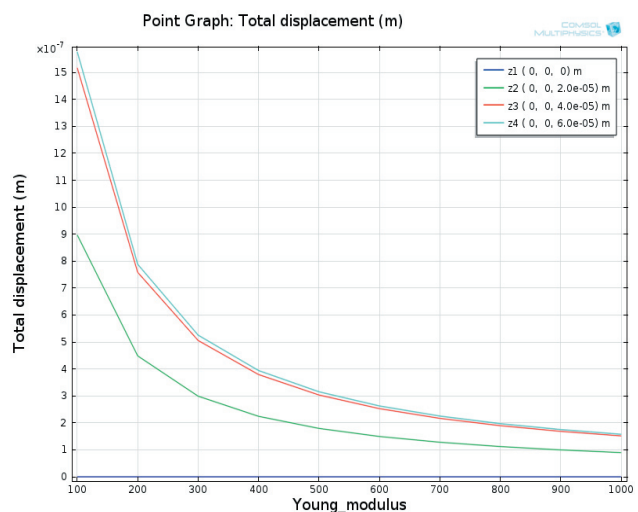


Рис. 3. Залежність зміщення отоліта від модуля Юнга верхнього шару  $E_o$  при модулі Юнга нижнього шару  $E_g$ , що дорівнює  $E_o/10$ , для чотирьох точок, які розміщені в центрі диску

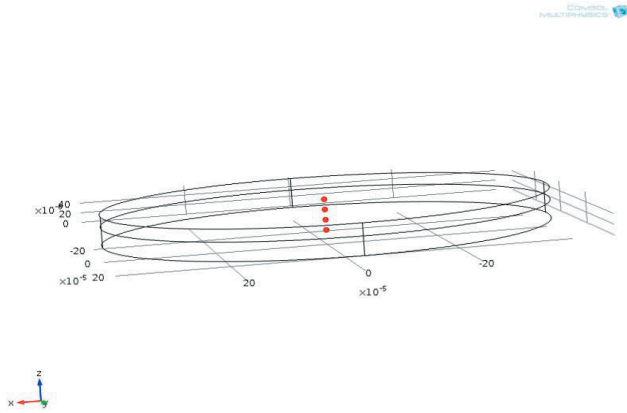


Рис. 4. Положення точок, які використовувалися для дослідження: z1 (0; 0; 0), z2 (0; 0; 20 · 10<sup>-6</sup>), z3 (0; 0; 40 · 10<sup>-6</sup>), z4 (0; 0; 60 · 10<sup>-6</sup>)  
Сила тяжіння напрямлена по осі -y

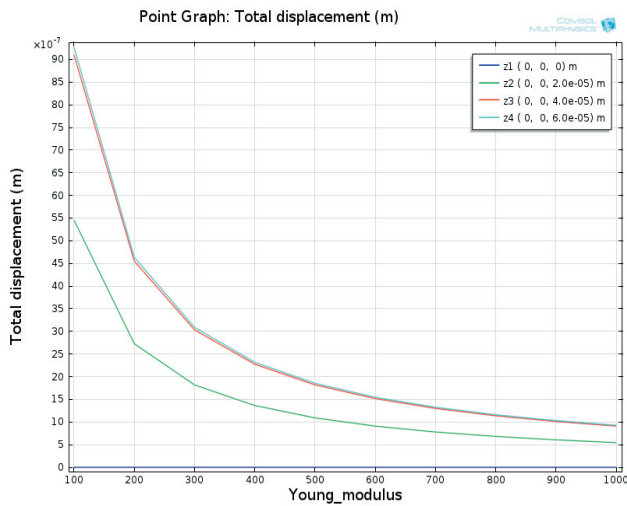


Рис. 5. Залежність зміщення отоліта від модуля Юнга верхнього шару  $E_o$  при модулі Юнга нижнього шару  $E_g$ , що дорівнює  $E_o/10$ , для чотирьох точок, які розміщені в центрі диска

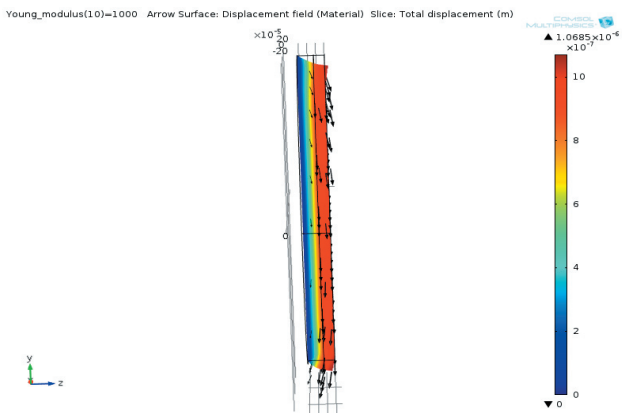


Рис. 6. Розподіл зміщень отоліта для модуля Юнга верхнього шару  $E_o = 100 \frac{H}{M^2}$ , при модулі Юнга нижнього шару  $E_g = 10 \frac{H}{M^2}$  (стрілками показано напрями зміщення). Прискорення  $G$  паралельне осі -Y

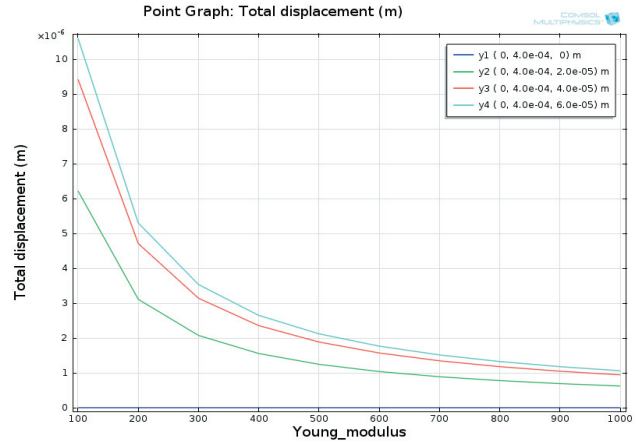


Рис. 7. Залежність зміщення отоліта від модуля Юнга верхнього шару  $E_o$  при модулі Юнга нижнього шару  $E_g$ , що дорівнює  $E_o/10$ , для чотирьох точок, які розміщені на краю диска (коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,35$ )

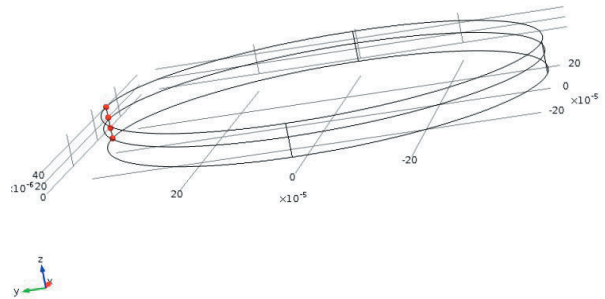


Рис. 8. Положення точок, які використовувалися для дослідження: y1 (0; 400 · 10<sup>-6</sup>, 0), y2 (0; 400 · 10<sup>-6</sup>; 20 · 10<sup>-6</sup>), y3 (0; 400 · 10<sup>-6</sup>; 40 · 10<sup>-6</sup>), y4 (0; 400 · 10<sup>-6</sup>; 60 · 10<sup>-6</sup>),

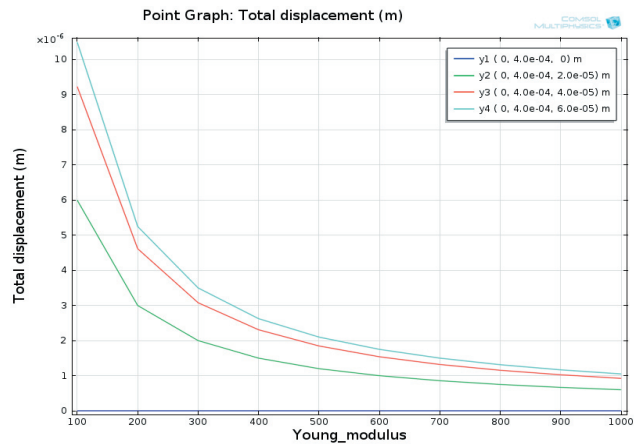


Рис. 9. Залежність зміщення отоліта від модуля Юнга верхнього шару  $E_o$  при модулі Юнга нижнього шару  $E_g$ , що дорівнює  $E_o/10$ , для чотирьох точок, які розміщені на краю диска (коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$ )



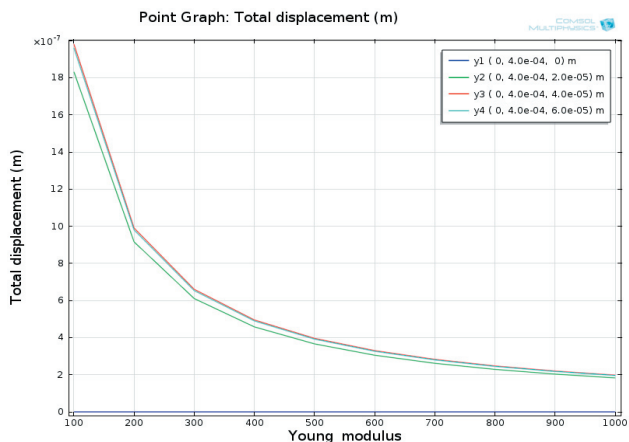


Рис. 10. Залежність зміщення отоліта від модуля Юнга верхнього шару  $E_o$ , при модулі Юнга нижнього шару  $E_g$ , що дорівнює  $E_o$ , для чотирьох точок, які розміщені на краю диска (коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,45$ )

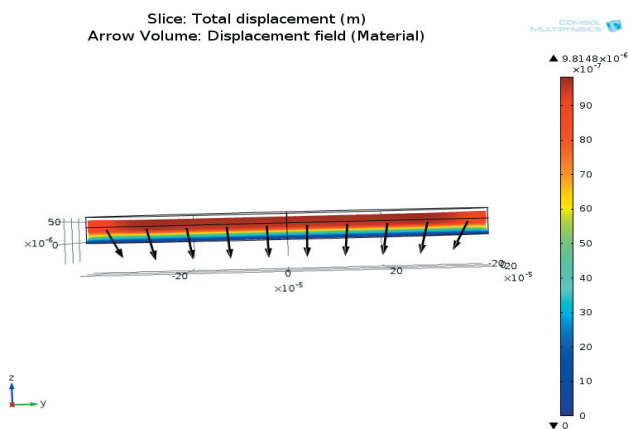


Рис. 11. Розподіл зміщень отоліта для модуля Юнга верхнього шару  $E_o = 100 \text{ Н/М}^2$ , при модулі Юнга нижнього шару  $E_g = 10 \text{ Н/М}^2$  при тиску на всю поверхню отоліта  $P = 10 \text{ Па}$  (стрілками показано напрями зміщення). Прискорення  $G$  паралельне вісі  $-Z$

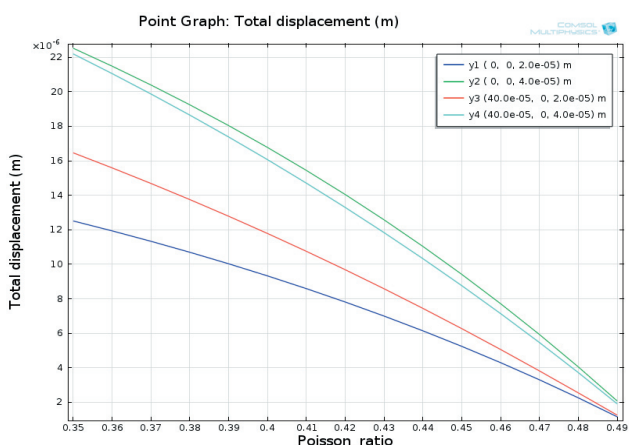


Рис. 12. Залежність зміщення отоліта від коефіцієнта Пуассона для модуля Юнга верхнього шару  $E_o = 1000 \text{ Па}$  при модулі Юнга нижнього шару  $E_g = 10 \text{ Па}$  при тиску на всю поверхню отоліта  $P = 10 \text{ Па}$

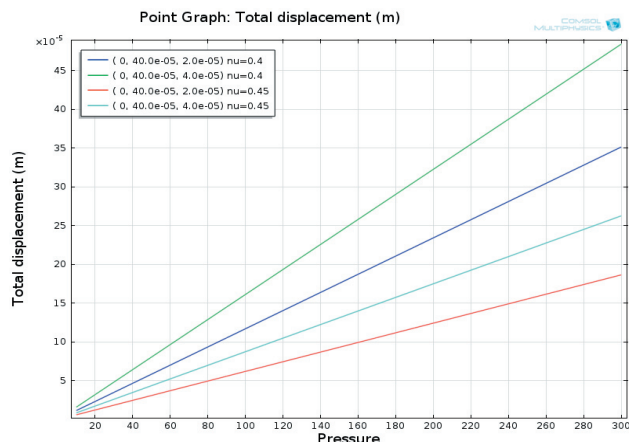


Рис. 13. Залежність зміщення отоліта від тиску (Па) на всю поверхню для різних значень коефіцієнта Пуассона для двох точок: в центрі та на периферії отоліта при його горизонтальному положенні

## 6. Висновки

Шляхом співставлення результатів кінцево-елементного та аналітичного моделювання з відомими експериментальними даними отримані оцінки модулів Юнга та Пуассона отоконіального та гелевого шарів отолітової мембрани.

Показано, що величини фізичних параметрів отолітового органу мають бути узгоджені між собою для правильної роботи цього біоакселерометра: модуль Юнга гелевого шару повинен бути достатньо низьким, щоб адекватно трансформувати інерційне прискорення отоліта в зміщення рецепторних клітин на макулярній поверхні, але й достатньо високим, щоб завадити падінню отоконіального шару на цю поверхню.

Знайдено, що на отолітовий орган завдяки надзвичайній чутливості рецепторних клітин можуть впливати навіть слабкі зміни тиску в ендолімфі, що має місце у звичайних умовах. При цьому деформація отолітової мембрани суттєво збільшується при коефіцієнті Пуассона меншого за 0.5. Важливо, що такі деформації не відповідають жодному інерційному прискоренню отоліта.

## Література

1. Шипов, А.А. Биомеханика вестибулярного аппарата [Текст] : учеб, пособие / А.А. Шипов, А.В. Кондрачук, С.П. Сиренко. – Москва : Слово/SLOVO, 1997. – 200 с.
2. Kondrachuk, A.V. Modeling of the otolith structure behavior under static loads (inertial forces and endolymphatic pressure) [Текст] : Abstracts of the Twentieth Annual Midwinter Meeting, Association for Research in Otolaryngology (1997)/ A.V. Kondrachuk, M.D. Ross. – San Petersburg, Florida, USA, 154.
3. Kondrachuk, A.V. The 3-D model of otolith structure under static loads [Текст]: Abstracts of the Twelfth American Society for Gravitational and Space Biology (1996)/ A.V. Kondrachuk, M.D. Ross. – Charlotte, NC, USA, 36.

4. Hudspeth, J. Sensitivity, polarity, and conductance change in the response of vertebrate hair cells to controlled mechanical stimuli [Текст]/ J. Hudspeth, D.P. Corey. – Proc.Natl.Acad.Sci.USA, 74:2407-2411.
5. Lindeman, H.M. Studies on the morphology of the sensory organs of the vestibular apparatus [Текст]/ H.M. Lindeman. – Ergebn. Anat. Entw. Gesch 1969; 42:1-113.
6. Ross, M.D. The suprastructure of the saccular macula [Текст]/ M.D. Ross, T.E. Komorovski, K.M. Donovan, K.G. Pote. – Acta Otolaryng. (Stockh.), 103: 56-63.
7. Fernandez, C.Z. Physiology of peripheral neurons innervating otolith organs of the squirrel monkey. III. Response dynamics [Текст]/ C.Z. Fernandez, J.M. Goldberg. – Neurophysiol., 39:985-996.
8. Parker, D.E. Physiological and behavioral effects of title-induced body fluid shifts, Aviat., Space and Env [Текст]/ D.E. Parker. – Med 1983.54:402-409.
9. Benser, M.E. Hair-bundle stiffness dominates the elastic reactance to otolithic-membrane shear [Текст]/ M.E. Benser, N.P. Issa, A.J. Hudspeth. – Hearing Res.,68:243-252.
10. Vries, H.D. The mechanics of the labyrinth otoliths [Текст]/ H.D. Vries – Acta-Oto-Laryng., (Stockh.), 38:262-273.

УДК 66.066

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВИБРОУДАРНОГО ОБЕЗВОЖИВАНИЯ ВЛАЖНЫХ ДИСПЕРСНЫХ ПИЩЕВЫХ ОТХОДОВ

**И. В. Севостьянов**

Кандидат технических наук

Кафедра металлорежущих станков и оборудования  
автоматизированного производства

Винницкий национальный технический университет  
ул. Хмельницкое шоссе, 95, г. Винница, Украина,

21021

E-mail: ivansev70@mail.ru

*У статті приводяться схема експериментального стенда з гідроімпульсним приводом для віброударного зневоднення вологих дисперсних харчових відходів. Представлено графіки отриманих за допомогою стенда експериментальних залежностей, згідно із якими запропонований спосіб і обладнання забезпечують нижчу у порівнянні з відомими механічними способами зневоднення кінцеву вологість відходів – 20 – 25%*

*Ключові слова: віброударне зневоднення, вологі дисперсні харчові відходи, гідроімпульсний привод*

*В статье приводятся схема экспериментального стенда с гидроимпульсным приводом для виброударного обезвоживания влажных дисперсных пищевых отходов. Представлены графики полученных с помощью стенда экспериментальных зависимостей, в соответствии с которыми предлагаемый способ и оборудование обеспечивают более низкую по сравнению с известными механическими способами обезвоживания конечную влажность отходов – 20 – 25%*

*Ключевые слова: виброударное обезвоживание, влажные дисперсные пищевые отходы, гидроимпульсный привод*

## 1. Введение

Серьезной проблемой ряда отечественных предприятий пищевой промышленности является проблема утилизации их отходов, в том числе, спиртовой барды, пивной дробины, свекловичного жома, кофейного и ячменного шлама, которые относятся к влажным дисперсным материалам. В большинстве случаев данные отходы выливаются на грунт, что приводит к загрязнению окружающей среды, кроме того, часто требует затрат на их транспортировку. Более рационально

осуществлять обезвоживание отходов до влажности 20 – 25%, что позволяет использовать их твердую фазу в качестве ценной добавки к сельскохозяйственным кормам либо как топливо. Жидкая фаза отходов (вода) после достаточно качественной очистки может быть возвращена в природу без негативных последствий для нее или повторно использоваться на производстве. Таким образом, задача разработки высокоэффективных способов и оборудования для обезвоживания влажных дисперсных пищевых отходов является достаточно актуальной.