

УДК 539.3:004.94

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Д. Н. Колесник

Ассистент

Кафедра высшей и прикладной математики*

E-mail: mylogin2006@rambler.ru

А. Д. Шамровский

Доктор технических наук, профессор

Кафедра программного обеспечения

автоматизированных систем*

E-mail: adshamr@rambler.ru

*Запорожская государственная инженерная

академия

пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина,

69006

В цій роботі розглядається можливість застосування дискретної ґратчастої моделі, розробленої авторами для розв'язання задачі згинання консольної балки рівномірно розподіленим навантаженням. Розглянуто геометрично нелінійний варіант цієї задачі, як з постійно направленим навантаженням, так і з сліджущим навантаженням. Отримані безрозмірні результати переміщень кінця балки приведено в табличному вигляді. Результати розв'язку задачі порівняно з результатами, отриманими іншими авторами

Ключові слова: консольна балка, розподілене навантаження, великі переміщення, дискретна модель, ґратчаста модель

В данной работе рассматривается возможность применения дискретной решетчатой модели, разработанной авторами для решения задачи изгиба консольной балки равномерно распределенной нагрузкой. Рассматривается геометрически нелинейный вариант данной задачи, как с постоянно направленной нагрузкой, так и со следящей нагрузкой. Полученные безразмерные перемещения конца балки приведены в табличном виде. Результаты решения задачи сравниваются с результатами, полученными другими авторами

Ключевые слова: консольная балка, распределенная нагрузка, большие перемещения, дискретная модель, решетчатая модель

1. Введение

Повсеместное распространение материалов обладающих высокими прочностными характеристиками, а также гибкостью, позволяющей при больших нагрузках сохранять упругие свойства, требует соответствующего математического аппарата для расчета конструкций из этих материалов.

Основной частью такого математического аппарата являются используемые математические модели, которые могут быть как непрерывными [1], так и дискретными [2].

Разработка таких моделей представляет значительный интерес, при этом в последнее время значительное внимание уделяется построению именно дискретных моделей [3-5]. В том числе авторами данной работы была представлена дискретная модель сплошной среды [6], основанная на решетчатой аналогии и позволяющая решать геометрически нелинейные задачи. При этом, независимо от используемого подхода, для полученных моделей требуется численная проверка их достоверности. Для этой проверки зачастую используют задачи из моделируемой области, для которых существует общепризнанное решение, зачастую полученное аналитически.

В частности, для геометрически нелинейных задач, в которых требуется учет больших перемещений, такой задачей является задача об изгибе консольной балки равномерно распределенной силой [7-11]. Аналитическое решение данной задачи представлено Холденом [12].

2. Постановка задачи

В данной работе предлагается решить задачу о нагрузке консольной балки равномерно распределенной силой с помощью дискретной модели сплошной среды [6], позволяющей решать геометрически нелинейные задачи.

Рассматриваются два случая нагружения: под действием сил гравитации, когда направление нагрузки постоянно; под действием равномерной нагрузки сохраняющей прямой угол к нормали балки, следящей нагрузке.

Классическое уравнение изгиба балки, даваемое балочной теорией [13], выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{ds}, \quad (1)$$

где s - координата нейтральной оси балки;

θ - угол между нормалью к нейтральной оси балки и осью x ;

E - модуль упругости материала балки;

I - момент инерции поперечного сечения;

M - величина изгибающего момента.

Уравнение (1) является геометрически линейным, его нелинейный вариант для случая равномерно распределенной нагрузки направленной вертикальной вниз выглядит следующим образом [11]:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{q}{EI} \cos\theta, \quad (2)$$

где q - интенсивность распределенной нагрузки.

Графически, задача изгиба консольной балки равномерно распределенной нагрузкой, направленной вертикально вниз, представлена на рис. 1.

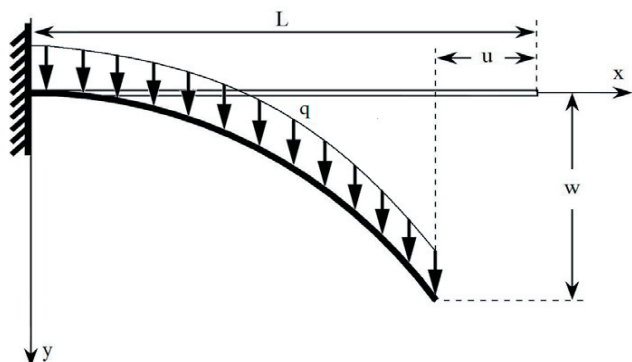


Рис. 1. Консольная балка под действием равномерно распределенной нагрузки с учетом больших перемещений

В случае, когда на балку действует следящая распределенная нагрузка (рис. 2).

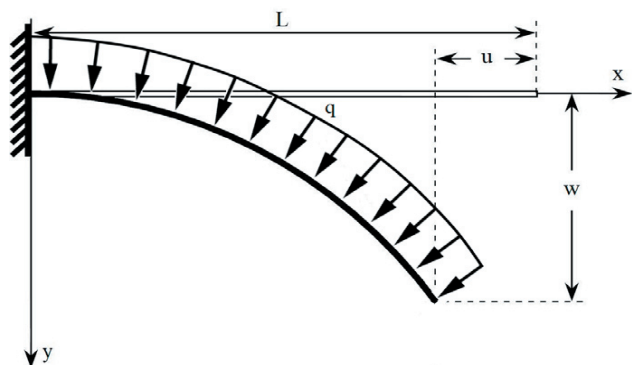


Рис. 2. Консольная балка под действием равномерно распределенной следящей нагрузки с учетом больших перемещений

Уравнение (2) примет следующий вид [11]:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{qs}{EI}, \tag{3}$$

В безразмерном виде уравнения (2) и (3) примут вид (4) и (5) [11].

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} = -k\bar{s} \cos\theta, \tag{4}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} = -k\bar{s}, \tag{5}$$

где $\bar{s} = s/L$, а $k = qL^3/EI$.

Данные уравнения могут быть решены как аналитически [12–13], так и численно [14].

3. Метод решения

Для решения данной задачи с помощью предложенного дискретного подхода [6] необходимо вначале

построить ее дискретную модель. В качестве основы для дискретной модели воспользуемся подходом предложенным Бате в работе [10] для конечно элементной модели. На рис. 3 представлена дискретная модель балки из пяти элементов.

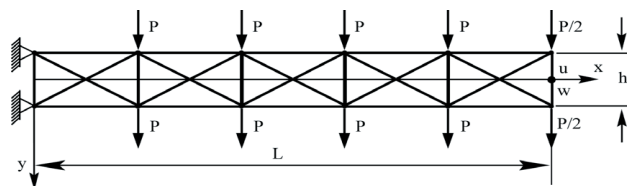


Рис. 3. Дискретная модель консольной балки с равномерно распределенной нагрузкой

Как можно видеть, равномерно распределенная нагрузка q разбита на две части, действующие на верхнюю и нижнюю грани дискретной модели. Каждая из этих частей, в свою очередь, разбита на сосредоточенные силы, которые действуют в узлах элементов. Таким образом, $P = qL/2N$, где N - число используемых элементов.

Модуль упругости материала возьмем равным 0,2. Ширину балки возьмем равной единице; таким образом, получим момент инерции $I = 1/12$. Значение коэффициента γ , используемого в методе последовательных перемещений, возьмем равным 0,1. Точность вычислений зададим равной $10e-7$.

Число используемых элементов - N , интенсивность приложенной нагрузки - q , а так же длину балки - L , будем варьировать. Результаты приведем к безразмерному виду следующим образом: $\xi = w/L$, $\eta = (L - u)/L$.

4. Полученные результаты. Постоянно направленная нагрузка

Используя указанные ранее параметры, для балки длиной 10 м. ($L = 10$ м.) моделируемой четырьмя элементами ($N = 4$) и десятью элементами ($N = 10$) получим результаты, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчета методом последовательных перемещений дискретной модели консольной балки

k	N=4, L=10 м.		N=10, L=10 м.	
	ξ	η	ξ	η
0,0	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
1,2	0,1478	0,9877	0,1463	0,9878
2,4	0,2845	0,9535	0,2813	0,9542
3,6	0,4017	0,9047	0,3950	0,9073
4,8	0,4977	0,8492	0,4868	0,8550
6,0	0,5745	0,7924	0,5594	0,8026
7,2	0,6356	0,7376	0,6168	0,7530
8,4	0,6844	0,6865	0,6626	0,7071
9,6	0,7236	0,6396	0,6994	0,6654
10,8	0,7554	0,5970	0,7293	0,6277
12,0	0,7816	0,5584	0,7539	0,5938

Графически деформация балки, в безразмерной форме для десяти элементов, представлена на рис. 4.

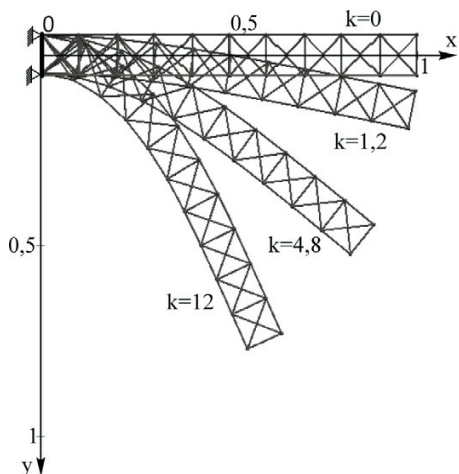


Рис. 4. Формы изгиба консольной балки для разных величин k , в безразмерном виде

Если графически отобразить зависимость величины безразмерных перемещений ξ и η от величины безразмерной нагрузки k , то можно построить график зависимости изображенный на рис. 5.

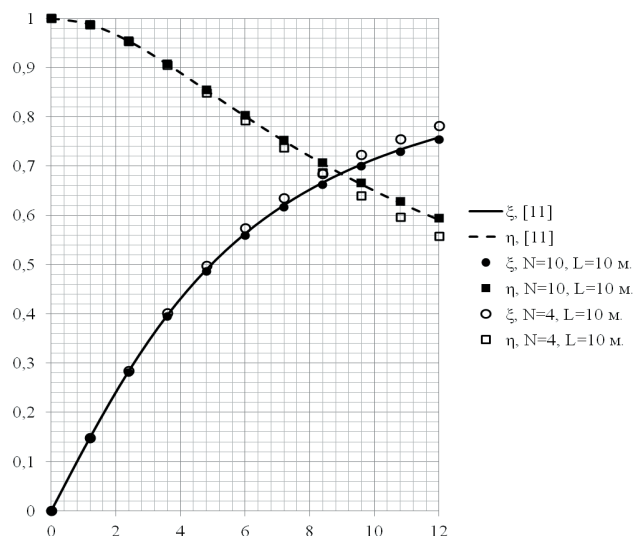


Рис. 5. График зависимости перемещений конца консольной балки от интенсивности распределенной нагрузки

На данном графике так же приведены результаты, представленные в работе [11], так же соответствующие результатам полученным аналитически [12]. Как можно видеть, для модели, состоящей из десяти элементов, они совпадают.

5. Полученные результаты. Следящая нагрузка

Для более сложного случая изгиба консольной балки следящей, равномерно распределенной нагрузкой, дискретная модель идентична случаю с фиксированной силой (рис. 2). Отличие заключается лишь в том,

что на каждой итерации алгоритма последовательных перемещений происходит изменение направления сосредоточенных сил таким образом, что бы они оставались параллельны тем граням дискретных элементов, к которым приложены (рис. 6).

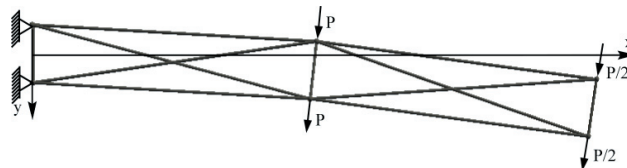


Рис. 6. Дискретная модель консольной балки под действием равномерно распределенной нагрузки

Проведя расчет методом последовательных перемещений с использованием тех же параметров модели, что и в предыдущем случае, для $N = 10$ и $L = 10$ м, получим результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета методом последовательных перемещений дискретной модели консольной балки при $L = 10$ м, $N = 10$.

k	ξ	η	k	ξ	η
0,0	0,0000	1,0000	12,0	0,8516	0,1533
1,2	0,1479	0,9875	13,2	0,8401	0,0524
2,4	0,2927	0,9498	14,4	0,8165	-0,0391
3,6	0,4268	0,8891	15,6	0,7836	-0,1203
4,8	0,5459	0,8087	16,8	0,7439	-0,1908
6,0	0,6470	0,7125	18,0	0,6995	-0,2507
7,2	0,7282	0,6050	19,2	0,6524	-0,3007
8,4	0,7884	0,4912	20,4	0,6042	-0,3414
9,6	0,8280	0,3755	21,6	0,5561	-0,3735
10,8	0,8484	0,2618	22,8	0,5093	-0,3982

Графически полученные результаты перемещений представлены на рис. 7.

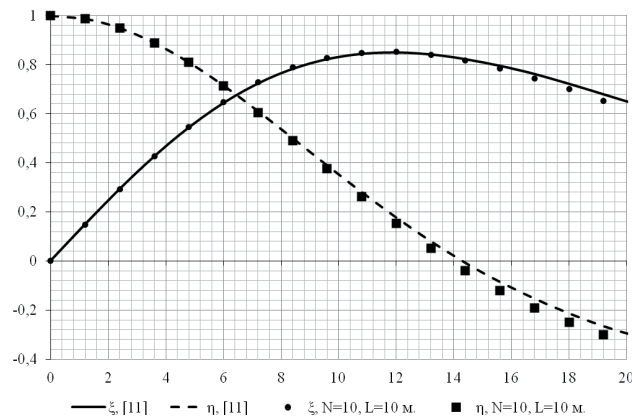


Рис. 7. График зависимости перемещений конца консольной балки от интенсивности следящей распределенной нагрузки

На данном графике так же представлены результаты, полученные в работе [11]. Как можно видеть

результаты, работы разных методов, являются достаточно близкими.

Соответствующие данному случаю нагрузки формы изгиба балки, приведенные к безразмерному виду, изображены на рис. 8-9.

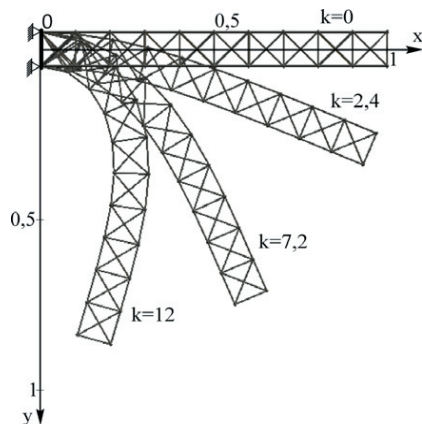


Рис. 8. Формы изгиба консольной балки для разных k , в безразмерном виде

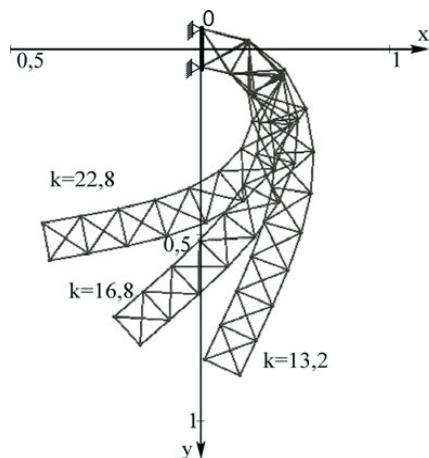


Рис. 9. Формы изгиба консольной балки для разных k , в безразмерном виде

6. Выводы

Получаемые с помощью предложенной дискретной модели [6] результаты качественно и количественно близки к результатам, получаемым другими методами.

Дискретная модель [6], с учетом приведенных в статье уточнений, годится для расчета геометрически нелинейных задач допускающих упрощения балочной теории. При этом решение находится на основании зависимостей теории упругости.

Литература

1. Fertis, D. G. Nonlinear structural engineering. With unique theories and methods to solve effectively complex nonlinear problems [Текст] / D. G. Fertis. - Springer, 2006. - 339 p. - ISBN: 978-3-540-32975-6.
2. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Second Edition [Текст] / R. de Borst, M. A. Crisfield,

J.J. C. Remmers, C. V. Verhoosel. - 2nd ed. - L: John Wiley & Sons, Ltd., 2012. - 540 p. - ISBN: 978-0-470-66644-9.

3. Munjiza, A. The combined finite-discrete element method [Текст] / A. Munjiza. - John Wiley & Sons, Ltd., 2004. - 352 p. - ISBN: 978-0-470-84199-0.
4. Dang, H. K. An efficient finite-discrete element method for quasi-static nonlinear soil-structure interaction problems [Текст] / H. K. Dang, M. A. Meguid. // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. - 2013. - Vol. 37, Issue 2. - Pp. 130-149. - doi: 10.1002/nag.1089.
5. Tran, V. D. H. A finite-discrete element framework for the 3D modeling of geogrid-soil interaction under pullout loading conditions [Текст] / V. D. H. Tran, M. A. Meguid, L. E. Chouinard. // Geotextiles and Geomembranes. - 2013. - Vol. 37. - Pp. 1-9. -doi:10.1016/j.geotexmem.2013.01.003.
6. Шамровский А.Д. Учет геометрической нелинейности в дискретной модели сплошной среды [Текст] / А.Д. Шамровский, Д.Н. Колесник. // Методы розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Дніпропетровський національний університет. - Дніпропетровськ: Ліра, 2012. - Вип. 13. - С. 420-427.
7. Nguyen, D. H. Validation of partially flexible rod model based on discrete element method using beam deflection and vibration [Текст] / D. H. Nguyen, N. Kang, J. Park. // Powder Technology. - 2013. - Vol. 237. - Pp. 147-152. - doi:10.1016/j.powtec.2013.01.038.
8. Heyliger, P. R. On a mixed finite element model for large deformation analysis of elastic solids [Текст] / P. R. Heyliger, J. N. Reddy. // International Journal of Non-Linear Mechanics. - 1988. - Vol. 23, Issue 2. - Pp. 131-145.
9. Dado, M. A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams [Текст] / M. Dado, S. Al-Sadder. // Mechanics Research Communications. - 2005. - Vol. 32, Issue 6. - Pp. 692-703. - doi:10.1016/j.mechrescom.2005.01.004.
10. Bathe, K.-J. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis [Текст] / K.-J. Bathe, E. Ramm, E. L. Wilson. // International Journal For Numerical Methods In Engineering. - 1975. - Vol. 9. - Pp. 353-386.
11. Biffle, J. H. JAC2D: A Two-dimensional Finite Element Computer Program for the Nonlinear Quasi-static Response of Solids with the Conjugate Gradient Method [Текст] / J. H. Biffle, M. L. Blanford. - Sandia National Laboratories, 1994. - 130 p.
12. Holden, J. T. On the finite deflections of thin beams [Текст] / J. T. Holden. // International Journal of Solids and Structures. - 1972. - Vol. 8, Issue 8. - Pp. 1051-1055. - doi:10.1016/0020-7683(72)90069-8.
13. Xiao, Yi. Large Deflection of Cantilever Beam with Uniformly Distributed Load Using Homotopy Analysis Method [Текст] / Yi Xiao. // Advanced Materials Research. - 2011. - Vol. 250-253. - Pp. 1222-1225. - doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.250-253.1222.
14. Wang, T.M. Non-linear bending of beams with uniformly distributed loads [Текст] / T. M. Wang. // International Journal of Non-Linear Mechanics. - 1969. - Vol. 4, Issue 4. - Pp. 389-395.