

*Модель функціонування вузла комп'ютерної мережі представлено у вигляді системи масового обслуговування із неоднорідним входним потоком із відносним пріоритетом. Розраховано ймовірності станів системи*

**Ключові слова:** КМ, математичне моделювання

*Модель функционирования узла компьютерной сети представлена как система массового обслуживания с неоднородным входным потоком с относительными пріоритетами. Рассчитаны вероятности состояний системы*

**Ключевые слова:** КС, математическое моделирование

*The model of network hub was developed using queuing theory with uniform stream with relative priority. It was calculated the probabilities of system states*

**Key words:** Networks, mathematical modeling

# КОМПЬЮТЕРНАЯ СЕТЬ С НЕОДНОРОДНЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

**П. Е. Пустовойтов**

Кандидат технических наук, доцент  
 Кафедра систем информации  
 Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
 ул. Фрунзе, 22, г. Харьков, Украина, 61000  
 Контактный тел.: 097-737-44-91  
 E-mail: yamazaki@bk.ru

## 1. Введение, постановка задачи

Для моделирования функционирования узлов компьютерных сетей часто используются модели систем массового обслуживания и марковских процессов [1-2]. Полученные аналитические выражения для вероятностей состояний системы позволяют вычислить основные характеристики системы [3-4].

Во многих практических случаях необходимо, чтобы заявки какого-то определенного типа обслуживались в среднем быстрее заявок других типов. С целью обеспечения преимущественного права на обслуживание одних заявок перед другими им присваивается различный приоритет. Если приоритет заявки учитывается только в момент выбора заявки на обслуживание, то его называют относительным. При этом важно заметить, что заявка, обслуживание которой началось, продолжает обслуживание до окончания, даже если во время обслуживания поступила заявка с более высоким приоритетом [4-5].

Проведем анализ эффективности функционирования компьютерной сети с относительным приоритетом заявок.

## 2. Основные результаты

Как уже было отмечено, в этой ситуации заявка, поступающая в момент, когда система обслуживает другую заявку с более низким приоритетом, не прерывает ее обработку, а становится в свою очередь заявок и ожидает начала обслуживания. В связи с этим, если в системе (для случая двух потоков) находятся  $i$  заявок с более высоким приоритетом и  $j$  заявок с низким приоритетом, необходимо различать состояние  $(i, j)$ , в котором обслу-

живается заявка первого типа с высоким приоритетом, от состояния  $(i, j)$ , когда обслуживается заявка второго типа. При этом в первом случае после окончания обслуживания заявки с интенсивностью  $\mu_1$  система переходит в состояние  $(i-1, j)$ , а втором – с интенсивностью  $\mu_2$  переходит в состояние  $(i, j-1)$ . Для различения этих двух состояний будем отмечать штрихом индекс состояния  $i$  или  $j$  в соответствии с тем, заявка какого именно типа обслуживается. При этом состояние  $(i', j)$  описывает ситуацию, когда обслуживается заявка первого типа, а состояние  $(i, j')$  – второго типа.

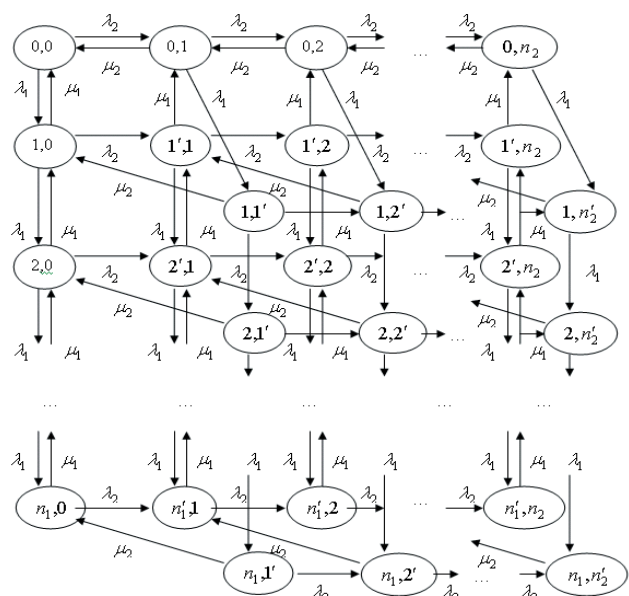


Рис. 1. Граф состояний и переходов для системы с относительным приоритетом

С учетом сказанного, граф состояний и переходов для узла компьютерной сети, на вход которого поступает суперпозиция двух потоков заявок, из которых первый поток заявок имеет относительный приоритет перед вторым, изображен на рис. 1.

Для анализа системы введем групповые состояния следующим образом [6-7]:

$$E_{\Gamma_0} = \{E_{00}, E_{01}, \dots, E_{0n_2}; E_{1'0}, E_{1'1}, \dots, E_{1'n_2}; \dots, E_{n_1'0}, \dots, E_{n_1'n_2}\},$$

$$E_{\Gamma_1} = \{E_{11'}, E_{12'}, \dots, E_{1n_2'}; E_{21'}, \dots, E_{2n_2'}; \dots, E_{n_1'1'}, \dots, E_{n_1'n_2'}\}.$$

При этом граф укрупненных состояний и переходов имеет вид, приведенный на рис. 2.

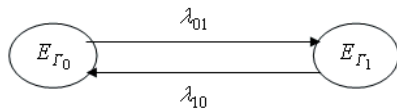


Рис. 2. Граф групповых состояний и переходов  
Из рис. 2 ясно, что

$$\lambda_{01} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_2} P'_{0i},$$

$$\lambda_{10} = \mu_2 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} P'_{i_1 i_2}. \tag{1}$$

Здесь

$P'_{0i_2}$  – условная вероятность состояния  $E_{0i_2}$ ,  
 $P'_{i_1 i_2}$  – условная вероятность состояния  $E_{i_1 i_2}$ .

Тогда

$$P_{\Gamma_1} \lambda_{10} - P_{\Gamma_0} \lambda_{01} = 0,$$

откуда

$$P_{\Gamma_1} = P_{\Gamma_0} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}.$$

Так как  $P_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_0} = 1$ , то

$$P_{\Gamma_0} \left( \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + 1 \right) = P_{\Gamma_0} \frac{\lambda_{01} + \lambda_{10}}{\lambda_{10}} = 1,$$

$$P_{\Gamma_0} = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}},$$

$$P_{\Gamma_1} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}.$$

При этом безусловные вероятности состояний системы определяются соотношениями

$$P_{i_1 i_2} = P'_{i_1 i_2} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}},$$

$$P_{i_1 i_2'} = P'_{i_1 i_2'} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}. \tag{2}$$

где  $P'_{i_1 i_2}$  и  $P'_{i_1 i_2'}$  – условные вероятности соответствующих состояний в слоях  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ .

Условное распределение вероятностей для группового состояния  $\Gamma_0$  совпадает с распределением для системы с абсолютным приоритетом.

Рассчитаем распределение вероятностей состояний для слоя  $\Gamma_1$  (рис. 2).

$$\lambda_1 P_{01} - P'_{11'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

$$\lambda_1 P_{02} - P'_{12'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

.....

$$\lambda_1 P_{0n_2} - P'_{1n_2'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0.$$

Отсюда

$$P'_{1i_2'} = P_{0i_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Далее

$$\lambda_1 P_{11'} - P'_{21'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

$$\lambda_1 P_{12'} - P'_{22'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

.....

$$\lambda_1 P_{1n_2} - P'_{2n_2'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0.$$

Отсюда

$$P'_{2i_2'} = P'_{1i_2'} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} = P_{0i_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^2.$$

$$\lambda_1 P_{n_1-1,1'} - P'_{n_1,1'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

$$\lambda_1 P_{n_1-1,2'} - P'_{n_1,2'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0,$$

.....

$$\lambda_1 P_{n_1-1,n_2} - P'_{n_1,n_2'} (\lambda_2 + \mu_2) = 0.$$

Отсюда

$$P'_{n_1 i_2'} = P'_{n_1-1, i_2'} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} = P_{0i_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{n_1}.$$

Таким образом, условные вероятности состояний для слоя  $\Gamma_1$  определяются соотношением

$$P'_{i_1 i_2'} = P_{0i_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{i_1}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n_1, i_2' = 1, 2, \dots, n_2. \tag{3}$$

Так как для каждого набора состояний [6-7] имеет место

$$\hat{P}_{ik} = \frac{\rho_1^i}{\sum_{l=0}^{n_1} \rho_1^l} = \frac{\rho_1^i (1 - \rho_1)}{1 - \rho_1^{n_1+1}},$$

где  $\hat{P}_{ik}$  – условная вероятность пребывания системы в  $i$ -ом состоянии множества  $\{E_{0k}, E_{1k}, \dots, E_{n_1,k}\}$ , то безусловные вероятности  $P_{ik}$  определяются соотношением

$$P_{ik} = \hat{P}_{ik} P_k = \frac{\rho_1^i (1 - \rho_1)}{(1 - \rho_1^{n_1+1})} \cdot \frac{\left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^k}{\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l} = \frac{\rho_1^i \rho_2^k (1 - \rho_1^{n_1+1})^{k-1}}{(1 - \rho_1)^{k-1}} \cdot \frac{1}{\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l}, \tag{4}$$

$i = 0, 1, \dots, n_1, \quad k = 0, 1, \dots, n_2.$

Теперь используем соотношение (4) для расчета интенсивностей групповых переходов. Так как

$$P'_{0i} = \frac{\rho_2^i (1 - \rho_1^{n_1+1})^{i-1}}{(1 - \rho_1)^{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n_2,$$

$$\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l,$$

то

$$P'_{i_1 i_2} = \frac{\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{i_1} \rho_2^{i_2} (1 - \rho_1^{n_1+1})^{i_2-1}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l}.$$

С другой стороны

$$\lambda_{01} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_2} P_{0i} = \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \rho_2^i (1 - \rho_1^{n_1+1})^{i-1}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l} = \lambda_1 \rho_2 \frac{\sum_{l=0}^{n_2-1} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l}{\sum_{l=0}^{n_2} \left[ \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right]^l} =$$

$$= \lambda_1 \rho_2 \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^{n_2}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^l} \right]. \quad (5)$$

Далее

$$\lambda_{10} = \mu_2 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} P_{i_1 i_2} = \mu_2 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} P_{0i_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{i_1} =$$

$$= \mu_2 \sum_{i_2=1}^{n_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{i_2} \sum_{i_1=1}^{n_1} P_{0i_2}$$

Поскольку

$$\sum_{i_2=1}^{n_2} P_{0i_2} = \rho_2 \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^{n_2}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^l} \right],$$

то

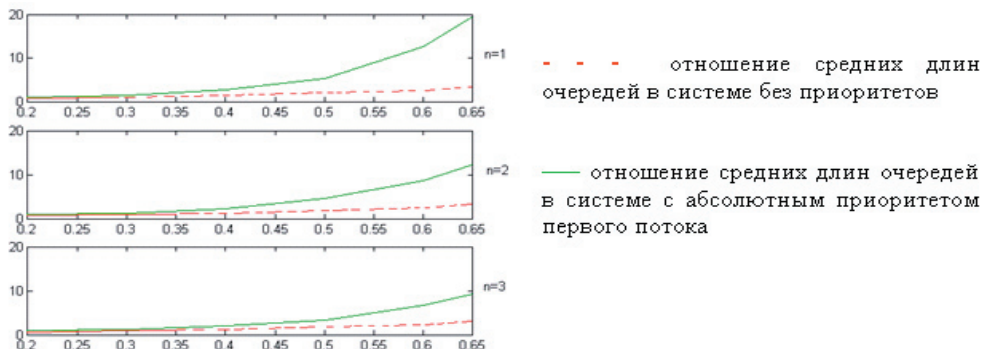


Рис. 3. Зависимость длины очереди потока от интенсивности другого

$$\lambda_{10} = \mu_2 \rho_2 \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^{n_2}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^l} \right] \sum_{i_1=1}^{n_1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{i_1} =$$

$$= \lambda_2 B \frac{\lambda_1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{n_2}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2}} = \lambda_2 B \frac{\lambda_1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)^{n_2} (\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2 + \mu_2 - \lambda_1}, (6)$$

где

$$B = 1 - \frac{\left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^{n_2}}{\sum_{l=0}^{n_2} \left( \frac{\rho_2 (1 - \rho_1^{n_1+1})}{1 - \rho_1} \right)^l}.$$

Оценим эффективность обслуживания в системе с приоритетом одних заявок перед другими. Пусть в одноканальную систему поступает суперпозиция двух потоков. Проанализируем влияние приоритета на среднюю длину очереди для каждого из потоков в системе с абсолютным приоритетом одних заявок перед другими.

Введем

$$\eta_0 = \frac{\bar{n}_{20}}{\bar{n}_{10}},$$

$\bar{n}_{10}$  – средняя длина очереди для первого потока в системе без приоритета,

$\bar{n}_{20}$  – средняя длина очереди для второго потока в системе без приоритета,

$$\eta_1 = \frac{\bar{n}_{21}}{\bar{n}_{11}},$$

$\bar{n}_{11}$  – средняя длина очереди для первого потока в системе с абсолютным приоритетом,

$\bar{n}_{21}$  – средняя длина очереди для второго потока в системе с абсолютными приоритетом.

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}, n = 1.$$

Зафиксируем  $\alpha_2$ , например  $\alpha_2 = 0.3n$ , и проанализируем зависимость  $\eta_0$  и  $\eta_1$  от  $\alpha_1$ . Соответствующие графики приведены на рис. 3.

---

**Выводы**

---

Анализ графиков для  $n=1$  позволяет сделать следующие выводы.

В системе без приоритета средняя длина очереди для каждого из потоков при заданном числе каналов и интенсивности обслуживания зависит от интенсивности этого потока и не зависит от интенсивности другого потока. В системах с абсолютным приоритетом дело обстоит не так. Средняя длина очереди для потока, имеющего абсолютный приоритет, так же, как и ранее, зависит только от его интенсивности.

Напротив, для второго потока, не обладающего приоритетом, заявки которого обслуживаются только при отсутствии заявок первого потока, средняя длина очереди определяется не только его интенсивностью, но и интенсивностью приоритетного потока. При этом средняя длина очереди для заявок этого потока тем больше, чем выше интенсивность приоритетного потока.

Заметим, что соответствующая зависимость является нелинейной, приводя к показательному

росту длины очереди для заявок неприоритетного потока при увеличении интенсивности приоритетного.

Во многих практических ситуациях возникающую существенную разницу в эффективности обслуживания разных по приоритету потоков целесообразно ослабить. Естественная возможность улучшения ситуации, возникающей в случаях, когда длина очереди неприоритетных заявок приближается к предельно допустимой, состоит в снятии приоритета на время, достаточное для восстановления относительного равновесия в длинах очередей.

Другой путь решения этой задачи при сохранении приоритетной дискриминации, связан с увеличением числа каналов. Результаты соответствующих просчетов для случаев, когда  $n=2$  и  $n=3$  приведены также на рис. 3. Из приведенных на этом рисунке графиков видно, что при большем числе каналов (но той же их загрузке) преимущество, создаваемое приоритетом, снижается, и разница в средних длинах очередей становится не столь существенной.

---

**Литература**

1. Пустовойтов П.Е. Применение теории марковских процессов в исследовании эффективности компьютерных сетей / П.Е. Пустовойтов, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Математичне моделювання. Дніпродзержинський державний технічний університет. – №1,2. – Дніпродзержинськ, 2005. – С. 100-102.
2. Раскин Л.Г. Оценка производительности компьютерных сетей как систем массового обслуживания / Л.Г. Раскин, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Вестник НТУ «ХПИ». - №45. – X., 2004. – С. 15-20.
3. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневецкий – М.: Техносфера, 2003. – 512с.
4. Крылов В.В. Теория телетрафика и ее приложения / В.В. Крылов, С.С. Самохвалова – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288с.
5. Раскин Л.Г. Анализ многоканальных компьютерных сетей с неоднородным по приоритету входным потоком заявок / Л.Г. Раскин, П.Е. Пустовойтов, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. УДАЗТ. – №1,2, – X., 2005. – С. 45-49.
6. Пустовойтов П.Е. Оценка эффективности многовходовых компьютерных сетей методами фазового укрупнения состояний / П.Е. Пустовойтов, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Вестник НТУ «ХПИ». - №19. – X., 2005. С.101-104.
7. Серая О.В. Оптимизация параметров фазовой декомпозиции марковских систем высокой размерности / О.В.Серая, П.Е. Пустовойтов, Са'ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. Нац. аэрокосм. Ун-т «ХАИ». – Вып. 27 – X., 2005. – С. 175-178.