Формулюється завдання побудови комплексних розкладів, обґрунтовується оптимізаційна модель завдання побудови комплексних розкладів як модель дворівневого програмування, формулюються передумови формування методу побудови комплексних розкладів на основі апарату безкоаліційних і ієрархічних ігор

Ключові слова: комплексні розклади, ієрархічні, безкоаліційні ігри

Формулируется задача построения комплексных расписаний, обосновывается оптимизационная модель задачи построения комплексных расписаний как модель двухуровневого программирования, формулируются предпосылки формирования метода построения комплексных расписаний на основе аппарата бескоалиционных и иерархических игр

Ключевые слова: комплексные расписания, иерархические, бескоалиционные игры

Formulated the problem of constructing complex schedules, optimization model is represented as a model of bilevel programming, formation method for constructing complex schedules the apparatus of noncooperative and hierarchical games

Key words: complex schedules, hierarchical, noncooperative games

УДК 004:519.854

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ СОСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ РАСПИСАНИЙ В МНОГОСТАДИЙНОЙ СИСТЕМЕ

К.В. Кротов
Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: (0692)44-24-83, 068-483-58-76
E-mail: krotov_kv@mail.ru

Н.Ю. Фещун*
*Кафедра информационных систем
Севастопольский национальный технический университет
Контактный тел.: (0692) 71-63-550, 095-309-51-71
E-mail: nikitaf74@gmail.com

Введение

Современное состояние методов дискретной оптимизации и, в частности, методов теории расписаний для многостадийных систем с одинаковым порядком обработки предполагает формирование последовательностей требований для соответствующего заданного их (требований) множества. Этой проблематике посвящено достаточно большое количество работ [1-4]. Однако если обработка всех требований заданного множества не может быть реализована в течение установленного интервала времени, постановка задачи теории расписаний может быть расширена. Данную постановку рассмотрим с точки зрения задачи производственного планирования. Исходными данными при планировании являются: производственная программа P, предполагающая задание множества N обрабатываемых требований; длительности интервалов функционирования оборудования многостадийной системы, обрабатывающего поступающие требования (для задачи производственного планирования длительности этих интервалов соответствуют длительности смены работы оборудования $t_{см}$); длительности обработки i-х требований множества N на соответствующих l-х приборах, обозначенные t^l_i.

Таким образом, длительность обработки требований множества N ограничена интервалами $t_{см}$, выполнение операций с необработанными в течение некоторого интервала $t^s_{см}$ требованиями переносится на один из следующих интервалов $t^{s+h}_{см}$ (смен, где h=1,2,...,S, S — число смен, в течение которых должна быть реализована производственная программа). Тогда задача производственного планирования состоит в формировании сменно-суточных заданий – множеств N_{sz} обрабатываемых требований в многостадийной системе в течение заданных интервалов времени обработки $t_{см}$, и в формировании для этих сменно-суточных заданий соответствующих расписаний обработки.

Анализ публикаций

В настоящее время большое количество работ посвящено решению задач дискретной оптимизации и, в частности, построению расписаний в многостадийных системах [1-4]. В тоже время значительное число работ посвящено построению моделей многоуровневого (двухуровневого программирования) [5-7]. К решаемым в рамках рассматриваемого подхода задачам относятся задачи размещения предприятий, задачи выбора наиболее эффективного перечня выпускаемых предприятиями изделий, задачи планирования использования ресурсов и т.д. Решение задач построения эффективных заданий по обработке требований заданного множества (производственной программы) и формирования соответствующих этим заданиям эффективных расписаний в современных публикациях не рассматривается, хотя такие задачи и являются актуальными.

Цель и постановка задач

Цель выполняемой работы по формированию оптимизационной модели построения комплексных расписаний (к-расписаний) состоит в повышении эффективности функционирования систем оперативного планирования обработки требований в многостадийных системах. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: формулируется задача построения комплексных расписаний как задача двухуровневого дискретного программирования (задача теории иерархических игр) предусматривающая определение эффективных по составу заданий (множеств требований, обрабатываемых в течение заданных ограниченных временных интервалов) и формирование соответствующих этим множествам (заданиям) расписаний, обосновывается оптимизационная модель задачи построения комплексных расписаний как модель иерархической игры, формулируется подход к построению метода формирования комплексных расписаний, предполагающего использование аппарата теории бескоалиционных и иерархических игр, и предусматривающего определение равновесий между игроками (заданиями) в бескоалиционной игре, заданиями и расписаниями в иерархической игре.

Основное содержание работы

В соответствии с работами по теории составления расписаний, расписание обработки требований π должно быть представлено в виде совокупности последовательностей π^l запуска требований на обработку на каждом из приборов. Таким образом, расписание π имеет вид: $\pi=\{\pi^1,\pi^2,...,\pi^m,\}$, где m – число (количество) приборов в системе. В том случае, если длительности реализации расписаний π ограничены интервалами $t_{см}$, обработка множества N (требований производственной программы) предполагает формирование S сменно-суточных заданий - множеств требований N^s_{sz}, тогда должно быть сформировано S расписаний π обработки требований (расписание соответствующее N^s_{sz} (s-му сменно-суточному заданию) обозначается как π^s).

Так как длительности обработки i-х требований на l-ых приборах в многостадийной системе различны, то состав множеств $N^s_{sz}(s=\overline{1,S})$ определяет эффективность расписаний π^s, ограниченных интервалами $t_{см}$, и, как следствие, эффективность реализации всей производственной программы P. Задача производственного планирования предполагает формирование эффективных сменно-суточных заданий (множеств требований) $N^{s^*}_{sz}$ и формирование соответствующих эффективных расписаний π^{s^*}. Формулируемую задачу определения множеств $N^{s^*}_{sz}$ и формирования расписаний π^{s^*} назовем задачей построения комплексных расписаний (к-расписаний).

Процесс поиска эффективного комплексного решения (множеств $N^{s^*}_{sz}$ и расписаний π^{s^*}) имеет иерархический характер, т. е. изменение состава $N^{s^*}_{sz}$ (верхний уровень) вызывает изменения расписания π^s и соответствующего ему критерия $f(\pi^s)$ (нижний уровень). В то же время степень эффективности решения π^s на нижнем уровне планирования определяет степень эффективности выбора решений (множества) N^s_{sz}. В рассмотренной постановке задача построения комплексных расписаний может быть интерпретирована как задача многоуровневого (в частности, двухуровневого) программирования или как задача теории иерархических игр (игр Штакельберга). В обобщенной постановке задача двухуровневого программирования (иерархических игр) может быть формализована следующим образом [5]:

1) решения и критерии на верхнем уровне:

$$F(x,y^*)\to \min, x\in X, \tag{1}$$

где X - множество решений на верхнем уровне, y^* - эффективное решение, формируемое на нижнем уровне;

2) ограничения на верхнем уровне:

$$g(x)\le a;$$

3) решения и критерии на нижнем уровне:

$$f(x,y)\to \min, y\in Y, \tag{2}$$

где Y - множество решений на верхнем уровне;

4) ограничения на нижнем уровне:

$$q(y)\le b,$$

где a,b - некоторые константы.

Таким образом, значение критерия на нижнем уровне является зависящим как от решения x, получаемого с верхнего уровня, так и непосредственно от решения на нижнем уровне y. Значение критерия на верхнем уровне является зависящим от решения x и определяется эффективным решением y^* с нижнего уровня. При интерпретации (1) и (2) как оптимизационной модели иерархической игры, предполагается заданным порядок ходов: первый ход выполняет игрок верхнего уровня, передает решение на нижний; вторым шагом определяется (в соответствии с решением x) эффективное значение y^* на нижнем уровне. Модель (1), (2) может быть модифицирована следующим образом [6]:

1) верхний уровень:

$$\begin{aligned}&F(y^*)\to \min, x\in X\\&g(x)\le a;\end{aligned} \tag{3}$$

2) нижний уровень:

$$\begin{aligned}&f(x,y)\to \min, y\in Y\\&q(y)\le b.\end{aligned} \tag{4}$$

В модели (3), (4) критерий верхнего уровня F непосредственно от решения x не зависит. Примем модель (3), (4) в качестве основы для построения оптимизационной иерархической теоретико-игровой модели составления комплексных расписаний. В рассмотрение введем обозначения: t_i^{0l}, t_i^l начало и окончание обработки i-го требования на l-м приборе, t^l_i - длительность обработки i-го требования на l-м приборе. Альтернативой формируемым в ходе построения расписания π последовательностям π^l является вводимая в рассмотрение матрица (P^l_{ij}) – матрица порядка обработки требований в последовательности π^l; элемент P^l_{ij} данной матрицы равен 1 в том случае если i-е требование занимает в последовательности π^l j-ю позицию (в противном случае 0). Для построения расписаний, порядок обработки требований в последовательностях которых определяется видом матрицы (P^l_{ij}), в рассмотрение вводится вспомогательная матрица (t^{0l}_{ij}) - матрица моментов времени начала обработки j-ых требований в i-х позициях последовательности π^l (т.е. момента начала обработки j-го требования в том случае, если это требование в последовательности π^l занимает i-ю позицию). Для первого прибора в многостадийной системе элементы матрицы (t^{0l}_{ij}) определяются следующим образом:

$$t^{01}_{1j} = 0;\ \ t^{01}_{ij} = \sum_{r=1}^{n_s} P^1_{i-1,} t^1_{i-1}, \text{ при } i \neq 1 \quad (5)$$

где n_s - количество требований в формируемом задании (множестве) N^s_{sz}.

Для l-го прибора (l≠1) элементы вспомогательной матрицы (t^{0l}_{ij}) определяются следующим образом:

а) элементы первой строки:

$$t^{01}_{1j} = \sum_{i=1}^{n_s} P^{l-1}_{ij}\left(t^{0l-1}_{ij} + t^{l-1}_j\right) \text{ при } j = \overline{1,n_s} \quad (6)$$

б) элементы i-й строки (i≠1):

$$t^{01}_{ij} = \max\left\{\sum_{r=1}^{n_s} P^{l-1}_{ir}\cdot\left(t^{0l-1}_{rj} + t^{l-1}_j\right); \sum_{r=1}^{n_s}\left(t^{0l}_{i-1,r} + t^l_r\right)\cdot P^l_{r,i-1}\right\}. \quad (7)$$

В соответствии с введенными обозначениями с использованием выражений (5)-(7) время начала обработки i-го требования на l-м приборе определено следующим образом:

$$t^{01}_i = \sum_{j=1}^{n_s} P^l_{ij} t^{0l}_{ji} \quad (8)$$

Соответственно, время окончания обработки i-го требования на l-м приборе определяется выражением вида:

$$\overline{t^l_i} = \sum_{j=1}^{n_s} P^l_{ij}\left(t^{0l}_{ji} + t^l_i\right) \quad (9)$$

Для оценки эффективности формируемого для требований множества (задания) N^s_{sz} расписания в рассмотрение введены альтернативные критерии: 1) суммарное время ожидания требованиями освобождения необходимых для их обслуживания приборов; 2) суммарное время простоя приборов в ожидании готовности требований для их обработки.

Для критерия первого типа логика рассуждений по формированию его вида следующая:

1) при $t^{0l}_i > \overline{t^{l-1}_i}$ i-е требование ожидает освобождения l-го прибора, время ожидания i-м требованием l-го прибора определяется выражениями:

$$\Delta^l_i = \sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^{0l}_{ji} - P^{l-1}_{ij}\left(t^{0l-1}_{ji} + t^{l-1}_i\right)\right];$$

2) общее суммарное время ожидания требованиями l-го прибора для обработки:

$$\Delta^l = \sum_{i=1}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^{0l}_{ji} - P^{l-1}_{ij}\left(t^{0l-1}_{ji} + t^{l-1}_i\right)\right];$$

3) общее суммарное время ожидания требованиями освобождения приборов в многостадийной системе:

$$\Delta = \sum_{l=2}^{m}\sum_{i=1}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^{0l}_{ji} - P^{l-1}_{ij}\left(t^{0l-1}_{ji} + t^{l-1}_i\right)\right] \quad (10)$$

По аналогии с критерием (10) вид целевой функции, определяющей время простоя приборов в многостадийной системе, используемой при построении эффективных расписаний, определен в соответствии со следующими рассуждениями:

1) при $t^{0l}_i > \overline{t^l_{i-1}}$ l-й прибор ожидает готовности для обработки на нем i-го требования, тогда суммарное время простоя l-го прибора в ожидании готовности i-х требований:

$$\Delta^l = \sum_{i=2}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^l_{ji} - P^l_{i-1,j}\left(t^{0l}_{j,i-1} + t^l_i\right)\right];$$

2) суммарное время простоя приборов с многостадийной системе, связанного с ожиданием готовности требований для обработки:

$$\Delta = \sum_{l=2}^{m}\sum_{i=2}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^l_{ji} - P^l_{i-1,j}\left(t^{0l}_{j,i-1} + t^l_i\right)\right]. \quad (11)$$

Критерии вида (10), (11) являются однозначно определяющими эффективность формируемых расписаний и могут быть использованы при решении задачи оптимизации на нижнем уровне планирования. Наряду с определением вида критериев для решения оптимизационной задачи также должны быть определены ограничения на выбор соответствующих решений. Формирование решения на нижнем уровне управления (планирования) для соответствующего множества требований N_{sz} осуществляется в соответствии со следующими ограничениями: $\max\limits_l\{\overline{t^l_{i_k}}\} \le t_{см}$ (где $\overline{t^l_{i_k}}$ – время окончания обслуживания последнего требования i_k в соответствующей последовательности). Таким образом $\overline{t^l_{i_k}} = \max\limits_l\{\overline{t^l_{i_k}}\}$, где $i \in \pi^l$ тогда ограничение на включение требования задания (множества) N_{sz} в последовательности $\pi^l\left(l = \overline{1,m}\right)$ имеет вид:

$$\max_l \max_i\{\overline{t^l_i}\} \le t_{см},$$

где $i \in N_{sz}, i \in \pi^l, i = \overline{1,n_s}, l = \overline{1,m}$,

либо в принятых обозначениях:

$$\max_l \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n_s} P_{ij}\left(t_{ji}^{0l} + t_i^l\right)\right\} \le t_{см}\text{ , где } i=\overline{1,n_s}, l=\overline{1,m} \qquad (12)$$

В случае, если ограничение (12) не выполняется (для уже сформированного расписания), то последнее, добавленное в последовательности π^l требование i_k, удаляется из последовательностей и в них может быть добавлено другое требование, для которого ограничение (12) будет выполнено. Таким образом, формирование расписания на нижнем уровне планирования выполняется в соответствии с критерием (11), соответствующим условию минимизации простоев оборудования при обработке требований задания (множества) N_{sz}, при учете ограничений (12). Естественно, что формирование нового состава задания (множества) N_{sz} при выполнении ограничений (12) приводит к изменению значения критерия (11). Управление составом заданий реализуется на верхнем уровне планирования. В качестве критерия на верхнем уровне планирования принята общая эффективность использования оборудования многостадийной системы при реализации задания N^s_{sz} (где $s=\overline{1,S}$ – индекс задания). Общая эффективность работы оборудования при обработке требований задания N^s_{sz} определяется: 1) простоями оборудования многостадийной конвейерной системы на начальной стадии ее работы, связанными с «заполнением» конвейера обрабатываемыми требованиями; 2) простоями оборудования в ожидании готовности требований (в процессе работы многостадийной системы); 3) простоями оборудования многостадийной системы на заключительной стадии обработки требований задания N^s_{sz}, связанными с «опустошением» конвейера. Данный способ определения вида критерия обусловлен особенностями реализации метода построения заданий и соответствующих им расписаний, связанными с анализом градиентов целевых функций на нижнем и верхнем уровнях планирования и рассмотрением тех решений, которые обеспечивают отрицательный левый дискретный градиент целевых функций.

В случае если в последовательностях $\pi^l(l=\overline{1,m})$ эффективного расписания π^*, соответствующего некоторому заданию (множеству требований) N^s_{sz}, размещено n_s требований, тогда при выполнении ограничения (12) количество неиспользованного времени работы некоторого l-го прибора может быть определено выражением вида:

$$t_{см} - \sum_{j=1}^{n_s} P^l_{i_{n_s} j}\left[t^{0l}_{ji_{n_s}} + t^l_{i_{n_s}}\right] \qquad (13)$$

где i_{n_s} - требование, являющееся последним в последовательности π^l. Альтернативой (13) является выражение вида:

$$t_{см} - \max_i \left[\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{ij}\left[t^{0l}_{ji}+t^l_i\right]\right]\text{ , где } i=\overline{1,n_s} \qquad (14)$$

Тогда суммарное время простоя приборов многостадийной системы, связанное с «опустошением» конвейера может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^{m}\left[t_{см} - \sum_{j=1}^{n_s} P^l_{i_{n_s} j}\left[t^{0l}_{ji_{n_s}} + t^l_{i_{n_s}}\right]\right],$$

либо в преобразованной форме:

$$mt_{см} - \sum_{l=1}^m \left[\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{i_{n_s}j}\left[t^{0l}_{ji_{n_s}}+t^l_{i_{n_s}}\right]\right]. \qquad (15)$$

Если придерживаться логики формирования выражения (14), то выражение (15) примет вид:

$$mt_{см} - \sum_{l=1}^m\left[\max_i \sum_{j=1}^{n_s} P^l_{ij}\left[t^{0l}_{ji}+t^l_i\right]\right]\text{ , где } i=\overline{1,n_s} \qquad (16)$$

По аналогии с (14) и (16) может быть определен интервал времени ожидания l-м прибором ожидания начала обработки первого требования в последовательности π^l (время простоя l-го прибора в ожидании начала обработки (естественно при l≥2)). Данное время простоя l-го прибора будет определено следующим образом: $\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{i_1 j} t^{0l}_{ji_1}$ либо $\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{ij} t^{0l}_{ji}$, где i_1 — идентификатор требования, первого в последовательности π^l. Оценка времени простоя l-го прибора в ожидании начала обработки на нем требований последовательности π^l может быть определена следующим образом: $\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{1j} t^{0l}_{j1}$, тогда общее время простоя приборов многостадийной системы при «начальном заполнении» конвейера обрабатываемыми требованиями определено выражением вида: $\sum_{l=2}^{m}\sum_{j=1}^{n_s} t^{0l}_{1j} P^l_{j1}$.

В случае если простои приборов многостадийной системы в ожидании готовности к обработке требований задания N^s_{sz} определяются выражением вида (11), то критерий, определяющий эффективность использования оборудования при реализации обработки требований задания (множества) N^s_{sz}, примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\sum_{l=2}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n_s} t^{0l}_{1j}P^l_{j1} + \sum_{i=2}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{ij}t^{0l}_{ji} - P^l_{i-1,j}\left(t^{0l}_{ji-1}+t^l_{i-1}\right)\right]\right] + \\ +\left[mt_{см} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_s} P^l_{i_{n_s}j}\left[t^{0l}_{ji_{n_s}}+t^l_{i_{n_s}}\right]\right] \to \min\end{gathered} \qquad (17)$$

Обобщающие выражения (11) и (17) определяют критерии оптимизации состава одного множества требований (заданий) N^s_{sz} (на верхнем и нижнем уровне иерархической игры). Так как при распределении множества требований производственной программы N по заданиям должны быть определены множества N^s_{sz} ($s=\overline{1,S}$), где S – число формируемых на основе производственной программы заданий), то при принятых обозначениях для матриц (t^{0l}_{ij}) и (P^l_{ij}) должен быть выполнен переход к соответствующим обозначениям этих матриц в виде (t^{0l}_{ij})s, $(P^l_{ij})^s$ где s - индекс соответствующего задания N^s_{sz}. С учетом этого критерии будут модифицированы следующим образом:

1) критерий верхнего уровня планирования:

$$\begin{gathered}\sum_{l=2}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n_s}\left[t^{0l}_{1j}\right]^s\left[P^l_{j1}\right]^s + \sum_{i=2}^{n_s}\sum_{j=1}^{n_s}\left[\left[P^l_{ij}\right]^s\left[t^{0l}_{ji}\right]^s - \left[P^l_{i-1,j}\right]^s\left(\left[t^{0l}_{ji-1}\right]^s+t^l_{i-1}\right)\right]\right] + \\ +\left[mt_{см} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_s}\left[P^l_{i_{n_s}j}\right]^s\left(\left[t^{0l}_{ji_{n_s}}\right]^s+t^l_{i_{n_s}}\right)\right] \to \min\end{gathered} \qquad (18)$$

2) критерий нижнего уровня планирования:

$$\sum_{l=2}^{m}\sum_{j=1}^{n_s}\left(\left[P_{ij}^{l}\right]^{s}\left[t_{ji}^{0l}\right]^{s}-\left[P_{i-1,j}^{l}\right]^{s}\left[t_{ji-1}^{0l}\right]^{s}-t_{i-1}^{l}\right). \quad (19)$$

Ограничения для нижнего уровня планирования:

$$\max_{l}\max_{i}\left\{\sum_{j=1}^{n_s}P_{ij}\left(t_{ji}^{0l}+t_{i}^{l}\right)\right\}\le t_{\text{см}} \text{ , где } i=\overline{1,n_s}, l=\overline{1,m}. \quad (20)$$

В соответствии с сформированными критериями вида (18), (19) метод построения комплексных расписаний предполагает выполнение (реализацию) действий, связанных:

1) на нижнем уровне - с построением расписаний для S сформированных заданий (заданий N^{s}_{sz}) таким образом, чтобы минимизировать время простоя оборудования в многостадийной системе при обработке требований;

2) на верхнем уровне - с формированием заданий таким образом, чтобы было реализовано максимальное использование временного ресурса оборудования многостадийной системы, т.е. минимизирован общий его простой.

Определение критериев в виде (18), (19) позволяет рассматривать задачу составления комплексных расписаний как задачу теории бескоалиционных игр, где каждый игрок формирует задание N^{s}_{sz}, руководствуясь «своим» критерием вида (18). В этом случае формирование эффективных заданий каждым из игроков позволяет достичь ситуации равновесия в бескоалиционной игре. Рассмотрение решений задач формирования заданий (множеств) N^{s}_{sz} как действий игроков в бескоалиционной игре позволяет (при выполнении условия равновесия по Нэшу) максимальный выигрыш каждого игрока и, как следствие, максимальный балансовый выигрыш всех игроков. Тогда изменение состава одного (либо нескольких) заданий N^{s}_{sz} приводит к нарушению ситуации равновесия с эффективными значениями критериев на верхнем уровне (следствия: увеличение простоев оборудования, снижение эффективности его использования, не выполнение условий ограничений (20) и, как результат, увеличение числа элементов в множестве необработанных требований).

Таким образом, решение задачи составления комплексных расписаний обеспечивается определением ситуаций равновесия двух видов:

1) равновесия по Штакельбергу при идентификации локальных значений критерия оптимальности (18) для текущего состава требований в каждом из заданий;

2) равновесия по Нэшу при идентификации глобальных значений критерия (18) для определения эффективных решений на верхнем уровне планирования (эффективных составов заданий N^{s}_{sz}).

Литература

1. Танаев В.С. Теория расписаний. Многостадийные системы./ В.С.Танаев, Ю.Н.Сотсков, В.А.Струсевич. – М.: Наука, 1989. – 328 с.
2. Сигал И.Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы./ И.Х.Сигал, А.П.Иванова – М.: Физматлит, 2003.- 240 с.
3. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование/ М.М.Ковалев. – М.: Из-во «Едиториал УРСС», 2003.- 192 с.
4. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации/ М.М.Ковалев. – М.: Из-во «Едиториал УРСС», 2003.- 224 с.
5. Петросян Л.А. Теория игр./ Л.А.Петросян, Н.А.Зенкевич, Е.А.Семина. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1999. – 300с.
6. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. / Ю.Б.Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
7. Береснев В.Л.Эффективный алгоритм для задачи размещения производства с вполне уравновешенной матрицей./ В.Л.Береснев// Дискретный анализ и исследование операций, 1998, серия 1, том 5, №1. – с. 20-31.