

*Пропонуються S-функції, що дозволяють в асимптотичному наближенні будувати рівняння меж областей складної форми. Розглядаються питання застосування S-функцій для вирішення задач теплопровідності*

*Ключові слова: S-функції, теплові процеси, моделювання*

*Предлагаются S-функции, позволяющие в асимптотическом приближении строить уравнения границ областей сложной формы. Рассматриваются вопросы применения S-функций для решения задач теплопроводности*

*Ключевые слова: S-функции, тепловые процессы, моделирование*

*The S-functions proposed that allow constructing the asymptotic approximation of the equation of the boundaries of complex shapes. The application of S-functions considered for solving heat conduction problems*

*Key words: S-function, thermal processes, modeling*

# S-ФУНКЦИИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**А. П. Слесаренко**

Доктор физико-математических наук, профессор  
Отдел моделирования и идентификации тепловых  
процессов

ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046  
Контактный тел.: (057) 95-95-18, 096-386-30-22

## 1. Постановка проблемы

Методы решения краевых задач математической физики неизбежно должны предусматривать включения геометрической информации в разрешающий алгоритм, что возможно лишь при условии ее описания на подходящем аналитическом уровне. В таких классических методах, как разделение переменных и интегральных преобразований, геометрия учитывается за счет выбора систем координат; в методе конформных отображений - при построении соответствующих отображающих функций; в сеточных методах - путем замены линий или поверхностей конечными наборами близких к ним точек; в вариационных методах - при построении координатных последовательностей, удовлетворяющих заданным краевым условиям и т.п. Однако в условиях развития современной науки и техники возникает необходимость рассматривать конструктивные элементы всё более сложной геометрической формы, поэтому применять традиционные пути решения краевых задач становится всё труднее. В связи с этим появилась настоятельная потребность в разработке таких подходов, которые бы позволяли адекватно учитывать физические процессы в окрестностях угловых точек областей сложной формы. Это объясняется тем, что в физическом реальном мире нет математических острых углов, а есть углы с различной степенью скругления. Достаточно привести задачи, для которых точные решения «нефизичны» в окрестности угловых точек: точное решение задачи Блазиуса для полубесконечной пластины при продольном обтекании ее ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости [1]; точное решение задачи об определении магнитного поля между двумя магнитами полубес-

конечной цилиндрической формы [2]. В первом случае точное решение дает скорость жидкости на линии  $x=0$  разрывной, что противоречит физическому процессу. Во втором случае точное решение для напряженности магнитного поля дает на торцах магнитах бесконечную величину напряженности магнитного поля, что также противоречит физике явления. Адекватный учет физических процессов в первой, второй и других подобных задачах требует строить уравнения границ областей сложной формы так, чтобы получать скругленные углы для кусочно-гладких участков областей сложной формы. Это означает, что функция  $\omega$  должна быть непрерывной и иметь непрерывные первые и вторые производные, и описывать реальную границу области сложной формы в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности.

## 2. Анализ исследований и публикаций

Системный анализ отечественных и зарубежных авторов, посвященный данной проблеме показывает, что метод R-функций [3,4] позволяет с помощью R-операций построить в аналитическом виде уравнение  $\omega=0$ , точно описывающее границу области любой заданной степени сложности. В данных работах с использованием функции  $\omega$  рассматриваются вопросы построения приближенных аналитических структур решения краевых задач математической физики, включая задачу теплопроводности, точно удовлетворяющих заданным граничным условиям. Для отыскания неопределенных коэффициентов при базисных функциях структур решения краевых задач математической физики широкое применение в мировой научной практике полу-

чили методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов и др. Так обстоит технологическая картина определения физико-механических полей с «внешней» стороны. С «внутренней» же стороны кроме ряда эффективных качеств данного подхода есть и ряд очень серьезных «подводных камней», одним из таких «камней» является нефизичность структур решения, точно удовлетворяющих граничным условиям второго и третьего рода. Легко проверить, что в этом случае температурные, магнитные и другие поля в угловых точках не соответствуют реальным физическим процессам.

Другим «подводным камнем» является то, что точные значения коэффициентов алгебраических систем Ритца, Бубнова-Галеркина и т.д., вычисляемые как двойные интегралы по площади исследуемых областей равны бесконечности и «отступление» при интегрировании от угловых точек является скорее закругленным инженерным, чем научным подходом.

### 3. Цель работы

Построение S-операций и на их базе S-функций, позволяющих с использованием алгебры логики строить такие уравнения  $\omega=0$ , для которых точная граница области сложной формы с математически острыми углами была бы асимптотой. При этом в уравнении  $\omega=0$  острые углы границы области были бы минимально закругленными. Граница  $\Gamma$  в области  $\Omega$  представляла бы не кусочно-гладкую границу  $\Gamma_0$  в области  $\Omega_0$ , а в асимптотическом приближении представляла бы непрерывную границу, отстающую от границы  $\Gamma_0$  на максимальное расстояние  $\max \rho(\Gamma, \Gamma_0) \leq \epsilon$ .

Построение структур решения задачи теплопроводности точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям, для которых базисные функции были бы непрерывны, включая первые и вторые производные.

Применение S-функций в структурах решений задач теплопроводности, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям для математического моделирования нестационарных тепловых процессов.

### 4. Основные материалы исследования

**Теорема:** Уравнение  $\omega=0$ , где S-функция  $\omega(x,y) = -1 + a^x + a^y - \sqrt[k]{a^{kx} + a^{ky}}$ , при  $k \rightarrow \infty$  является уравнением первого координатного угла, а при  $1 < k < \infty$  контур, описываемый уравнением  $\omega(x,y) = 0$  лежит в первом координатном угле.

**Доказательство:**

1. Рассмотрим часть плоскости, где  $y-x-\beta \geq 0$ . Подставим в уравнение  $\omega(x,y) = 0$   $y = x + \beta$ , получим  $a^x + a^{x+\beta} - \sqrt[k]{a^{kx} + a^{kx+k\beta}} = 1$ , отсюда  $a^{x^*} = \frac{1}{1 + a^\beta - \sqrt[k]{1 + a^{k\beta}}}$ .

Так как  $a > 1$ , то для  $\sqrt[k]{1 + a^{k\beta}}$  справедливы следующие оценки:  $a^\beta < \sqrt[k]{1 + a^{k\beta}} < a^\beta + 1$ , при  $\beta > 1, k > 1$ .

Тогда  $0 < 1 + a^\beta - \sqrt[k]{1 + a^{k\beta}} \leq 1$ , и поэтому  $x^* = -\log_a(1 + a^\beta - \sqrt[k]{1 + a^{k\beta}}) \geq 0$ , при  $\beta \geq 0, y^* \geq 0$ .

2. Пусть теперь  $x-y-\beta \geq 0, \beta > 0$ . Заменив в уравнении  $\omega(x,y) = 0$   $x = y + \beta$ , получим  $y^* = -\log_a(1 + a^\beta - \sqrt[k]{1 + a^{k\beta}}) \geq 0$ , тогда  $x^* = y^* + \beta \geq 0$ . Теорема доказана.

Рассмотрим первый координатный угол  $f_1(x) = x, f_2(y) = y$ :

$$x \wedge_k y = \omega(x,y) = -1 + a^x + a^y - \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a^{kx} + a^{ky}}; a > 1,$$

$$\omega(0,0) = -1 + 2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(a^0)^k + (a^0)^k} = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2}.$$

Абсциссу  $x^*$  точки пересечения линий  $x=y$  и  $\omega(x,y) = 0$  получим из решения уравнения:  $2a^{x^*} - a^{x^*} \sqrt[k]{2} = 1; x^* = y^* = -\log_a(2 - \sqrt[k]{2})$ .

На рис. 1 показана S-операция конъюнкции для областей, определяемых предикатами  $f_1 \geq 0$  и  $f_2 \geq 0$  произвольной формы. Точки A и D - точки пересечения областей в точном решении. Точки B и C - точки пересечения областей в асимптотическом приближении,  $\rho$  - расстояние между точками пересечения областей для точного решения и для решения в асимптотическом приближении.

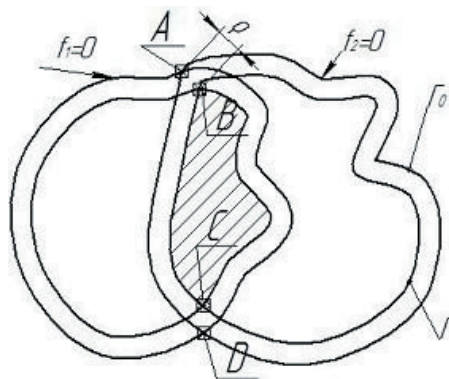


Рис. 1. S-операция конъюнкции для областей, образованных предикатами  $f_1 \geq 0$  и  $f_2 \geq 0$

Решение обратной задачи аналитической геометрии в асимптотическом приближении имеет вид  $\omega = 0$ . Точное решение определяется уравнением  $\omega_0 = 0$ , где

$$\omega = -1 + a^{f_1} + a^{f_2} - \sqrt[k]{a^{kf_1} + a^{kf_2}}; \tag{1}$$

$$\omega_0 = -1 + a^{f_1} + a^{f_2} - \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a^{kf_1} + a^{kf_2}}; \tag{2}$$

$\max \rho(\omega = 0, \omega_0 = 0)$  будет при

$$f_1 = f_2 = f^* = -\log_a(2 - \sqrt[k]{2}).$$

Пусть область  $\Omega_0$  образована предикатами  $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ , а область  $\Omega$  образована предикатами  $f_1 + \log_a(2 - \sqrt[k]{2}) \geq 0, f_2 + \log_a(2 - \sqrt[k]{2}) \geq 0$ . Очевидно, что область  $\Omega$  заключена в области  $\Omega_0$ , тогда  $\max \rho(\Gamma, \Gamma_0) \leq -2 \log_a(2 - \sqrt[k]{2})$ .

Для того чтобы  $\rho(\Gamma, \Gamma_0) \leq \epsilon$  необходимо 0 и k выбрать из уравнения:  $-2 \log_a(2 - \sqrt[k]{2}) = \epsilon$ , при этом получаем  $k = \ln 2 \cdot (\ln(2 - a^{-0.5\epsilon}))^{-1}$ ; отсюда следует, что при  $\epsilon \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ . (Следует отметить, что  $\rho(\Gamma, \Gamma_0)$  для любых  $f_1$  и  $f_2$  не зависит от  $f_1$  и  $f_2$ ).

Для примера рассмотрим решение обратной задачи аналитической геометрии для квадрата  $x \in [0;1], y \in [0;1]$  (рис. 2) в асимптотическом приближении, используя S-функции с параметрами  $a=10, k=8$ , тогда:

$$\omega(x,y) = -1 + 10^{x(1-x)} + 10^{y(1-y)} - \sqrt[8]{10^{8x(1-x)} + 10^{8y(1-y)}};$$

$$\omega(0,0) \approx -0.091.$$

Найдем координаты точки пересечения линии  $\omega=0$  с линией  $y=x$ :

$$2 \cdot 10^{x(1-x)} + 10^{x(1-x)} - 10^{x(1-x)} \sqrt[8]{2} = 1; 10^{x(1-x)} = \frac{1}{2 - \sqrt[8]{2}};$$

$$x(1-x) = -\lg(2 - \sqrt[8]{2}) \approx 0.041; x^2 - x + 0.041 = 0;$$

$$x_1 = y_1 = 0.957; x_2 = y_2 = 0.043.$$

Найдем точки пересечения линии  $x+y=1$  с линией  $\omega=0$ . Поскольку  $y=1-x$ :  $2 \cdot 10^{x(1-x)} - 10^{x(1-x)} \sqrt[8]{2} = 1$ ;  $x_1 = y_1 = 0.043; x_2 = y_2 = 0.957$ .

В табл. 1, в первой строке приведены значения S-функции для координат (0;0), в последующих - приведены значения  $x^*$  и  $y^*$  - абсцисс и ординат точки P, лежащей на биссектрисе  $x=y$ , в которой  $\omega(x^*, y^*)=0$ . Значения даны для различных показателей корня  $k$  и основания.

Таблица 1

k	4	8	20	80	150	400
a=10; $\omega(0,0)$	-0,1892	-0,0905	-0,0353	-0,0087	-0,0046	-0,0017
a=10; $x^* = y^*$	0,0899	0,0419	0,0155	0,0037	0,0021	0,0007
a=100; $x^* = y^*$	0,0450	0,0210	0,0077	0,0018	0,0103	0,0003

### 5. Обратная задача аналитической геометрии для областей сложной формы

Для аналитического описания границ областей сложной формы используем S-функции, описывающие границы областей в асимптотическом приближении по отношению к реальным границам областей.

Операция конъюнкции с помощью S-функций:

$$f_1 \overset{a}{\wedge}_k f_2 = \omega_{\wedge} = -b + a^{f_1} + a^{f_2} - \sqrt[k]{a^{kf_1} + a^{kf_2}}; \quad (3)$$

где  $a > 1, 1 \leq b \leq 2 - \sqrt[k]{2}$ ;

Операция дизъюнкции с помощью S-функций:

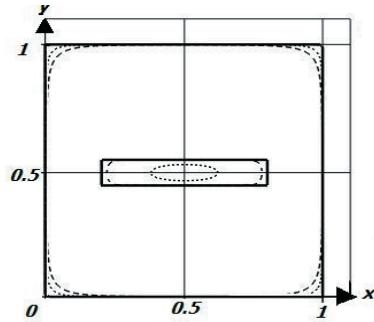
$$f_1 \overset{a}{\vee}_k f_2 = \omega_{\vee} = -2 - a^{f_1+f_2} + a^{f_1} + a^{f_2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a^{kf_1} + a^{kf_2}}; \quad (4)$$

где  $a > 1$ .

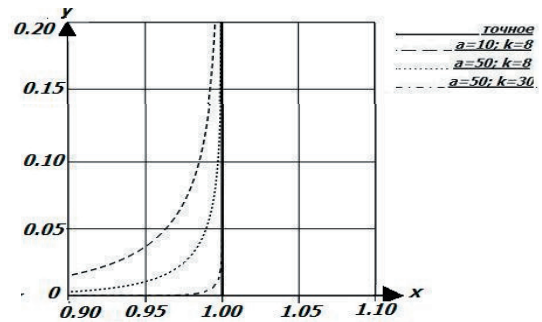
На рис. 2 и 3 показано решение обратной задачи аналитической геометрии для квадрата со стороной 1,  $x \in [0;1], y \in [0;1]$ , из центра которого вырезан узкий прямоугольник шириной 0.1 и длиной 0.6.

Опорные функции для квадрата:  $f_{11} = x(1-x); f_{12} = y(1-y)$ ; прямоугольника:  $f_{21} = (E-0.2)(x-0.8); f_{22} = (y-0.55)(y-0.45)$ . S-функция для квадрата с прямоугольным вырезом будет иметь вид:  $\omega = (f_{11} \overset{a}{\wedge}_k f_{12}) \overset{a}{\wedge}_k (f_{21} \overset{a}{\vee}_k f_{22})$ .

На рис. 2 показано решение обратной задачи для  $b=1$ , на рис. 3 - для  $b=2 - \sqrt[8]{2}$ .

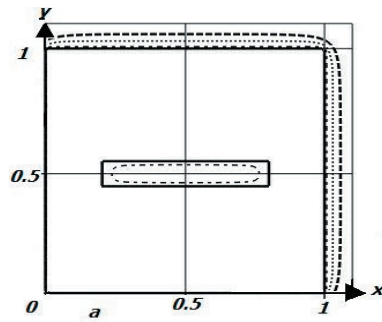


а)

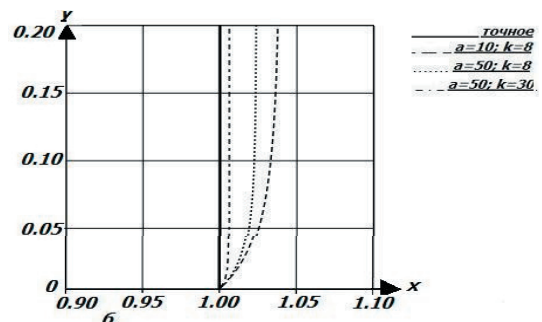


б)

Рис. 2. Решение обратной задачи аналитической геометрии для квадрата  $x \in [0;1], y \in [0;1]$  с прямоугольным вырезом шириной 0.1 и длиной 0.6,  $b=1$   
а - общий вид, б - угол квадрата



а)

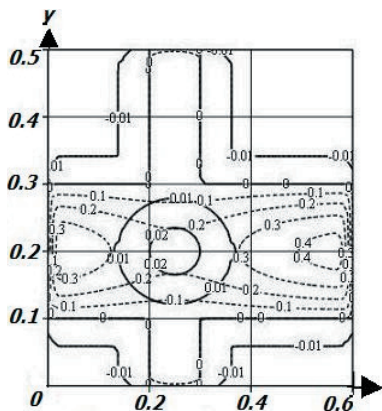


б)

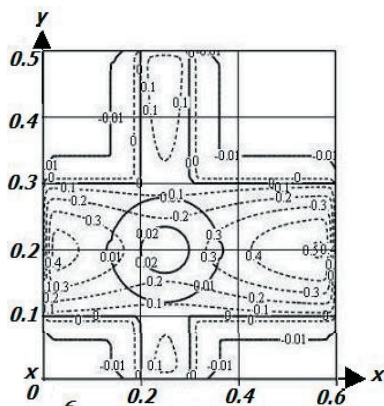
Рис. 3. Обратная задача аналитической геометрии для квадрата  $x \in [0;1], y \in [0;1]$ , с прямоугольным вырезом шириной 0.1 и длиной 0.6,  $b=2 - \sqrt[8]{2}$ , а - общий вид, б - угол квадрата

На рис. 4а и 4б показаны линии уровня функции  $\omega$  для креста, образованного полосами  $0.1 \times 0.5$  и  $0.6 \times 0.2$  с центром в точке  $(0.25; 0.2)$ . Опорные функции  $f$  для первой полосы:  $f_{11} = (0.3 - x)(0.2 - E)$ ;  $f_{12} = y(0.5 - y)$ ; второй полосы:  $f_{21} = E(0.6 - E)$ ;  $f_{22} = (0.3 - y)(y - 0.1)$ . S-функция для креста:

$$\omega = (f_{11} \wedge_k^a f_{12}) \vee_k^a (f_{21} \wedge_k^a f_{22})$$



а)



б)

Рис. 4. Линии уровня функции  $\omega$  для креста, сплошная линия - точное решение, пунктирная - асимптотическое приближение  $k=100, a=100, a-b=1, b-b=2-\sqrt[3]{2}$

### 6. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу теплопроводности с нестационарными граничными условиями, характеризующуюся большой скоростью нагрева для бесконечной призмы прямоугольного поперечного сечения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial Fo} &= \Delta T(x,y,Fo) + F(x,y,Fo) \\ \left( \pm \frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial x} + Bi(Fo)T(x,y,Fo) \right) \Big|_{x=1, x=-1} &= Bi(Fo)T_{cp}(x,y,Fo) \\ \left( \pm \frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial y} + Bi(Fo)T(x,y,Fo) \right) \Big|_{y=1, y=-1} &= Bi(Fo)T_{cp}(x,y,Fo) \\ T(x,y,0) &= \theta(x,y), \quad x,y \in \Omega, \quad 0 < Fo < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

Точное решение модельной задачи выберем в виде:

$$\begin{aligned} T_r(x,y,Fo) &= T_{cp}(Fo) + (\varphi(x) - f_{1r}(x)) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{1r}(x)}{\partial x} + \\ &+ f_{1r}(x) Bi(Fo) \varphi(x) \times (\psi(y) - f_{2r}(y)) \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \frac{\partial f_{2r}(y)}{\partial y} + \\ &+ f_{2r}(y) Bi(Fo) \psi(y); \quad x,y \in \Omega, \quad 0 < Fo < \infty; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1 + 100 \cdot x^2}{1 + 0.1 \cdot x^2}, \quad \psi(y) = \frac{1 + 100 \cdot y^2}{1 + 0.1 \cdot y^2},$$

$$f_{1r}(x) = 0.5(1 - x^2),$$

$$f_{2r}(y) = 0.5(1 - y^2), \quad Bi(Fo) = e^{-10Fo},$$

$$T_{cp}(Fo) = 1000(1 - e^{-Fo}), \quad x,y \in \Omega, \quad 0 < Fo < \infty.$$

Решим задачу численно-аналитическим методом, применяя структурно-разностный подход. Структуру решения задачи (5) представим в виде:

$$T(x,y,Fo) = \Phi_0(x,y,Fo) + \sum_{k,l} C_{k,l} \chi_{k,l}(x,y,Fo) \quad (7)$$

$$345 \Phi_0(x,y,F) = T_{cp}(F); \quad \theta(x,y) = T_B(x,y,0)$$

$$F(x,y,Fo) = \frac{\partial T_B(x,y,Fo)}{\partial Fo} - \left( \frac{\partial^2 T_B(x,y,Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_B(x,y,Fo)}{\partial y^2} \right);$$

$$\chi_{k,l}(x,y,Fo) = P_k(x)P_l(y) -$$

$$-\bar{\omega}_1(x,y) \left( \frac{\partial P_k(x)}{\partial x} P_l(y) d_1(x) - Bi(Fo) P_k(x) P_l(y) \right) \Big|_{x=1} -$$

$$-\bar{\omega}_2(x,y) \left( \frac{\partial P_l(y)}{\partial y} P_k(x) d_2(y) - Bi(Fo) P_k(x) P_l(y) \right) \Big|_{y=1};$$

$$f_1(x) = (1 - x^2), \quad f_2(y) = (1 - y^2); \quad d_1(x) = -x; \quad d_2(y) = -y$$

$C_{k,l}$  - неизвестные коэффициенты,  $\Phi_0(x,y,Fo)$  - функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям, а  $\chi_{k,l}(x,y,Fo)$  - базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям;  $P_k(x), P_l(y)$  - нормированные полиномы Чебышева.

При использовании PS-операций [5]:

$$\bar{\omega}_1(x,y) = \omega_1(x,y); \quad \bar{\omega}_2(x,y) = \omega_2(x,y);$$

$$\omega_1(x,y) = 0.5f_1(x) + f_2(y)^2 -$$

$$-k \sqrt{(0.5f_1(x)(1 + 0.25f_1(x)))^k + (f_2(y)(1 + 0.25f_2(y)))^{2k}};$$

$$\omega_2(x,y) = 0.5f_2(y) + f_1(x)^2 -$$

$$-k \sqrt{(0.5f_2(y)(1 + 0.25f_2(y)))^k + (f_1(x)(1 + 0.25f_1(x)))^{2k}}.$$

При решении, с использованием S-операций:

$$\bar{\omega}_l(x, y) = \omega_l(x, y) \cdot [\omega_l(x, y)^2 + (\text{grad}(\omega_l(x, y)))^2]^{-0.5};$$

l = 1, 2.

$$\omega_1(x, y) = -1 + a^{0.5f_1(x)} + a^{f_2^2(y)} - \sqrt{a^{k \cdot 0.5f_1(x)} + a^{k f_2^2(y)}};$$

$$\omega_2(x, y) = -1 + a^{f_1^2(x)} + a^{0.5f_2(y)} - \sqrt{a^{k f_1^2(x)} + a^{0.5k f_2(y)}};$$

a = 10; k = 8.

Для построения дискретной модели используем пятислойную разностную схему типа «большой крест» [6] по координатам и трехслойную разностную схему по времени [7] соответственно:

$$(\Delta T)_{ij}^s = \frac{1}{12h^2} (-T_{i-2,j}^s - T_{i,j-2}^s - T_{i+2,j}^s - T_{i,j+2}^s +$$

$$+ 16(T_{i-1,j}^s + T_{i,j-1}^s + T_{i+1,j}^s + T_{i,j+1}^s) - 60T_{ij}^s);$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial Fo}\right)_{ij}^s = \frac{T_{ij}^{s-1} - 4 \cdot T_{ij}^s + 3 \cdot T_{ij}^{s+1}}{2 \cdot Fo}$$

В табл. 2 приведена температура пластины на иррегулярном этапе теплового процесса на временном интервале – от 0.001Fo до 0.02Fo в трех точках пластины и максимальные относительные погрешности. Вычисления проводились с шагом по времени 0.001Fo для 28 координатных функций и сетки с 900 узлами. В верхних ячейках строк таблицы приведены значения для решения, вычисленного с помощью PS-операций (k=8), в средних - с помощью S-операций (k=8, a=10), в нижних - точные значения.

**Таблица 2**

**Температура пластины и максимальная относительная погрешность вычислений температуры задачи (5)**

Fo		(0;0)	(0.5;0.5)	(1;1)	max ε, %
0.001	PS	12,17684	2798,05293	8440,58785	0,00099
	S	12,29774	2798,06218	8440,56520	0,00058
	точн.	12,26010	2798,08000	8440,57400	-
0.01	PS	101,80120	2983,91468	8530,17686	0,00130
	S	101,94250	2983,93258	8530,07882	0,00072
	точн.	101,91218	2983,95700	8530,08000	-
0.02	PS	200,49166	3202,40557	8628,70946	0,00153
	S	200,63402	3202,42399	8628,58028	0,00074
	точн.	200,60763	3202,45100	8628,59200	-

Максимальная относительная погрешность результатов по отношению к точному решению задачи теплопроводности с нестационарными граничными условиями для призмы прямоугольного сечения, при использовании S-функций была равной 0.00074%, при использовании PS-функций была равной 0.00153%, при использовании R-функций была равной 6.39447%.

**7. Выводы**

В разделе статьи «постановка проблемы» приводится пример «нефизичности» точного решения задачи Блазиуса при x=0 в связи с тем, что на линии x=0 скорость жидкости, полученная на базе точного решения, разрывна. В статье [8] автор данной статьи решил задачу Блазиуса в параболической системе координат. Полубесконечная пластина в асимптотическом приближении описывается параболой. В этом случае эффекты нефизичности решения задачи при x=0 отсутствуют. Данный пример характеризует необходимость замены в математических моделях физических процессов кусочно-гладких границ и соответствующих решений обратных задач аналитической геометрии в формально-строгом математическом варианте на границе с непрерывными первыми и вторыми производными, для которых математически точные границы исследуемых областей являлись бы асимптотами. В этом случае ликвидируются сингулярные эффекты в угловых точках областей в приближенных аналитических решениях задач математической физики.

Построенные в статье S-операции и S-функции впервые в мировой научной практике эффективно решают эту задачу для областей практически любой сложной формы. Коэффициенты алгебраических систем Ритца, Бубнова-Галеркина и других алгебраических систем в этих случаях можно будет вычислять с любой степенью точности не «отступая» от угловых точек границы области при вычислении двойных интегралов.

В задачах с трещинами в исследуемой области можно будет эффективно заменить граничные условия с «фиктивными» сингулярными особенностями в угловых точках границы области на регулярные граничные условия по всей границе области в асимптотическом приближении ее к реальной границе. Базисные функции приближенных структур решения задач математической физики, включая задачу теплопроводности, точно удовлетворяющие граничным условиям, можно будет впервые строить в виде функций с непрерывными первыми и вторыми производными.

Приведенные в статье результаты решения задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями с использованием S-функций иллюстрируют высокую эффективность предлагаемого подхода. Решения обратных задач аналитической геометрии в асимптотическом приближении на базе S-функций показывают высокую эффективность регуляризации приближенных аналитических решений задач математической физики для областей сложной формы с кусочно-гладкими границами.

*Выражаю глубокую благодарность моему аспиранту Кобриневич Ю.О. за большую проделанную научно-техническую работу по проведению серии расчетов с использованием S-, PS- и R-функций.*

**Литература**

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. - М.: Наука, 1978. - 756 с.
2. Гринберг, Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений [Текст] / Г.А. Гриндберг. -М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. - 727 с.

3. Рвачев, В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах [Текст] / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. - Киев: Наук. думка, 1976. - 288 с
4. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В.Л. Рвачев. - Киев: Наук. Думка, 1982. - 552 с.
5. Слесаренко, А.П. Идентификация нелинейной нестационарной зависимости мощности источника энергии от температуры на базе вариационно-структурного и проекционного методов [Текст] / А.П. Слесаренко, Н.А. Сафонов // Проблемы машиностроения. - 2010. - Т.13, №6. - С. 58-63.
6. Ильин, В.П. Численные методы решения задач электрооптики [Текст] / В.П. Ильин. - Наука, сибирское отделение, 1974. - 202 с.
7. Ворожцов, Е.В. Сборник задач по теории разностных схем: Учеб. пособие [Текст] / Е.В. Ворожцов. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. - 41 с.
8. Слесаренко, А.П. Врахування особливостей у задачах пограничного шару на тілах складного профілю з сингулярними граничними умовами [Текст] / А.П. Слесаренко // Доп. АНУРСР, Сер. А – 1970. - №2. - С. 170-173.

*Використовуючи теоретико-інформаційну концепцію різноманіття за К. Шенноном у рамках інформаційних систем, сформульовані умови забезпечення функціональної стійкості бездротових сенсорних мереж, що самоконфігуруються*

*Ключові слова: сенсор, мот, стійкість, квазіоптимальність*

*Используя теоретико-информационную концепцию многообразия по К. Шеннону в рамках информационных систем, сформулированы условия обеспечения функциональной устойчивости беспроводных самоконфигурируемых сенсорных сетей*

*Ключевые слова: сенсор, мот, устойчивость, квазиоптимальность*

*In this article being formulated conditions to provide the functional stability of the wireless self-configurable sensor network using information-theoretic concept of diversity in information systems by K. Shannon*

*Keywords: sensor, mote, stability, quasioptimality*

УДК 519.72

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ ПРИ РАЗРАБОТКЕ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ (ЧАСТЬ 1)

**В. А. Иваненко**  
Аспирантка\*

E-mail: zlata\_ne@bk.ru

**А. Н. Зеленин**

Кандидат технических наук, профессор\*

\*Кафедра «Сети связи»

Харьковский национальный университет радиозлектроники

пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166

Контактный тел.: (057) 345-00-83

### 1. Введение

В настоящее время в области информационных технологий одним из актуальных направлений является создание нового вида сетевых структур - сенсорных сетей (Sensor Network – SN). Беспроводные сенсорные сети (БСС, Wireless Sensor Network – WSN) [6], представляют собой самоорганизующиеся сети, состоящие из множества беспроводных сенсорных узлов (мотов, от англ. mote – пылинка) распределенных в пространстве определенным образом и предназначенных как для сбора соответствующей информации (об окружающей среде, состоянии объекта контроля и мониторинга и т.п.), так и для целей ретрансляции (передачи) информации от соседних мотов к соответствующему назначенно-

му сетевому узлу (координатору, маршрутизатору, головному, оконечному или любому другому узлу сети). Взаимодействие сенсорных узлов между собой формирует сенсорную сеть заданной топологии (рис. 1).

Сенсорная сеть размещается на ограниченной территории и по современным оценкам может содержать около 60 тысяч узлов. [5].

Проектирование и реализация WSN требует решения разноплановых сложных проблем, относящихся к различным областям исследований.

Важнейшей из проблем является обеспечение высокой отказоустойчивости сети (в дальнейшем будем использовать термин «функциональная устойчивость»). Важность этой проблемы именно для сенсорных сетей определяется рядом факторов