

УДК 621.391

DOI: 10.15587/1729-4061.2019.160753

## Аналіз ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів

С. В. Панченко, С. І. Приходько, С. В. Козелков, М. А. Штомпель,  
В. В. Косенко, О. В. Шефер, О. І. Дунаєвська

*Показано, що для підвищення достовірності передавання інформації у безпроводових телекомунікаційних системах широко застосовуються згорткові коди спільно з різноманітними методами декодування. Наведено загальні принципи синтезу та параметри алгебраїчних несистематичних згорткових кодів з довільною швидкістю кодування та максимально досяжною кодовою відстанню.*

*Представлено основні етапи біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів з використанням механізму випадкового зміщення. Показано, що сутність представленого методу декодування полягає у застосуванні процедури диференційної еволюції з евристично визначеними параметрами. Також у даному методі використовується інформація про надійність прийнятих символів для знаходження найбільш надійного базису узагальненої породжувальної матриці. Додатково застосовується механізм випадкового зміщення для модифікації прийнятої послідовності з метою здійснення біоінспірованого пошуку на основі різних найбільш надійних базисів узагальненої породжувальної матриці.*

*За результатами досліджень визначено, що біоінспірований метод декодування алгебраїчних згорткових кодів забезпечує більшу ефективність у порівнянні з алгебраїчним методом декодування у каналі зв'язку з адитивним білим гауссовим шумом. В залежності від параметрів алгебраїчного згорткового коду та необхідного коефіцієнту помилок енергетичний виграш від кодування становить від 1,6 дБ до 3 дБ. Показано, що представлений біоінспірований метод декодування може бути використаний для згорткових кодів з великою довжиною кодового обмеження.*

*При цьому представлений метод декодування алгебраїчних згорткових кодів програє за ефективністю методу декодування Вітербі та турбокодам при достатній кількості ітерацій декодування*

*Ключові слова: безпроводові телекомунікаційні системи, згорткові коди, алгебраїчна структура, декодування, біоінспірований пошук*

### 1. Вступ

Впровадження новітніх телекомунікаційних послуг та необхідність надання доступу до інформаційних ресурсів на значній території обумовлює доцільність застосування безпроводових телекомунікаційних технологій.

Для забезпечення заданої достовірності передавання інформації у телекомунікаційних системах, побудованих на основі даних технологій,

застосовують різноманітні методи завадостійкого кодування. Зокрема, у безпроводових телекомунікаційних системах широке застосування отримали згорткові коди [1]. Синтез випадкових кодів даного класу заснований на комп'ютерному пошуку, що характеризується високою обчислювальною складністю та не гарантує отримання кодів із необхідними властивостями [2]. Для усунення даних обмежень були запропоновані згорткові коди з алгебраїчною структурою, так звані алгебраїчні згорткові коди. Дані коди засновані на узагальненні положень теорії блокових кодів, мають високі конструктивні кодові характеристики та покращені властивості.

У [3] запропоноване поліноміальне представлення згорткових кодів, що дозволило визначити їх циклічну структуру та отримати коди з великою вільною відстанню. У [4] представлено алгебраїчний підхід до декомпозиції будь-якого згорткового коду на декілька підкодів та наведено параметри отриманих циклічних згорткових кодів. У [5] розвинене поняття циклічності згорткових кодів та встановлено зв'язок між поліноміальним та векторним представленнями даних кодів на основі узагальнених циркулянтних матриць. У [6] представлено принципи побудови двічі циклічних згорткових кодів та показано, що окремі коди даного класу близькі до оптимальних. У [7] запропоновано новітній підхід до реалізації циклічної структури згорткових кодів та відповідних дуальних кодів на основі багаточленів спеціального виду. У [8, 9] представлено алгебраїчні принципи побудови згорткових кодів із заданою швидкістю кодування та необхідною кодовою відстанню, що мають властивості подібні до класичних блокових кодів. У [10] запропоновано алгебраїчний підхід до визначення породжувальних багаточленів та конструктивних параметрів згорткових кодів через обраний недвійковий циклічний блоковий код.

Класичне декодування випадкових згорткових кодів за методом Вітербі засноване на пошуку у кодовій решітці з використанням імовірнісних процедур. Через високу обчислювальну складність даний метод декодування може бути застосований лише до кодів з невеликою довжиною кодового обмеження. Крім того, при реалізації даного методу декодування не враховується можлива алгебраїчна структура коду [11].

Таким чином, дослідження, спрямовані на подальше удосконалення та розвиток методів декодування згорткових кодів шляхом використання інформації щодо їх алгебраїчної структури, а також визначення їх характеристик та властивостей, слід вважати актуальними.

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

На даний момент в основі більшості методів декодування алгебраїчних згорткових кодів лежить підхід, який враховує циклічну структуру даних кодів за аналогією з блоковими кодами.

У [12] представлено алгебраїчний метод декодування окремого класу циклічних згорткових кодів, що гарантує виправлення фіксованої кількості помилок. При цьому границя успішного декодування визначається мінімальною кодовою відстанню коду. Згідно даного методу прийнята

послідовність розбивається на окремі блоки. Після накопичення декількох блоків розпочинається декодування першого з отриманих блоків прийнятої послідовності. На кожному етапі даного методу здійснюється часткове декодування визначеного циклічного блокового коду.

У [13] представлено принципи побудови та метод декодування згорткових кодів зі спеціальною циклічною структурою та максимально досяжною кодовою відстанню. Представлений метод декодування заснований на процедурі знаходження позицій та значень помилок відповідно до принципу декодування за мінімальною відстанню. При цьому обчислювальна складність даного методу практично не залежить від розміру кінцевого поля та зростає поліноміально зі збільшенням пам'яті коду. Завдяки даним особливостям представлений метод декодування може бути застосований до згорткових кодів з високими конструктивними характеристиками.

В [14] розглянуто особливості формування кодової послідовності згорткових кодів, параметри яких задаються породжувальним багаточленом обраного циклічного коду. У роботі показано, що декодування даних кодів можна здійснити шляхом послідовного декодування кодових слів даного циклічного коду. Згідно даного методу на початку декодування визначається синдром для кожного блоку прийнятої послідовності. Після цього знаходяться помилки у прийнятому блоці шляхом обчислення системи рівнянь у кінцевому полі та відбувається відновлення кодового слова.

Через обробку лише жорстких рішень наведені вище алгебраїчні методи декодування згорткових кодів характеризуються відносно низькою корегувальною здатністю та невисокою ефективністю.

Водночас, званою перевагою імовірнісного декодування згорткових кодів є можливість врахування інформації про надійність прийнятих символів, тобто здійснення обробки м'яких рішень. Даному напряму розвитку методів декодування випадкових згорткових кодів, зокрема, кодів з кільцевою структурою.

Зокрема, у [15] запропоновано двоетапний підхід до декодування циклічно замкнених згорткових кодів, що заснований на методі Вітербі. Даний підхід використовує припущення, що усі можливі стани у кодовій решітці з рівною ймовірністю можуть виступати у якості початкового стану. На першому етапі здійснюється пошук стану у кодовій решітці, що має найбільшу правдоподібність з використанням модифікованого методу Вітербі з м'яким виходом. Після знаходження даного стану використовуються циркулярні властивості даних кодів та знову застосовується декодування Вітербі, що розпочинається та завершується на обраному стані, визначеному на попередньому етапі. Ефективність даного методу декодування за критерієм помилки декодування близька до оптимальної. При цьому метод має фіксовану та відносно низьку обчислювальну складність у заданому діапазоні відношення сигнал/шум.

У [16] здійснено порівняльний аналіз ефективності різних підходів до спискового декодування Вітербі згорткових кодів з кільцевою структурою, що використовуються для передавання коротких інформаційних послідовностей.

Показано, що у даному випадку найбільшу ефективність забезпечує циркулярне паралельне декодування Вітербі за списками, що характеризується найменшою обчислювальною складністю.

У [17] запропоновано метод декодування за максимумом правдоподібності циклічно замкнених згорткових кодів зі зменшеною складністю. Даний метод заснований на двонаправленому пошуку за першим пріоритетом. Представлений підхід забезпечує стабільну обчислювальну складність декодування зі збільшенням довжини інформаційної послідовності та довжини кодового обмеження згорткового коду.

Також перспективним напрямом розвитку методів м'якого декодування згорткових кодів є застосування новітніх підходів на основі математичного апарату природних обчислень.

У [18] запропоновано метод декодування згорткових кодів з довільною швидкістю кодування на основі рекурентних нейронних мереж та наведено стратегії щодо оптимізації декодування. Проведені у роботі дослідження показали, що даний метод декодування забезпечує достовірність передавання інформації на рівні з методом Вітербі, але з меншою обчислювальною складністю та можливістю паралельної обробки інформації.

У [19] представлено адаптивний метод м'якого декодування згорткових кодів на основі штучних нейронних мереж. У даній роботі тренування нейронної мережі здійснювалося за принципом навчання з учителем, а для оптимізації системних параметрів методу використовувалося комп'ютерне моделювання. У роботі показано, що ефективність запропонованого методу декодування близька до методу Вітербі. Характерними властивостями даного методу є адаптивність до умов передавання інформації, зменшення часу тренування та декодування, неітеративний принцип обробки інформації та можливість реалізації паралельного декодування.

Суттєвим недоліком наведених вище методів м'якого декодування згорткових кодів, заснованих на пошуку у кодовій решітці та використанні нейронних мереж, є швидке зростання обчислювальної складності зі збільшенням довжини кодового обмеження, що значно звужує область їх застосування на практиці. Крім того, для підвищення ефективності та зменшення обчислювальної складності декодування доцільно враховувати алгебраїчну структуру обраного згорткового коду.

З іншого боку, новітнім підходом у теорії блокових кодів є представлення задачі декодування у вигляді оптимізаційної задачі, для вирішення якої доцільно застосовувати біоінспіровані процедури, зокрема, генетичні алгоритми.

У [20] запропоновано методи декодування алгебраїчних блокових кодів, в основі яких лежить спільне застосування генетичного алгоритму, інформаційних множин та методу Чейза. У роботі показано, що ефективність представленого методу жорсткого декодування близька до методу Берлекемпа-Мессі. Також з проведених досліджень випливає, що запропонований метод м'якого декодування блокових кодів забезпечує енергетичний вигравш від кодування на рівні з існуючим комбінованим методом декодування.

Для зниження обчислювальної складності м'якого декодування блокових кодів на основі генетичного алгоритму у [21] запропоновано використовувати перевірочну матрицю, тобто здійснювати декодування у дуальному просторі. У роботі досліджено характеристики даного підходу при різних параметрах генетичного алгоритму та заданих параметрах обраних класичних блокових кодів. Показано, що запропонований підхід забезпечує додатковий вигравш від кодування у порівнянні з існуючими методами декодування для різних моделей каналів зв'язку.

У [22] наведено методи декодування лінійних блокових кодів у дуальному просторі на основі компактного генетичного алгоритму зі збільшеним розміром турніру. У роботі запропоновано різні підходи до збільшення розміру турніру та визначено вплив параметрів обраного генетичного алгоритму на якість декодування алгебраїчних блокових кодів. Показано, що запропоновані методи декодування забезпечують достатньо високий вигравш від кодування та характеризуються зменшеною обчислювальною складністю.

Узагальнення даних результатів на випадок згорткових кодів запропоновано у [23]. У даній роботі представлено основні етапи методу м'якого декодування алгебраїчних згорткових кодів на основі біоінспірованих процедур. Ключовим етапом даного методу є застосування узагальненого біоінспірованого пошуку для визначення передбачуваної кодової послідовності. Додатковими складовими даного методу є знаходження найбільш надійного базису узагальненої породжувальної матриці алгебраїчного згорткового коду та застосування механізму випадкового зміщення. Даний метод декодування можна розглядати як подальший розвиток методів декодування згорткових кодів на основі природних обчислень та у якості альтернативи жорсткому декодуванню алгебраїчних згорткових кодів.

Однак у [23] представлена лише загальна концептуальна ідея даного підходу та не наведено відомостей щодо характеристик представленого методу декодування для заданих умов передавання інформації. Зокрема, важливою задачею є визначення ефективності даного методу декодування алгебраїчних згорткових кодів при застосуванні конкретної біоінспірованої процедури та впливі адитивних завад, що обумовлює необхідність проведення подальших досліджень в даному напрямку.

### **3. Ціль та задачі дослідження**

Ціль дослідження полягала в здійсненні оцінки ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів в каналі зв'язку з адитивним білим гауссовим шумом (АБГШ).

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні задачі:

– проаналізувати принципи синтезу та визначено визначити параметри алгебраїчних несистематичних згорткових кодів з довільною швидкістю кодування;

– розглянути основні етапи та визначено визначити особливості біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів з використанням механізму випадкового зміщення;

– провести оцінку ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів при впливі АБГШ.

#### **4. Методи для аналізу ефективності біоінспірованого декодування алгебраїчних згорткових кодів**

##### **4. 1. Принципи синтезу та параметри алгебраїчних згорткових кодів**

У [10] показано, що узагальнений породжувальний багаточлен згорткового коду фактично є породжувальним багаточленом деякого недвійкового блокового коду, який повністю визначає характеристики даного згорткового коду.

Розглянемо принципи синтезу алгебраїчних несистематичних згорткових кодів з довільною швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  та максимально досяжною вільною кодовою відстанню  $d_\infty$  на основі породжувального багаточлену  $(N, K, D)$  коду Ріда-Соломона.

Нехай на вхід згорткового кодеру надходить нескінченна послідовність інформаційних символів, що розділені на кадри довжиною  $k_0$ :

$$i = (i_{0,1}, \dots, i_{0,k_0}, i_{1,1}, \dots, i_{1,k_0}, i_{2,0}, \dots, i_{2,k_0}, \dots),$$

де  $i_{i,j}$  – інформаційні символи, об'єднані у кадри по  $k_0$  елементів,  $i_{i,j} \in GF(q)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, k_0$ .

Тоді у поліноміальній формі запису нескінчену інформаційну послідовність несистематичного згорткового коду зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  можна записати як:

$$i(x) = (i_{0,1}, \dots, i_{0,k_0}) + (i_{1,1}, \dots, i_{1,k_0})x + (i_{2,0}, \dots, i_{2,k_0})x^2 + \dots \quad (1)$$

Набори інформаційних символів несистематичного згорткового коду зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  можна розглядати як елементи поля  $GF(q^m)$ , що є розширенням вихідного поля  $GF(q)$ , при цьому довжина інформаційного кадру доповнюється нулями до значення  $m = n_0$ .

Тоді інформаційний багаточлен (1) представимо наступним чином:

$$i(x) = I_0 + I_1x + I_2x^2 + \dots, \quad (2)$$

де  $I_i$  – інформаційні символи,  $I_i \in GF(q^m)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$

З іншого боку, багаточлен (2) відповідає інформаційному вектору нескінченної довжини, який отримується у результаті зчитування коефіцієнтів при формальній змінній  $x$ :

$$i = (I_0, I_1, I_2, \dots). \quad (3)$$

Отже, отримані недвійкові інформаційні символи даного згорткового коду формують множину  $H \subseteq GF(q^m)$ , розмір якої дорівнює  $|H| = q^{k_0} \leq q^m$ , при  $k_0 \leq m$ .

Відповідно до [10] деякий несистематичний згортковий код зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  можна алгебраїчно задати узагальненим породжувальним багаточленом, який фактично є породжувальним багаточленом коду Ріда-Соломона:

$$G(x) = (x - \alpha^b)(x - \alpha^{b+1}) \dots (x - \alpha^{b+D-2}), \quad (4)$$

де  $\alpha^b, \alpha^{b+1}, \dots, \alpha^{b+D-2}$  – корені багаточлену  $G(x)$ , що належать полю  $GF(q^m)$ ;  $b$  – невід’ємне ціле число;  $D$  – мінімальна кодова відстань коду Ріда-Соломона.

Після здійснення обчислень узагальнений породжувальний багаточлен згорткового коду (4) можна представити як

$$G(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_u x^u, \quad (5)$$

де  $u$  – пам’ять згорткового коду, що відповідає числу перевірючих символів у кодовому слові коду Ріда-Соломона,  $u=D-1$ ;  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_u$  – корені багаточлену  $G(x)$ , що належать полю  $GF(q^m)$ .

Тоді процес згорткового кодування інформаційної послідовності у поліноміальній формі відповідає множенню інформаційного багаточлену (2) на узагальнений породжувальний багаточлен (5):

$$c(x) = i(x)G(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots, \quad (6)$$

де  $C_i$  – кодові символи згорткового коду,  $C_i \in GF(q^m)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$

Для отримання  $q$ -ої кодової послідовності необхідно здійснити відображення кодових символів, отриманих відповідно до (6), у набори елементів поля  $GF(q)$ , що відповідають кадрам кодової послідовності довжиною  $n_0$ :

$$c(x) = (c_{0,1}, \dots, c_{0,n_0}) + (c_{1,1}, \dots, c_{1,n_0})x + (c_{2,1}, \dots, c_{2,n_0})x^2 + \dots, \quad (7)$$

де  $c_{i,k}$  – кодові символи, що об’єднані у кадри по  $n_0$  елементів,  $c_{i,k} \in GF(q)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k=1, 2, \dots, n_0$ .

Також описаний вище процес згорткового кодування можна представити у векторній формі з використанням нескінченної породжувальної матриці, що

представлена в узагальненому виді. Для зручності векторного представлення процесу кодування алгебраїчним несистематичним згортковим кодом зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  перетворимо узагальнений породжувальний багаточлен (5) наступним чином:

$$G(x) = G_0 + G_1x + G_2x^2 + \dots + G_u x^u, \quad (8)$$

де  $G_0, G_1, \dots, G_u$  – символи, що належать полю  $GF(q^m)$ , які задають вид взаємного з'єднання регістрів згорткового кодеру.

Тоді узагальнена породжувальна матриця алгебраїчно заданого несистематичного згорткового коду зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  матиме таку форму:

$$G = \begin{pmatrix} G(x) \\ xG(x) \\ x^2G(x) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отже, процес згорткового кодування у векторній формі запису відповідає множенню інформаційного вектору (3) на породжувальну матрицю (9)

$$c = iG = (C_0, C_1, C_2, \dots)$$

з подальшим відображенням символів поля  $GF(q^m)$  у вектори над полем  $GF(q)$  для отримання кодового вектору, що відповідає багаточлену (7):

$$c = (c_{0,1}, \dots, c_{0,n_0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,n_0}, c_{2,0}, \dots, c_{2,n_0}, \dots).$$

$$V = uk_0.$$

У [10] показано, що несистематичний  $(n_0, k_0, V)$  згортковий код зі швидкістю кодування  $R = k_0 / n_0$  над полем  $GF(q)$ , алгебраїчно заданий узагальненим породжувальним багаточленом (8) або породжувальною матрицею (9), має наступні параметри: довжина інформаційного кадру  $k_0 = \log_q(H)$  ( $H \subseteq GF(q^m)$ ); довжина кадру кодової послідовності  $n_0 = m$ ; пам'ять коду  $u$ ; довжина кодового обмеження довжина інформаційного блоку  $k = (u + 1)k_0$ ; довжина кодового блоку  $n = (u + 1)n_0 = kn_0 / k_0$ ; вільна кодова відстань  $d_\infty \geq D$ .



## 4.2. Біоінспірований метод декодування алгебраїчних згорткових кодів

Обмежимо довжину інформаційної послідовності, що надходить на вхід згорткового кодеру до значення  $K$ , тоді з урахуванням (6) отримаємо кодовий багаточлен:

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{N-1}x^{N-1}. \quad (10)$$

При цьому багаточлен (10) формально можна представити у вигляді кодового багаточлена  $(N, K, D)$  коду Ріда-Соломона, а відповідне двійкове відображення даної кодової послідовності має вид

$$c(x) = (c_{0,1}, \dots, c_{0,n_0}) + (c_{1,1}, \dots, c_{1,n_0})x + \dots + (c_{N-1,0}, \dots, c_{N-1,n_0})x^{N-1}. \quad (11)$$

Припустимо, що передача інформації з використанням даного алгебраїчного згорткового коду здійснюється з використанням двійкової фазової модуляції, тоді кодову послідовність (11) можна представити в поліноміальному вигляді відповідною біполярною кодовою послідовністю:

$$v(x) = (v_{0,1}, \dots, v_{0,n_0}) + (v_{1,1}, \dots, v_{1,n_0})x + \dots + (v_{N-1,0}, \dots, v_{N-1,n_0})x^{N-1}, \quad (12)$$

де  $v_{i,k}$  – біполярні кодові символи, об'єднані в кадри по  $n_0$  елементів,  $v_{i,k} \in \{1, -1\}$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k=1, 2, \dots, n_0$ .

Тоді на виході каналу зв'язку з АБГШ прийнята послідовність в поліноміальному виді дорівнює

$$r(x) = (r_{0,1}, \dots, r_{0,n_0}) + (r_{1,1}, \dots, r_{1,n_0})x + \dots + (r_{N-1,0}, \dots, r_{N-1,n_0})x^{N-1}, \quad (13)$$

де  $r_{i,k}$  – прийняті символи, об'єднані в кадри по  $n_0$  елементів,  $r_{i,k} \in R$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k=1, 2, \dots, n_0$ .

Слід відмітити, що поліноміальному представленню алгебраїчних згорткових кодів на основі (11)–(13) однозначно відповідає матричне представлення. В даному випадку інформаційна, кодова та прийнята послідовності можуть бути представлені у вигляді векторів, а узагальнений породжувальний багаточлен алгебраїчного згорткового коду (5) відповідає узагальненій породжувальній матриці (9).

З урахуванням того, що алгебраїчні згорткові коди можуть бути представлені як двійкове відображення кодів Ріда-Соломона, тобто фактично у вигляді довгих двійкових  $(N' = Nn_0, K' = Kn_0)$  блокових кодів, у [23] було запропоновано біоінспірований метод м'якого декодування даних кодів з використанням механізму випадкового зміщення.

Основні етапи даного методу декодування алгебраїчних згорткових кодів на основі процедури диференційної еволюції [24] наведено нижче.

*Етап 1.* Ініціалізація.

Визначення початкової ітерації  $l=0$ , максимального числа ітерацій декодування  $L$ , параметрів процедури диференційної еволюції (розмір популяції  $NP$ , максимальна кількість поколінь  $L_{\max}$ , коефіцієнт впливу  $a$ , імовірність «схрещення»  $b$ ), величини випадкового зміщення  $\theta$  та формування прийнятої послідовності  $q = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1})$ , де  $q_i = |r_i|$ .

*Етап 2.* Впорядкування прийнятої послідовності на основі інформації про надійність символів.

Розташування позицій прийнятої послідовності  $q$  за зменшенням надійності елементів  $q_i = |r_i| \geq q_j = |r_j|$ , що визначає перестановку  $\pi_1$  при  $l=0$  та перестановку  $\pi'_1$  при  $l>0$ .

*Етап 3.* Знаходження найбільш надійного базису породжувальної матриці алгебраїчного згорткового коду.

Упорядкування стовбців породжувальної матриці (9) на основі  $\pi_1$  при  $l=0$  або  $\pi'_1$  при  $l>0$ , визначення найбільш надійного базису даної матриці та перетворення отриманої матриці в систематичну форму  $G_s$  при  $l=0$  або  $G'_s$  при  $l>0$  на основі перестановки  $\pi_2$  при  $l=0$  або  $\pi'_2$  при  $l>0$ .

*Етап 4.* Біоінспірований пошук передбачуваної кодової послідовності алгебраїчного згорткового коду з використанням процедури диференційної еволюції.

*Крок 4.1.* Ініціалізація популяції векторів рішень (інформаційних послідовностей алгебраїчного згорткового коду) та встановлення номеру початкового покоління  $g=1$ .

Перший вектор рішень  $\tilde{i}_{1,g}$  формується шляхом жорсткого рішення для перших  $K'$  символів упорядкованої послідовності  $q$ , яке відповідає найбільш надійній інформаційній послідовності. Решта векторів рішень  $\tilde{i}_{2,g}, \tilde{i}_{3,g}, \dots, \tilde{i}_{NP,g}$  генерується випадковим чином.

*Крок 4.2.* Вибір цільового вектору рішень  $\tilde{i}_{v,g}$ ,  $v \in [1, NP]$ .

*Крок 4.3.* Формування мутантного вектору рішень з використанням оператора диференційної мутації:

$$\tilde{i}_{v,g+1} = \tilde{i}_{v,g} + a \cdot (\tilde{i}_{r_2,g} - \tilde{i}_{r_3,g}), \quad (13)$$

де  $\tilde{i}_{r_1,g}, \tilde{i}_{r_2,g}, \tilde{i}_{r_3,g}$  – випадкові вектори рішень з поточного покоління  $g$ ,  $\tilde{i}_{r_1,g} \neq \tilde{i}_{r_2,g} \neq \tilde{i}_{r_3,g} \neq \tilde{i}_{v,g}$ ,  $v \in [1, NP]$ ;  $a$  – коефіцієнт впливу,  $a \in [0, 2]$ .

*Крок 4.4.* Формування пробного вектору рішень з використанням оператора схрещення:

$$\tilde{i}'_{v,g+1} = (\tilde{i}'_{w,v,g+1}, \tilde{i}'_{w,v,g+1}, \dots, \tilde{i}'_{w,v,g+1}), \quad (14)$$

де  $\tilde{i}'_{w,v,g+1}$  – елементи пробного вектору рішень,  $w=1, 2, \dots, K'$ ,  $v \in [1, NP]$ , що визначаються наступним чином

$$\tilde{i}'_{w,v,g+1} = \begin{cases} \tilde{i}'_{w,v,g+1}, & \text{якщо } U_w \leq b \text{ або } w = w_r, \\ \tilde{i}'_{w,v,g}, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де  $U_w$  – випадкове дійсне число, що генерується за рівномірним законом розподілу у діапазоні  $[0, 1]$ ;  $b$  – імовірність «схрещення»,  $b \in [0, 1]$ ;  $w_r$  – випадковий індекс, що визначає елемент пробного вектору рішень.

*Крок 4.5.* Кодування отриманого пробного вектору рішень (інформаційної послідовності) з використанням модифікованої породжувальної матриці алгебраїчного згорткового коду  $G_s$  (або  $G'_s$ ).

*Крок 4.6.* Виконання операції селекції.

Здійснення оцінки якості пробного вектору рішень (та відповідної кодової послідовності алгебраїчного згорткового коду) шляхом обчислення функції невідповідності кореляції, що відіграє роль цільової функції у процедурі диференційної еволюції:

$$E(r, v) = \sum_{i: r_i \cdot v_i < 0} |r_i|, \quad (15)$$

де  $|r_i|$  – «надійність» прийнятих символів, яка визначається абсолютним значенням (амплітудою) символів.

Якщо для пробного вектору рішень (14) цільова функція (15) має менше значення, ніж для цільового вектору рішень (13), то даний вектор замінює цільовий вектор рішень у наступному поколінні  $g=g+1$ . У протилежному випадку поточний цільовий вектор рішень переходить у наступне покоління  $g=g+1$ .

*Крок 4.7.* Якщо максимальна кількість поколінь  $g \leq L_{\max}$ , то здійснюється перехід до кроку 4.1; інакше – визначається найкращий вектор рішень (та відповідна кодова послідовність алгебраїчного згорткового коду) та виконується перехід до етапу 5.

*Етап 5.* Застосування випадкового зміщення до елементів прийнятої послідовності.

Якщо число ітерацій  $l \leq L$ , то здійснюється перехід до етапу 2 після формування елементів пробного вектору  $r'$ :

$$r'_i = r_i + \theta,$$

де  $\theta$  – випадкове зміщення, що являє собою двійкову випадкову величину, яка приймає з рівною імовірністю значення  $\pm a$ , де  $a$  – деяке дійсне число.

У [25] показано, що використання даного механізму дозволяє випадковим чином здійснити обмін позиціями між групами символів прийнятої послідовності з різною надійністю. Фактично представлений механізм дозволяє сформувати новий найбільш надійний базис з кращими характеристиками шляхом виключення деяких помилкових позицій.

*Етап 6.* Формування оцінки переданої кодової послідовності за допомогою зворотного відображення та завершення процесу декодування.

Після досягнення максимальної кількості ітерацій декодування відбувається формування оцінки переданої кодової послідовності шляхом зворотного відображення найкращої кодової послідовності, отриманої на етапі 4:

$$y' = (y'_0, y'_1, \dots, y'_{N'-1}) = \pi'_2[\pi'_1[r]].$$

Таким чином, ключовою особливістю представленого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів є визначення передбачуваної кодової послідовності з використанням біоінспірованого пошуку. Також важливою складовою даного методу є знаходження найбільш надійного базису для різних пробних векторів, які отримуються за допомогою механізму випадкового зміщення.

При цьому на нульовій ітерації знаходиться найбільш надійний базис безпосередньо для прийнятої послідовності, а на наступних ітераціях формуються нові найбільш надійні базиси для модифікованих прийнятих послідовностей, отриманих у результаті застосування механізму випадкового зміщення. Це дозволяє генерувати нові кодові послідовності алгебраїчного згорткового коду з використанням оновлених наборів найбільш надійних базисів для заданої прийнятої послідовності, що призводить до підвищення ефективності біоінспірованого пошуку передбачуваної кодової послідовності.

Обчислювальна складність та ефективність представленого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів значним чином залежить від обраної біоінспірованої процедури та величини випадкового зміщення, вибір яких обумовлюється характеристиками каналу зв'язку та іншими чинниками.

### **4.3 Методика оцінки ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів**

Для здійснення оцінки ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів було розроблено комп'ютерну модель безпроводової телекомунікаційної системи, що враховує особливості передавання інформації у каналі зв'язку з АБГШ з використанням даного типу кодів та представленого методу декодування. При цьому дана модель забезпечує можливість змінювати параметри алгебраїчних згорткових кодів, величину завад у каналі зв'язку та здійснити порівняння представленого методу з існуючими методами декодування [11, 14]. Основні кроки комп'ютерного

моделювання процесу передавання інформації у безпроводовій телекомунікаційній системі наведено нижче.

*Крок 1.* Встановлення параметрів алгебраїчного згорткового коду, завдання узагальненого породжувального багаточлена (узагальненої породжувальної матриці).

*Крок 2.* Встановлення параметрів біоінспірованого методу декодування з випадковим зміщенням.

*Крок 3.* Встановлення діапазону відношення сигнал/шум та довжини інформаційної послідовності.

*Крок 4.* Формування інформаційної послідовності.

*Крок 5.* Формування кодової послідовності на основі узагальненого породжувального багаточлена (узагальненої породжувальної матриці).

*Крок 6.* Перетворення кодової послідовності у сигнал двійкової фазової модуляції.

*Крок 7.* Формування АБГШ та його додавання до модульованого сигналу.

*Крок 8.* Декодування прийнятої послідовності з використанням біоінспірованого методу декодування з випадковим зміщенням.

*Крок 9.* Визначення коефіцієнта помилок для обраних методів декодування.

*Крок 10.* Якщо досягнуто максимальне значення відношення сигнал/шум та повністю передане інформаційне повідомлення, то виконати перехід до кроку 11, інакше виконати перехід до кроку 4.

*Крок 11.* Відображення залежності коефіцієнта помилок від відношення сигнал/шум для обраних методів декодування.

Таким чином, програмна реалізація даного алгоритму дозволяє оцінити енергетичну ефективність при використанні біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів та здійснити його порівняння з існуючими методами декодування.

При здійсненні експериментальних досліджень за допомогою розробленої комп'ютерної моделі використовувались наступні налаштування:

- 1) тип коду – алгебраїчний згортковий код із заданими параметрами;
- 2) діапазон відношення сигнал/шум – від 0 до 9 дБ;
- 3) кількість інформаційних повідомлень (кодівих послідовностей згорткового коду), що передавалися, – 1000;
- 4) параметри біоінспірованого методу декодування, що заснований на процедурі диференційної еволюції [24] – максимальна кількість ітерацій декодування  $L=50$ ; величина випадкового зміщення  $\theta=0,1$ ; параметри процедури диференційної еволюції – розмір популяції  $NP=20$ , максимальна кількість поколінь  $L_{\max}=100$ , коефіцієнт впливу  $a=0,7$ , імовірність «схрещення»  $b=0,9$ .

## **5. Результати аналізу ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів**

Порівняння результатів моделювання у каналі з АБГШ представленого біоінспірованого методу декодування з випадковим зміщенням, алгебраїчного

методу декодування та методу Вітербі для алгебраїчних  $(n_0, k_0, V)$  згорткових кодів із обраними параметрами наведено на рис. 1, 2.

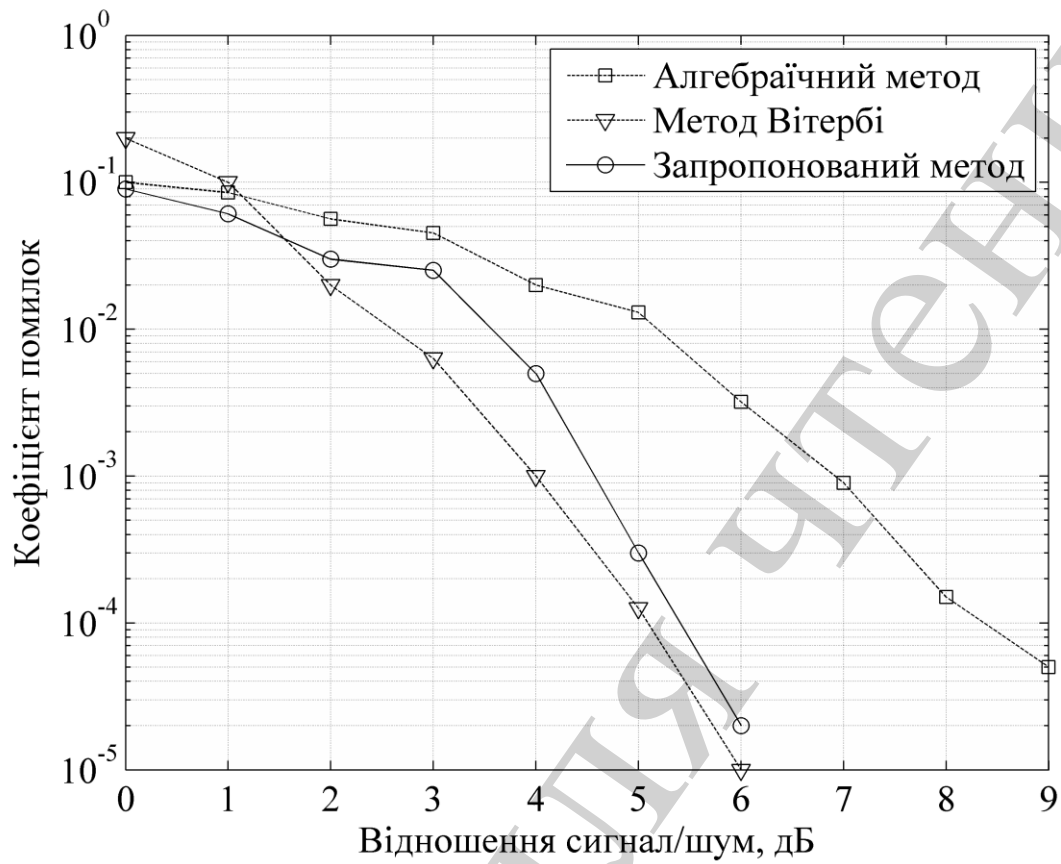


Рис. 1. Залежність коефіцієнту помилок від відношення сигнал/шум для алгебраїчного (3, 1, 3) згорткового коду

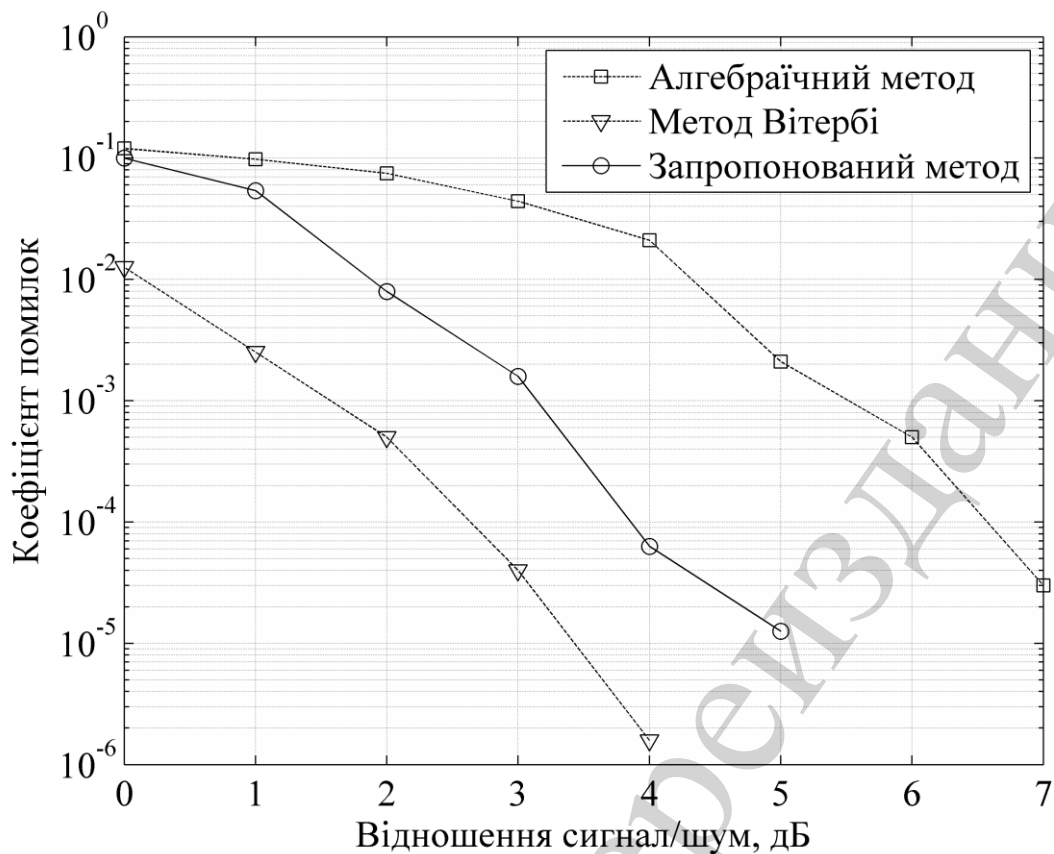


Рис. 2. Залежність коефіцієнту помилок від відношення сигнал/шум для алгебраїчного (4, 1, 8) згорткового коду

З аналізу рис. 1 випливає, що представлений біоінспірований метод декодування з випадковим зміщенням у порівнянні з алгебраїчним методом декодування для алгебраїчного (3, 1, 3) згорткового коду забезпечує енергетичний вииграш від кодування 1,6 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-2}$ ; 2,4 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-3}$ ; близько 3 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-4}$ . При цьому запропонований метод декодування дещо програє за ефективністю методу Вітербі у діапазоні низького відношення сигнал/шум (порядку 1 дБ).

З наведених на рис. 2 графіків слідує, що запропонований метод декодування для алгебраїчного (4, 1, 8) згорткового коду у порівнянні з алгебраїчним методом декодування забезпечує енергетичний вииграш від кодування близько 2,4–2,7 дБ при коефіцієнті помилок менше  $10^{-2}$ . Також з рис. 2 слідує, що при збільшенні довжини кодового обмеження ефективність представленого методу декодування зменшується у порівнянні з методом Вітербі (програш становить близько 1,5 дБ).

Порівняння результатів моделювання у каналі з АБГШ запропонованого методу декодування та алгебраїчного методу декодування для алгебраїчного (5, 1, 16) згорткового коду наведено на рис. 3. Через велику довжину кодового обмеження декодування за методом Вітербі даного згорткового коду реалізувати неможливо. Тому ефективність біоінспірованого методу

декодування з випадковим зміщенням було порівняно з характеристиками турбокоду для різної кількості ітерацій декодування (рис. 3). Даний турбокод має швидкість кодування  $R=1/2$  та складається із рекурсивних систематичних згорткових кодів з довжиною кодового обмеження  $V=4$ .

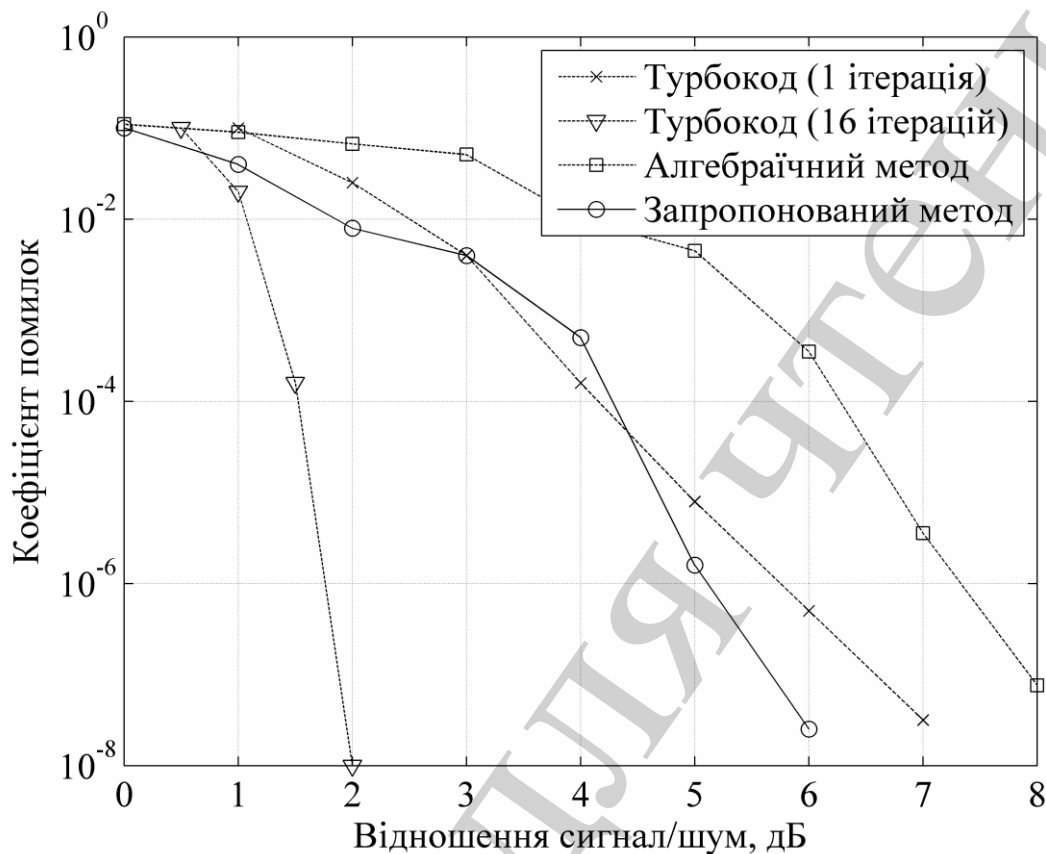


Рис. 3. Залежність коефіцієнту помилок від відношення сигнал/шум для алгебраїчного (5, 1, 16) згорткового коду та турбокоду

З графіків, представлених на рис. 3, випливає, що біоінспірований метод декодування у порівнянні з алгебраїчним методом декодування для алгебраїчного (5, 1, 16) згорткового коду забезпечує енергетичний вигравш від кодування 2,1 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-2}$ ; 2,2 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-5}$ ; 2,3 дБ при коефіцієнті помилок  $10^{-7}$ . Також з рис. 3 слідує, що у діапазоні високого відношення сигнал/шум характеристики даного згорткового коду при застосуванні запропонованого методу декодування на 1 дБ перевершують характеристики турбокоду після 1 ітерації декодування. При збільшенні кількості ітерацій до 16 ефективність турбокоду значно перевершує характеристики алгебраїчного згорткового коду, хоча він має значну довжину кодового обмеження.

У табл. 1 наведено числові результати щодо ефективності методів декодування, що були отримані у ході експериментальних досліджень, для алгебраїчних згорткових кодів з обраними параметрами у заданому діапазоні коефіцієнту помилок.



Таблиця 1

Числові результати щодо ефективності методів декодування алгебраїчних згорткових кодів

Параметри коду	Коефіцієнт помилок	Відношення сигнал/шум при алгебраїчному декодуванні, дБ	Відношення сигнал/шум при біоінспірованому декодуванні, дБ	Енергетичний вигащ від кодування, дБ
(3, 1, 3)	$10^{-2}$	5,1	3,5	1,6
	$10^{-3}$	6,9	4,5	2,4
	$10^{-4}$	8,4	5,4	3
(4, 1, 8)	$10^{-2}$	4,3	1,9	2,4
	$10^{-3}$	5,5	3,1	2,4
	$10^{-4}$	6,6	3,9	2,7
(5, 1, 16)	$10^{-2}$	4	1,9	2,1
	$10^{-3}$	5,6	3,7	1,9
	$10^{-4}$	6,3	4,3	2

З аналізу табл. 1 слідує, що при заданих значеннях коефіцієнту помилок для обраних алгебраїчних згорткових кодів енергетичний вигащ від кодування при застосуванні біоінспірованого методу декодування у порівнянні з алгебраїчним методом декодування становить від 1,6 дБ до 3 дБ. Також слід зазначити, що застосування біоінспірованого методу з випадковим зміщенням для декодування алгебраїчних згорткових кодів з великою швидкістю кодування ( $R=1/3$ ,  $R=1/4$ ) забезпечує більш високу ефективність.

## 6. Обговорення результатів аналізу ефективності біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів

Методи м'якого декодування згорткових кодів, що засновані на пошуку у кодовій решітці та застосуванні нейронних мереж [15–19], можуть бути застосовані лише для згорткових кодів з невеликою довжиною кодового обмеження ( $V \leq 9$ ) через швидке зростання обчислювальної складності. За результатами досліджень представлений метод забезпечує декодування згорткового коду з достатньо великою довжиною кодового обмеження ( $V \leq 16$ ).

У порівнянні з існуючими методами декодування згорткових кодів з алгебраїчною структурою, що використовують математичний апарат теорії кінцевих полів та лінійної алгебри [12–14], біоінспірований метод декодування ґрунтується на положеннях теорії стохастичної оптимізації та додаткових евристичних процедурах. У результаті цього досягається спрощення формального представлення даного методу декодування та забезпечується наочність основних його етапів. Також суттєвою перевагою представленого методу декодування є можливість врахування інформації про надійність прийнятих з каналу зв'язку символів, тобто здійснення м'якого декодування

алгебраїчних згорткових кодів. Завдяки цьому представлений метод декодування у порівнянні з алгебраїчним методом декодування [14] у заданому діапазоні відношення/сигнал шум забезпечує в середньому енергетичний вииграш від кодування порядку 2 дБ.

До недоліків представленого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів слід віднести невизначеність при виборі робочих параметрів для заданих характеристик каналу зв'язку, зокрема, типу біоінспірованої процедури та її параметрів. Також запропонований метод декодування має достатньо високу обчислювальну складність технічної реалізації. Крім того, представлений метод декодування алгебраїчних згорткових кодів програє за ефективністю методу декодування Вітербі та турбокодам при достатній кількості ітерацій декодування.

Виконане дослідження можна розглядати як складову щодо покращення характеристик безпроводових телекомунікаційних систем за рахунок застосування згорткових кодів, що повинні забезпечувати задану достовірність передавання інформації при наданні деяких послуг.

У подальших дослідженнях планується формалізувати правила вибору на ключовому етапі представленого методу декодування конкретної біоінспірованої процедури та її параметрів в залежності від умов передавання інформації. Також доцільно здійснити порівняльний аналіз ефективності застосування різних біоінспірованих процедур при реалізації запропонованого методу декодування.

Результати, що отримані у ході досліджень, носять самостійний характер та можуть бути використані для модернізації існуючих безпроводових телекомунікаційних систем або при розробці новітніх телекомунікаційних технологій.

## **7. Висновки**

1. Для підвищення достовірності передавання інформації у безпроводових телекомунікаційних системах широко застосовуються згорткові коди спільно з різноманітними методами декодування. Згорткові коди зі спеціальною алгебраїчною структурою, параметри яких повністю задаються узагальненим породжувальним багаточленом або відповідною узагальненою породжувальною матрицею, можна представити у вигляді довгих двійкових блокових кодів.

2. Ключова особливість представленого біоінспірованого методу декодування алгебраїчних згорткових кодів полягає у застосуванні у якості пошукового механізму деякої біоінспірованої процедури з евристично визначеними параметрами. Крім того, у даному методі на кожній ітерації декодування використовується інформація про надійність прийнятих символів для знаходження найбільш надійного базису узагальненої породжувальної матриці. Використання даного підходу дозволяє генерувати більш точні пробні інформаційні та кодові послідовності на етапі біоінспірованого пошуку.

Додатково для підвищення ефективності декодування застосовується механізм випадкового зміщення, що призначений для модифікації прийнятої

послідовності з метою здійснення біоінспірованого пошуку на основі різних найбільш надійних базисів узагальненої породжувальної матриці.

3. Біоінспірований метод декодування алгебраїчних згорткових кодів на основі процедури диференційної еволюції забезпечує більшу ефективність у порівнянні з алгебраїчним методом декодування у каналі зв'язку з АБГШ. В залежності від параметрів алгебраїчного згорткового коду та необхідного коефіцієнту помилок енергетичний виграш від кодування становить від 1,6 дБ до 3 дБ. Крім того, на відміну від існуючих методів м'якого декодування представлений метод декодування може бути використаний для згорткових кодів з великою довжиною кодового обмеження.

### Література

1. Fundamentals of convolutional coding / R. Johannesson, K. Sh. Zigangirov (Eds.). 2nd ed. John Wiley & Sons, 2015. 668 p. doi: <https://doi.org/10.1002/9781119098799>
2. Ryan W., Lin S. Channel codes: Classical and modern. Cambridge University Press, 2009. 692 p. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511803253>
3. Piret P. Structure and constructions of cyclic convolutional codes // IEEE Transactions on Information Theory. 1976. Vol. 22, Issue 2. P. 147–155. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.1976.1055531>
4. Roos C. On the structure of convolutional and cyclic convolutional codes // IEEE Transactions on Information Theory. 1979. Vol. 25, Issue 6. P. 676–683. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.1979.1056108>
5. Gluesing-Luerssen H., Schmale W. On Cyclic Convolutional Codes // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. Vol. 82, Issue 2. P. 183–237. doi: <https://doi.org/10.1023/b:acap.0000027534.61242.09>
6. Gluesing-Luerssen H., Schmale W. On Doubly-Cyclic Convolutional Codes // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2006. Vol. 17, Issue 2. P. 151–170. doi: <https://doi.org/10.1007/s00200-006-0014-9>
7. Gomez-Torrecillas J., Lobillo F. J., Navarro G. A New Perspective of Cyclicity in Convolutional Codes // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. Vol. 62, Issue 5. P. 2702–2706. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2016.2538264>
8. Rosenthal J., York F. V. BCH convolutional codes // IEEE Transactions on Information Theory. 1999. Vol. 45, Issue 6. P. 1833–1844. doi: <https://doi.org/10.1109/18.782104>
9. Rosenthal J., Smarandache R. Maximum Distance Separable Convolutional Codes // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 1999. Vol. 10, Issue 1. P. 15–32. doi: <https://doi.org/10.1007/s002000050120>
10. Алгебраическое построение несистематических сверточных кодов / Приходько С. И., Кузнецов А. А., Гусев С. А., Кужель И. Е. // Системи обробки інформації. 2004. Вип. 8 (69). С. 170–175.
11. Viterbi A. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm // IEEE Transactions on Information Theory. 1967. Vol. 13, Issue 2. P. 260–269. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.1967.1054010>

12. Gluesing-Luerssen H., Helmke U., Iglesias Curto J. Algebraic decoding for doubly cyclic convolutional codes // *Advances in Mathematics of Communications*. 2010. Vol. 4, Issue 1. P. 83–99. doi: <https://doi.org/10.3934/amc.2010.4.83>
13. Gomez-Torrecillas J., Lobillo F. J., Navarro G. A Sugiyama-Like Decoding Algorithm for Convolutional Codes // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2017. Vol. 63, Issue 10. P. 6216–6226. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2017.2731774>
14. Приходько С. И., Кузьменко Д. М. Метод декодирования алгебраических сверточных кодов // *Системи обробки інформації*. 2008. Вип. 2 (69). С. 12–17.
15. Two step SOVA-based decoding algorithm for tailbiting codes / Ortin J., Garcia P., Gutierrez F., Valdovinos A. // *IEEE Communications Letters*. 2009. Vol. 13, Issue 7. P. 510–512. doi: <https://doi.org/10.1109/lcomm.2009.090810>
16. Performance Comparison of List Viterbi Algorithm of Tail-Biting Convolutional Code for Future Machine Type Communications / Bushisue S., Suyama S., Nagata S., Miki N. // *IEICE Transactions on Communications*. 2017. Vol. E100.B, Issue 8. P. 1293–1300. doi: <https://doi.org/10.1587/transcom.2016fgp0018>
17. A Low-Complexity Maximum-Likelihood Decoder for Tail-Biting Convolutional Codes / Han Y. S., Wu T.-Y., Chen P.-N., Varshney P. K. // *IEEE Transactions on Communications*. 2018. Vol. 66, Issue 5. P. 1859–1870. doi: <https://doi.org/10.1109/tcomm.2018.2790935>
18. Kao J. W. H., Berber S. M., Bigdeli A. A General Rate K/N Convolutional Decoder Based on Neural Networks with Stopping Criterion // *Advances in Artificial Intelligence*. 2009. Vol. 2009. P. 1–11. doi: <https://doi.org/10.1155/2009/356120>
19. Rajbhandari S., Ghassemlooy Z., Angelova M. Adaptive ‘soft’ sliding block decoding of convolutional code using the artificial neural network // *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies*. 2012. Vol. 23, Issue 7. P. 672–677. doi: <https://doi.org/10.1002/ett.2523>
20. Azouaoui A., Chana I., Belkasmi M. Efficient Information Set Decoding Based on Genetic Algorithms // *International Journal of Communications, Network and System Sciences*. 2012. Vol. 05, Issue 07. P. 423–429. doi: <https://doi.org/10.4236/ijcns.2012.57052>
21. Azouaoui A., Belkasmi M., Farchane A. Efficient Dual Domain Decoding of Linear Block Codes Using Genetic Algorithms // *Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2012. Vol. 2012. Vol. 1–12. doi: <https://doi.org/10.1155/2012/503834>
22. Improved Decoding of linear Block Codes using compact Genetic Algorithms with larger tournament size / Berkani A., Azouaoui A., Belkasmi M., Aylaj B. // *International Journal of Computer Science Issues*. 2017. Vol. 14, Issue 1. P. 15–24. doi: <https://doi.org/10.20943/01201701.1524>
23. Штомпель Н. А. Мягкое декодирование алгебраических сверточных кодов на основе природных вычислений // *Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті*. 2016. Вип. 5. С. 14–18.

24. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. Differential evolution: A practical approach to global optimization. Springer, 2005. 539 p. doi: <https://doi.org/10.1007/3-540-31306-0>

25. Jin W., Fosser M. P. C. Reliability-Based Soft-Decision Decoding With Multiple Biases // IEEE Transactions on Information Theory. 2007. Vol. 53, Issue 1. P. 105–120. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2006.887510>

Не является переизданием