

Запропоновано дискретну модель суцільного середовища. При розв'язанні ряду класичних задач одержувані результати ідеально узгоджуються з теорією пружності. Розроблена модель також допускає модифікацію на випадок задач у геометрично нелінійній постановці

Ключові слова: дискретна модель, суцільне середовище

Предложена дискретная модель сплошной среды. При решении ряда классических задач получаемые результаты идеально согласуются с теорией упругости. Разработанная модель также допускает модификацию на случай задач в геометрически нелинейной постановке

Ключевые слова: дискретная модель, сплошная среда

The discrete model of solid medium is offered. Under the solving of series of the classical problems the obtained results are ideally coordinated with theory of elasticity. The designed model can be also modified for geometrically nonlinear problems

Key words: discrete model, solid medium

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Д. Шамровский

Доктор технических наук, профессор, профессор*

Контактный тел.: (061) 223-82-16

E-mail: adshamr@rambler.ru

Ю. А. Лымаренко

Кандидат технических наук, доцент, доцент*

Контактный тел.: 096-234-71-97

E-mail: lymarenko@yandex.ru

Д. Н. Колесник

Аспирант*

Контактный тел.: (061) 223-82-16

E-mail: mylogin2006@rambler.ru

Т. А. Миняйло

Аспирант*

Контактный тел.: (061) 223-82-16

E-mail: minyajlo_tanja@ukr.net

В. В. Кривуляк

Ассистент*

Контактный тел.: (061) 223-82-16

*Кафедра программного обеспечения
автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006

1. Введение

Многочисленный опыт решения задач механики деформируемого твердого тела показывает, что учет как физической, так и геометрической нелинейности объекта исследования значительно ограничивает возможности известных аналитических методов, делая их либо неприменимыми, либо чрезвычайно громоздкими. Это связано, во-первых, с трудностями математического описания соответствующих континуальных моделей, во-вторых, с трудностями вычислительного характера, которые возникают при решении соответствующих нелинейных уравнений.

Приходится прибегать к различным способам дискретизации. Чаще всего это производится на основе тех же дифференциальных уравнений с использованием либо конечных разностей, либо метода конечных элементов.

При этом вначале совершается предельный переход при составлении дифференциальных уравнений, а затем – обратный процесс перехода к конечным разностям. Если бы структура материи была непрерывной, континуальной, то можно было бы воспринимать дифференциальные уравнения как наиболее точное опи-

сание реальности, а численные методы – как способ получения приближенного результата для идеально точного решения. В то же время, предельный переход изначально предполагает континуальность материи, чего на самом деле нет; не говоря уже об атомно-молекулярной структуре материи – любое материальное тело имеет видимую внешнюю грубую структуру (волоконна дерева, кристаллы металла, включения композитных материалов). Использование предельного перехода в таких условиях автоматически предполагает сглаживание, усреднение.

В связи с этим, достаточно давно было предложено изначально строить дискретные модели как альтернативу существующим континуальным. В этом направлении получены определенные результаты [2-7], подтверждающие эффективность приемов дискретного моделирования. Однако, как показывает анализ многочисленных публикаций на эту тему, единая методология дискретного моделирования сплошной среды еще не выработана. В частности [6, 7], в наиболее распространенной на данный момент в ружинно-массовой модели, при попытке выразить упругие характеристики дискретной модели через упругие константы материала, обнаруживается жест-

кое ограничение на значение коэффициента Пуассона, $\nu \leq 0.25$.

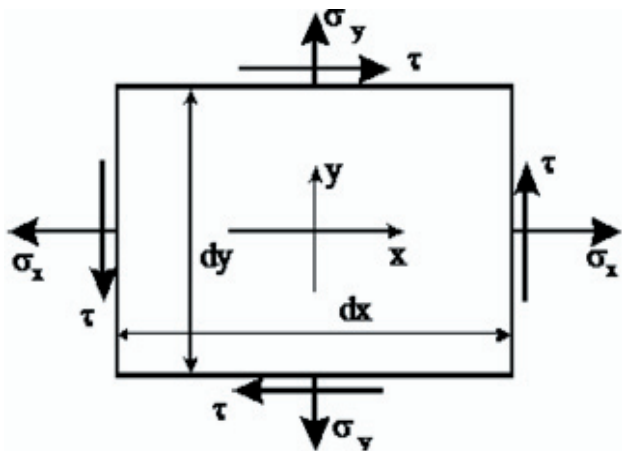
В данной статье предложен альтернативный способ построения дискретной модели и проведения расчетов по этой модели, который позволяет получать результаты, идеально согласующиеся с теорией упругости в случае объектов правильной формы и допускает модификацию на случай объектов с неоднородностями либо со сложной геометрией.

2. Определение упругих характеристик дискретной модели

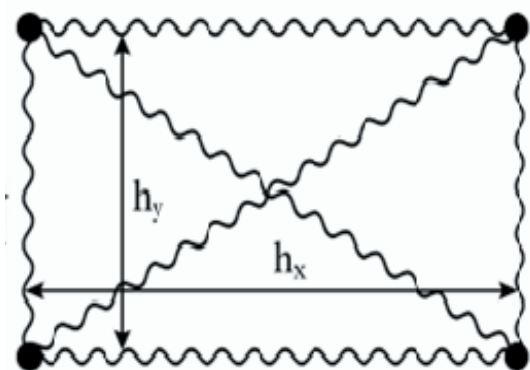
В качестве структурного элемента предлагаемой дискретной модели, заменяющего прямоугольный элемент сплошной упругой среды (рис. 1, а), возьмем прямоугольник, в углах которого находятся точечные массы, соединенные упругими связями (рис. 1, б).

Выразим жесткостные характеристики дискретной модели через упругие характеристики моделируемого сплошного континуума, модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν .

Для этого сравним уравнения, описывающие напряженно деформированное состояние сплошной среды, с аналогами этих уравнений для дискретной модели.



а)



б)
Рис. 1

Уравнения плоской задачи теории упругости представляют собой комбинацию уравнений равновесия [8]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

и соотношений упругости:

$$\sigma_x = B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = B \left(\frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{2}$$

где в случае плоской деформации

$$B = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad c = \frac{\nu}{1-\nu}; \tag{3}$$

при обобщенном плоском напряженном состоянии

$$B = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad c = \nu. \tag{4}$$

Составим аналоги уравнения (2) для дискретной модели.

Для этого рассмотрим отдельно состояния растяжения-сжатия и сдвига.

Растяжение-сжатие. Пусть на гранях элемента заданы равномерно-распределенные нормальные напряжения (рис. 2).

Заменяем распределенную внешнюю нагрузку на сосредоточенные силы, приложенные в углах прямоугольного элемента:

$$T_x = \frac{1}{2} \sigma_x h_y, \quad T_y = \frac{1}{2} \sigma_y h_x. \tag{5}$$

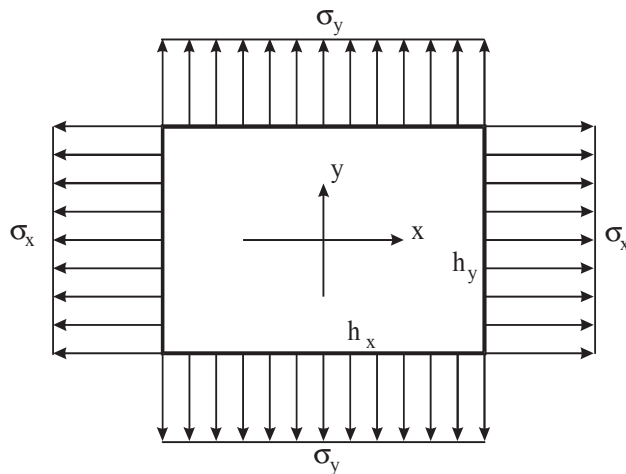


Рис. 2

Рассмотрим реакции горизонтальных (R_x), вертикальных (R_y) и наклонных (R_v) стержней (рис. 3). Для любого из узлов справедливы уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= T_x - R_x - R_v \cos \alpha = 0, \\ \sum Y &= T_y - R_y - R_v \sin \alpha = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}.$$

Рассмотрим также перемещения узлов (рис. 4).

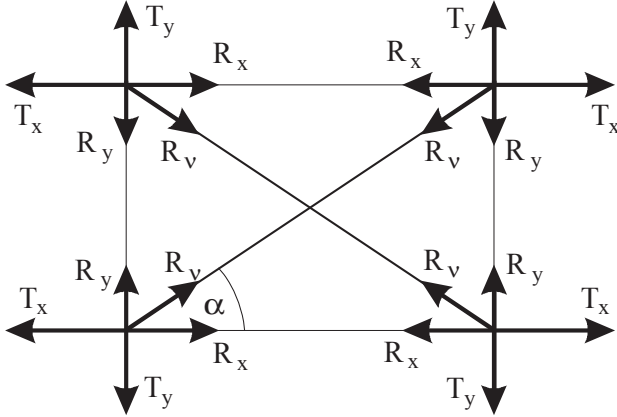


Рис. 3

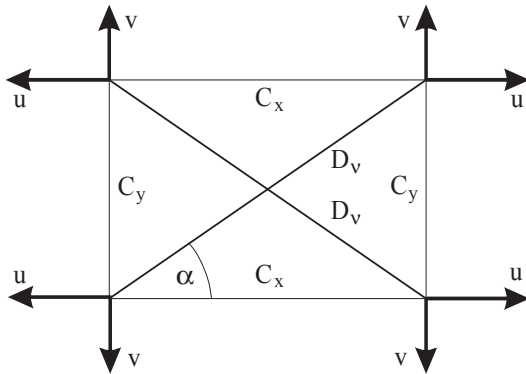


Рис. 4

Абсолютные деформации горизонтальных, вертикальных и наклонных стержней равны

$$\Delta_x = 2u, \quad \Delta_y = 2v, \quad \Delta_v = 2(u \cos \alpha + v \sin \alpha). \quad (7)$$

Обозначая жесткости горизонтальных стержней через C_x , вертикальных – C_y и наклонных – D_v имеем:

$$R_x = C_x \Delta_x = 2C_x u, \quad R_y = C_y \Delta_y = 2C_y v, \quad (8)$$

$$R_v = D_v \Delta_v = 2D_v (u \cos \alpha + v \sin \alpha).$$

Используя общепринятый для линейной теории упругости переход от локальных параметров, описывающих деформирование сплошной среды, к глобальным параметрам, описывающим деформирование дискретного элемента:

$$\epsilon_x = \frac{2u}{h_x}, \quad \epsilon_y = \frac{2v}{h_y}, \quad (9)$$

и подставляя (5), (8) и (9) в (6) получаем:

$$\sigma_x = 2 \frac{h_x}{h_y} \left(C_x + D_v \frac{h_x^2}{h_x^2 + h_y^2} \right) \epsilon_x + 2D_v \frac{h_x h_y}{h_x^2 + h_y^2} \epsilon_y, \quad (10)$$

$$\sigma_y = 2 \frac{h_y}{h_x} \left(C_y + D_v \frac{h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \right) \epsilon_y + 2D_v \frac{h_x h_y}{h_x^2 + h_y^2} \epsilon_x.$$

На основе сравнения полученных выражений с первыми из двух соотношений (2) запишем равенства:

$$B = 2 \frac{h_x}{h_y} \left(C_x + D_v \frac{h_x^2}{h_x^2 + h_y^2} \right) = 2 \frac{h_y}{h_x} \left(C_y + D_v \frac{h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \right),$$

$$c = \frac{2D_v h_x h_y}{B(h_x^2 + h_y^2)}, \quad (11)$$

откуда находим

$$D_v = \frac{Bc(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y}, \quad C_x = \frac{B}{2} \left(\frac{h_y}{h_x} - c \frac{h_x}{h_y} \right),$$

$$C_y = \frac{B}{2} \left(\frac{h_x}{h_y} - c \frac{h_y}{h_x} \right). \quad (12)$$

Сдвиг. Рассмотрим состояние чистого сдвига (рис. 5).

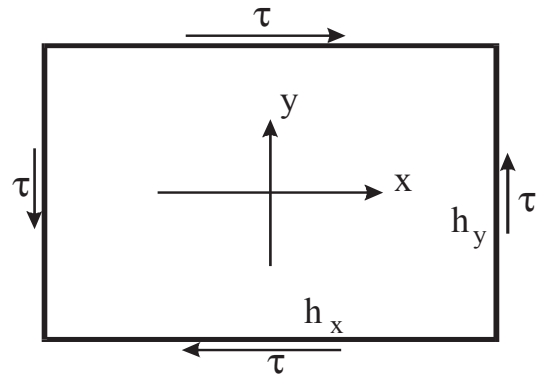


Рис. 5

Соответствующая дискретная модель представлена на рис. 6. В этом случае касательная нагрузка заменяется на следующие сосредоточенные силы:

$$Q_x = \frac{1}{2} \tau h_x, \quad Q_y = \frac{1}{2} \tau h_y. \quad (13)$$

В вертикальных и горизонтальных стержнях реакции не возникают; в наклонных стержнях реакции противоположны по знаку. Для любого из узлов справедливо единственное уравнение равновесия:

$$R_y = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (14)$$

Рассмотрим перемещения узлов (рис. 7). Деформации наклонных стержней равны

$$\Delta_v = 2(u \cos \alpha + v \sin \alpha). \quad (15)$$

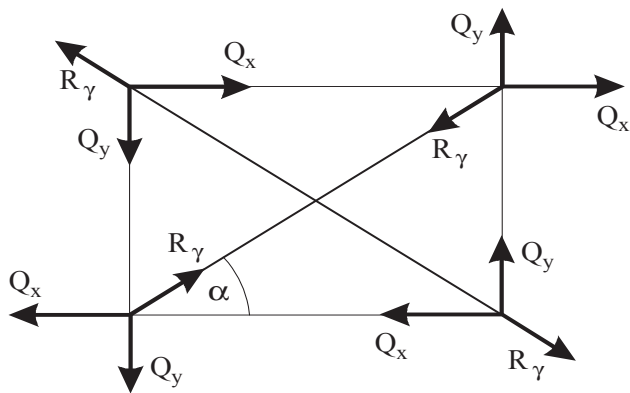


Рис. 6

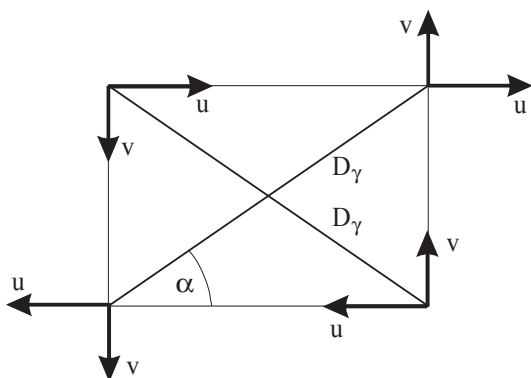


Рис. 7

Обозначая жесткости этих стержней через D_γ для реакций имеем:

$$R_\gamma = D_\gamma \Delta_\gamma = 2D_\gamma (u \cos \alpha + v \sin \alpha). \tag{16}$$

Благодаря перемещениям u вертикальный стержень поворачивается на угол

$$\gamma_1 = \frac{2u}{h_y}. \tag{17}$$

Из-за перемещений v горизонтальный стержень поворачивается на угол

$$\gamma_2 = \frac{2v}{h_x}. \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в (16) и результат, совместно с (13), в (14), получаем

$$\tau = \frac{2D_\gamma h_x h_y}{h_x^2 + h_y^2} (\gamma_1 + \gamma_2). \tag{19}$$

Сравнивая с третьим из соотношений (2) имеем

$$G = \frac{2D_\gamma h_x h_y}{h_x^2 + h_y^2}. \tag{20}$$

Отсюда

$$D_\gamma = G \frac{h_x^2 + h_y^2}{2h_x h_y}. \tag{21}$$

Сравнивая с (12) видим, что при данном способе моделирования жесткости наклонных стержней за-

висят от вида деформации элемента. Иначе говоря, указанные стержни следует воспринимать не как физические конструкции, а как математические модели, отражающие взаимодействия в прямоугольном элементе. Стержни с жесткостью D_v отражают эффект Пуассона, то есть сжатие элемента в поперечном направлении при его растяжении в продольном направлении. Стержни с жесткостью D_γ отвечают за сдвиг.

Различие жесткостей диагональных стержней дискретной модели обусловлено тем, что эти жесткости отвечают за явления, имеющие различную физическую природу.

Отметим также, что при растяжении-сжатии оба наклонных стержня деформируются одинаково, а при сдвиге их деформации противоположны. Таким образом, жесткость D_v соответствует симметричной (одинаковой) деформации стержней, а жесткость D_γ – их антисимметричной (противоположной) деформации.

3. Корректировка дискретной модели на основе сравнения результатов решения задач на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб

Для тестирования полученных результатов решим задачу о нагружении прямоугольного элемента линейно изменяющейся нормальной нагрузкой и постоянной касательной нагрузкой (рис. 8).

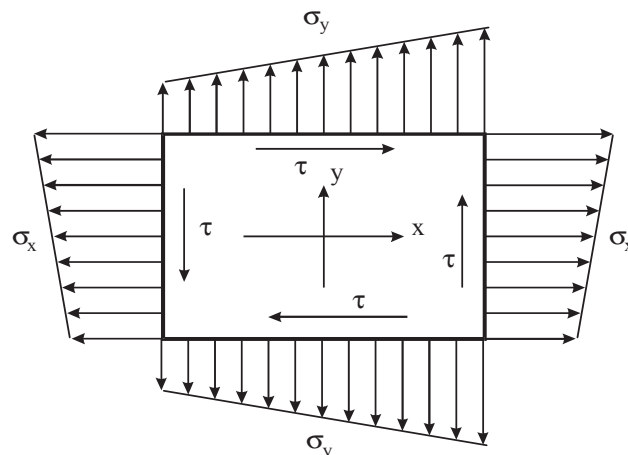


Рис. 8

Зададим напряжения на гранях элемента:

$$\sigma_x = a_x y + b_x, \quad \sigma_y = a_y x + b_y, \quad \tau = \text{const}. \tag{22}$$

Считая, что эти выражения справедливы не только для границ, но и для всех точек области, видим, что они тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1). Для нахождения перемещений переписем соотношения упругости в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{H} (\sigma_x - c \sigma_y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{H} (\sigma_y - c \sigma_x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G},$$

$$H = B(1 - c^2). \tag{23}$$

Подставляя (22) в первые два соотношения (23) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{H} [a_x y + b_x - c(a_y x + b_y)], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{H} [a_y x + b_y - c(a_x y + b_x)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{H} \left[(a_x y + b_x)x - c \left(a_y \frac{x^2}{2} + b_y x \right) \right] + f_u(y), \\ v &= \frac{1}{H} \left[(a_y x + b_y)y - c \left(a_x \frac{y^2}{2} + b_x y \right) \right] + f_v(x). \end{aligned}$$

Здесь $f_u(y)$ и $f_v(x)$ – произвольные функции x и y . В силу (24) треть из выражений (23) дает

$$\frac{a_x}{H} x + \frac{df_u}{dy} + \frac{a_y}{H} y + \frac{df_v}{dx} = \frac{\tau}{G}. \quad (25)$$

Перепишем (25) в форме

$$\frac{df_v}{dx} + \frac{a_x}{H} x = C = \frac{\tau}{G} - \frac{df_u}{dy} - \frac{a_y}{H} y. \quad (26)$$

Левая часть в (26) зависит только от x , правая – только от y . Такое равенство возможно только тогда, когда обе эти части – константы. В итоге получили два уравнения:

$$\frac{df_v}{dx} = C - \frac{a_x}{H} x, \quad f_v = Cx - \frac{a_x}{H} \frac{x^2}{2} + C_v. \quad (27)$$

Следовательно,

$$f_u = \left(\frac{\tau}{G} - C \right) y - \frac{a_y}{H} \frac{y^2}{2} + C_u, \quad f_v = Cx - \frac{a_x}{H} \frac{x^2}{2} + C_v.$$

Окончательно для u и v имеем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{H} \left[(a_x y + b_x)x - c \left(a_y \frac{x^2}{2} + b_y x \right) \right] + \\ &+ \left(\frac{\tau}{G} - C \right) y - \frac{a_y}{H} \frac{y^2}{2} + C_u, \end{aligned} \quad (28)$$

$$v = \frac{1}{H} \left[(a_y x + b_y)y - c \left(a_x \frac{y^2}{2} + b_x y \right) \right] + Cx - \frac{a_x}{H} \frac{x^2}{2} + C_v.$$

Здесь константа C задает вращение квадрата как твердого тела; константы C_u и C_v задают поступательные перемещения квадрата вдоль осей x и y .

Вычислим перемещения угловых точек прямоугольника при помощи формул (28) и с использованием

построенной дискретной модели для нескольких типовых случаев.

1. Растяжение вдоль оси x :

$$\sigma_x = b_x, \quad a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad b_y = 0, \quad \tau = 0. \quad (29)$$

Из (28) получаем

$$u \left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2} \right) = \frac{b_x h_x}{2H}, \quad v \left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2} \right) = -\frac{cb_x h_y}{2H}. \quad (30)$$

Из (10), в соответствии с (11), имеем

$$\sigma_x = B(\epsilon_x + c\epsilon_y), \quad 0 = \epsilon_y + c\epsilon_x, \quad (31)$$

откуда находим

$$\epsilon_x = \frac{b_x}{H}, \quad \epsilon_y = -\frac{cb_x}{H}, \quad (32)$$

то есть, в соответствии с (9):

$$u = \frac{b_x h_x}{2H}, \quad v = -\frac{cb_x h_y}{2H}. \quad (33)$$

Результаты совпадают с (30).

Легко проверить, что при растяжении вдоль оси y также наблюдается совпадение результатов, полученных с помощью дискретной и континуальной моделей.

2. Сдвиг:

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad a_y = 0, \quad b_y = 0, \quad \tau \neq 0. \quad (34)$$

Из (28) имеем (при $C=0$):

$$u \left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2} \right) = \frac{\tau h_y}{2G}, \quad v \left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2} \right) = 0. \quad (35)$$

В соответствии с (19) и (20) получаем

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\tau}{G}. \quad (36)$$

С учетом (17) и (18) и принимая $v=0$ окончательно находим

$$u = \frac{\tau h_y}{2G}. \quad (37)$$

Вновь имеет место совпадение результатов.

Полученное выше совпадение результатов на основе дискретной модели с точными результатами, найденными на основе уравнений теории упругости, неудивительно, поскольку соответствует процедуре нахождения параметров дискретной модели (жесткостей стержней). Рассмотрим более сложные случаи переменной нагрузки.

3. Изгиб вдоль оси x (рис. 9). Присутствует только нормальное напряжение:

$$\sigma_x = a_x y. \quad (38)$$

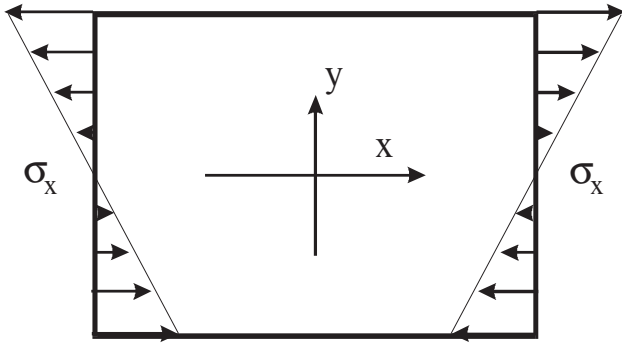


Рис. 9

Из (28) имеем для двух правых угловых точек

$$u\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}\right) = \frac{a_x h_x h_y}{4H}, \quad v\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}\right) = -\frac{a_x (h_x^2 + ch_y^2)}{8H}; \quad (39)$$

$$u\left(\frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}\right) = -\frac{a_x h_x h_y}{4H}, \quad v\left(\frac{h_x}{2}, -\frac{h_y}{2}\right) = -\frac{a_x (h_x^2 + ch_y^2)}{8H}.$$

Вертикальные перемещения в верхней и нижней угловых точках одинаковы, т.е. относятся к движению элемента как твердого тела. Горизонтальные перемещения противоположны.

Перейдем теперь к дискретной модели (рис. 10).

На боковых гранях прямоугольника заданы сосредоточенные силы, образующие пары с моментом

$$M = T_x h_y. \quad (40)$$

Вычислим момент распределенной нагрузки (38):

$$M = \int_{-h_y/2}^{h_y/2} \sigma_x y dy = a_x \int_{-h_y/2}^{h_y/2} y^2 dy = \frac{a_x h_y^3}{12}. \quad (41)$$

Приравнявая (40) и (41) получаем:

$$T_x = \frac{a_x h_y^2}{12}. \quad (42)$$

При такой нагрузке верхний стержень растягивается, нижний сжимается, вертикальные поворачиваются как твердые тела, наклонные перемещаются поступательно. В итоге получается картина перемещений (рис. 11), при которой деформируются только верхний и нижний стержни.

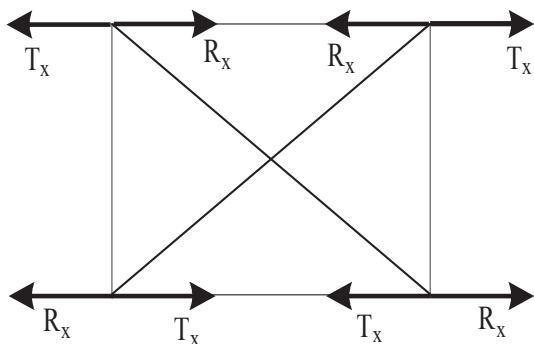


Рис. 10

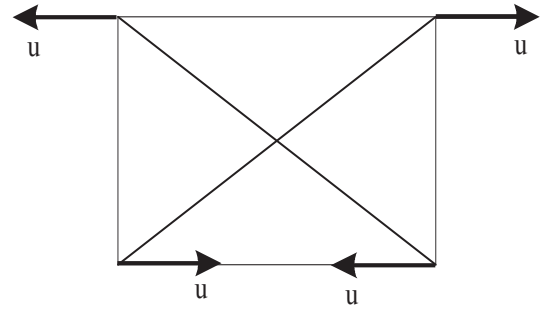


Рис. 11

При этом реакции горизонтальных стержней будут равны

$$T_x = R_x = 2C_x u = \frac{a_x h_y^2}{12}. \quad (43)$$

Подставляя значение C_x из (12) получаем

$$u = \frac{a_x h_x h_y^3}{12B(h_y^2 - ch_x^2)}. \quad (44)$$

Такой результат значительно отличается от найденного выше точного результата (39). Это означает, что жесткости горизонтальных стержней, найденные для случая растяжения-сжатия, не пригодны для случая изгиба.

Если подставить в (43) значение u из (39), то найдем жесткости горизонтальных стержней для случая изгиба:

$$C_x = \frac{Hh_y}{6h_x}. \quad (45)$$

В случае изгиба вдоль оси y аналогичным образом получаем для жесткости вертикальных стержней значение

$$C_y = \frac{Hh_x}{6h_y}. \quad (46)$$

Полученные значения отличаются от значений из (12). Таким образом, выясняется, что зависят от вида деформации элемента в целом не только жесткости наклонных стержней, но и жесткости вертикальных и горизонтальных стержней.

Отметим, что растяжению-сжатию отвечают одинаковые деформации вертикальных или горизонтальных стержней, а изгибу – противоположные деформации.

Обозначая индексом t жесткости на растяжение-сжатие, а f – жесткости на изгиб имеем окончательно:

$$C_x^t = \frac{B}{2} \left(\frac{h_y}{h_x} - c \frac{h_x}{h_y} \right), \quad C_x^f = \frac{Hh_y}{6h_x}, \quad C_y^t = \frac{B}{2} \left(\frac{h_x}{h_y} - c \frac{h_y}{h_x} \right),$$

$$C_y^f = \frac{Hh_x}{6h_y}, \quad (47)$$

$$D_v = \frac{Bc(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y}, \quad D_\gamma = G \frac{h_x^2 + h_y^2}{2h_x h_y}.$$

4. Метод последовательных перемещений для проведения расчетов по дискретной модели

Запишем алгоритм решения задачи о нагружении отдельно взятого прямоугольного элемента, разработанный ранее для расчета стержневых конструкций [1]. Пусть на вначале недеформированный элемент действует внешняя нагрузка, т.е. силы, изображенные на рис. 12. Начальные значения всех реакций (рис. 12) и перемещений всех узлов (рис. 13) считаем равными нулю.

Первый шаг. Для заданных произвольных перемещений узлов (рис. 13) находим абсолютные деформации всех стержней:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= u_1 - u_2, \quad \Delta_{34} = u_4 - u_3, \\ \Delta_{14} &= v_1 - v_4, \quad \Delta_{23} = v_2 - v_3, \\ \Delta_{13} &= (u_1 - u_3)\cos\alpha + (v_1 - v_3)\sin\alpha, \\ \Delta_{24} &= (u_4 - u_2)\cos\alpha + (v_2 - v_4)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

Выполним операцию симметризации деформаций:

$$\begin{aligned} \Delta_x^t &= \frac{1}{2}(\Delta_{12} + \Delta_{34}), \quad \Delta_x^f = \frac{1}{2}(\Delta_{12} - \Delta_{34}), \quad \Delta_y^t = \frac{1}{2}(\Delta_{14} + \Delta_{23}), \\ \Delta_y^f &= \frac{1}{2}(\Delta_{14} - \Delta_{23}), \\ \Delta_v &= \frac{1}{2}(\Delta_{13} + \Delta_{24}), \quad \Delta_\gamma = \frac{1}{2}(\Delta_{13} - \Delta_{24}). \end{aligned} \tag{49}$$

Второй шаг. Вычисляем соответствующие реакции (рис. 12):

$$R_{12} = C_x^t \Delta_x^t + C_x^f \Delta_x^f, \quad R_{34} = C_x^t \Delta_x^t - C_x^f \Delta_x^f, \tag{50}$$

$$R_{23} = C_y^t \Delta_y^t - C_y^f \Delta_y^f, \quad R_{14} = C_y^t \Delta_y^t + C_y^f \Delta_y^f,$$

$$R_v = D_v \Delta_v, \quad R_\gamma = D_\gamma \Delta_\gamma, \quad R_{13} = R_v + R_\gamma, \quad R_{24} = R_v - R_\gamma.$$

Третий шаг. Учитывая все силы, действующие на каждый из узлов, т.е. кроме реакций также и внешние силы (рис. 12), записываем выражения для суммарных проекций сил:

$$\begin{aligned} \sum X_1 &= P_{x1} - R_{12} - R_{13} \cos\alpha, \\ \sum Y_1 &= P_{y1} - R_{14} - R_{13} \sin\alpha, \\ \sum X_2 &= P_{x2} + R_{12} + R_{24} \cos\alpha, \quad \sum Y_2 = P_{y2} - R_{23} - R_{24} \sin\alpha, \\ \sum X_3 &= P_{x3} + R_{34} + R_{13} \cos\alpha, \quad \sum Y_3 = P_{y3} + R_{23} + R_{13} \sin\alpha, \\ \sum X_4 &= P_{x4} - R_{34} - R_{24} \cos\alpha, \quad \sum Y_4 = P_{y4} + R_{14} + R_{24} \sin\alpha. \end{aligned} \tag{51}$$

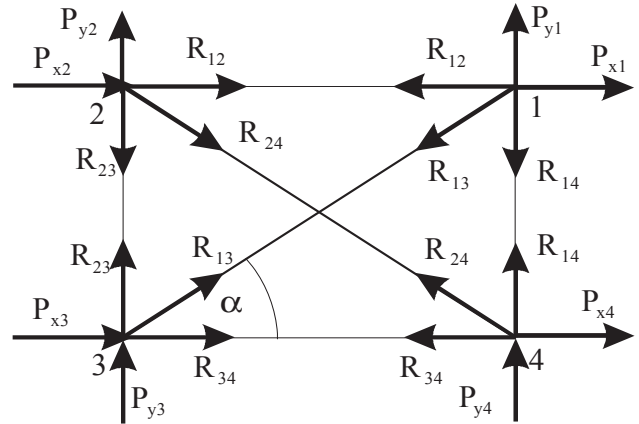


Рис. 12

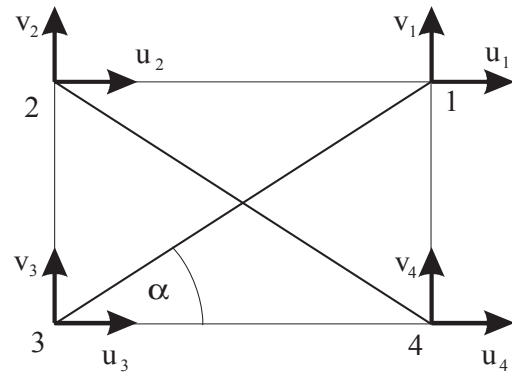


Рис. 13

Четвертый шаг. Находим перемещения узлов по формулам:

$$\begin{aligned} u_1 &:= u_1 + \gamma \sum X_1, \quad v_1 := v_1 + \gamma \sum Y_1, \quad u_2 := u_2 + \gamma \sum X_2, \\ v_2 &:= v_2 + \gamma \sum Y_2; \\ u_3 &:= u_3 + \gamma \sum X_3, \quad v_3 := v_3 + \gamma \sum Y_3, \quad u_4 := u_4 + \gamma \sum X_4, \\ v_4 &:= v_4 + \gamma \sum Y_4, \end{aligned} \tag{52}$$

где γ – некоторый малый коэффициент.

В (52) вместо знака равенства «=» используется знак присваивания «:=», что соответствует рекуррентному характеру формул.

Возвращаемся к первому шагу.

5. Анализ полученных результатов

Построен дискретный элемент, который позволяет получать результаты, в точности совпадающие с результатами, полученными с помощью уравнений теории упругости для базовых случаев нагружения.

Так, на рис. 14 изображены картины растяжений прямоугольника вдоль осей x и y.

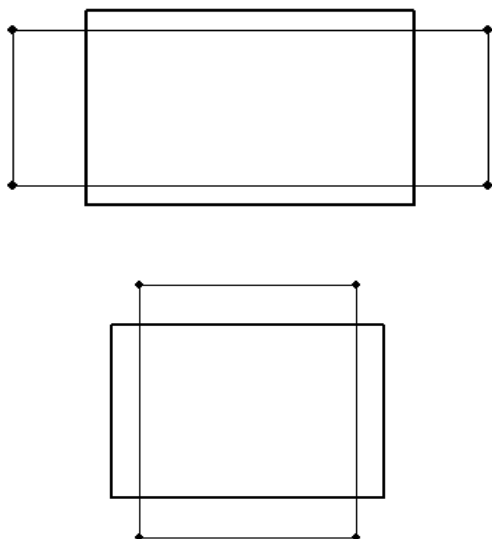


Рис. 14

Тонкой сплошной линией изображены контуры прямоугольника после растяжения, полученные при помощи формул (28); кружочками – положения угловых точек, найденные в результате применения описанной выше процедуры последовательных перемещений.

На рис. 15 изображена полученная аналогичным образом картина сдвига.

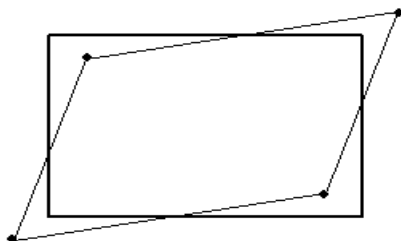
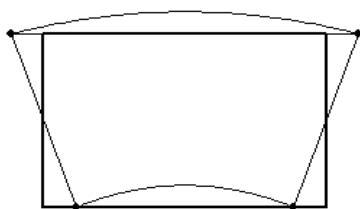
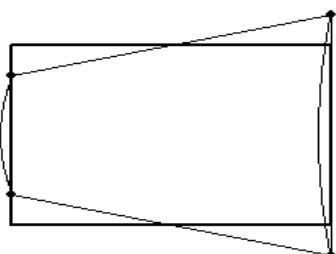


Рис. 15



а)



б)

Рис. 16

На рис. 16 приведены картины изгиба. При изгибе точное решение дает изогнутые стороны прямоугольника, а решение на основе дискретной модели – прямые.

Положения вершин во всех случаях совпадают.

6. Выводы

Разработана стержневая модель сплошной среды для решения плоских статических задач теории упругости. Предложенная дискретная модель в случае классических задач растяжения-сжатия, сдвига и изгиба дает результаты, идеально согласующиеся с теорией упругости. Для проведения расчетов по дискретной модели предлагается использовать метод последовательных перемещений, хорошо зарекомендовавший себя при расчете стержневых конструкций, в том числе, с учетом ступенчатой потери устойчивости для многоярусных конструкций [4]. Предложенный способ построения дискретной модели и проведения расчетов по этой модели допускает модификацию на случай объектов с неоднородностями либо со сложной геометрией, что и будет целью дальнейших исследований в направлении построения дискретных моделей для упругой сплошной среды.

Литература

1. Шамровский О. Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем / О. Д. Шамровский, А. И. Безверхий, В. В. Кривуляк // *Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні*. – 2008. – №2. – С. 110 – 118.
2. Brillouin L. Propagation des ondes dans les milieux periodiques / L. Brillouin, M. Parodi. – Paris: Masson, 1956. – 347 p.
3. Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки / А. М. Косевич. – М.: Наука, 1972. – 342 с.
4. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости / И. А. Кунин. – М.: Наука (СО), 1975. – 415 с.
5. Рушицкий Я. Я. Хвиль в матеріалах з микроструктурою / Я. Я. Рушицкий, Ц. І. Цурпал. – К.: Ін-т механіки НАНУ. – 377 с.
6. Metrikine A. V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation / A. V. Metrikine, H. Askes // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2002. – V. 21. – P.555–572.
7. Suiker A. S. J. Micro-mechanical modelling of granular materials – Part 2 – Plane wave propagation in infinite media / A. S. J. Suiker, R. de Borst, C. S. Chang // *Acta Mechanica*. – 2001. – V. 149. – P. 181–200.
8. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.