



Рис. 5. Зависимость амплитуд от координаты  $z$ :  $a = 0,68$  м;  $b = 0,96$  м;  $m = 720$  кг

#### 4. Выводы

Получены аналитические зависимости вертикальной и горизонтальной составляющих амплитуд ко-

лебаний контейнера от его длины, которые дают возможность обоснованно определять место установки вибровозбудителей по длине контейнера.

#### Литература

1. Обработка у вільних абразивах: монографія / О.В. Бранспіз, М.О. Калмиков, С.М. Ясунік та ін.; під редакцією Л.М. Лубенської. – Луганськ; Вид-во «Ноулідж», 2010. – 319 с.
2. Струтинский В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки / В.Б. Струтинський. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612 с.
3. Смелянский В.М. Механика упрочнения поверхностного слоя деталей и машин в технологических процессах ППД / В.М. Смелянский. – М.: Машмир, 1992. – 60 с.
4. Барабашук В.И. Планирование эксперимента в технике / В.И. Барабашук. – К.: Техніка, 1984. – 200 с.
5. Сытник В.Ф. Основы научных исследований / В.Ф. Сытник. – К.: Вища школа, 1988. – 279 с.

УДК 519.2,621.002,658.62

## КОНТРОЛЬНАЯ КАРТА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КВАЛИТЕТОВ ТОЧНОСТИ

**Н. Ю. Ламнаур**

Кандидат технических наук, доцент  
Кафедра экономики предпринимательской и  
образовательной деятельности  
Украинская инженерно-педагогическая академия  
ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина, 61003  
Контактный тел.: (0572) 62-22-50, 067-305-94-39  
E-mail: lamnaouernatali@mail.ru

*В роботі знайдено числові характеристики розподілу випадкової величини розмірів, найбільш віддалених від номінального значення. Запропоновано одинарну контрольну карту*

*Ключові слова: точність, контрольна карта*

*В работе найдены числовые характеристики распределения случайной величины размеров, наиболее удалённых от номинального значения. Предложена одинарная контрольная карта*

*Ключевые слова: точность, контрольная карта*

*We find numerical characteristics of distribution of random variable sizes, most distant from the nominal value. The proposed single control card*

*Key words: accuracy, control card*

#### Введение

Для различных качественностей точности изготовления изделий в машиностроении применяются три закона распределения величин размеров, симметричных относительно своего математического ожидания: равномерный и нормальный законы, рас-

пределение Симпсона [1]. Индикатором качества изделий по точности изготовления есть то значение размера изделий, которое наиболее удалено от заданного размера. Поэтому, определяя законы распределения наиболее удалённых размеров от номинального значения для этих законов распределений, можно оценивать процесс изготовления изделий и

строить карту контроля по найденным числовым характеристикам.

Все эти распределения имеют вид:  $F((x-a)/\beta)$ , где  $a$  - параметр сдвига, а  $\beta$  - масштабный параметр, отсюда такие числовые характеристики как математическое ожидание и дисперсия случайной величины могут быть вычислены по нормированному распределению. В нормированном распределении  $a=0$  и  $\beta=1$ . Для этого вида распределений дисперсия получает множитель  $\beta^2$  по сравнению с нормированным распределением, а математическое ожидание определяется по формуле  $a+\beta\mu$ , где  $\mu$  - математическое ожидание нормированного распределения. Поэтому некоторые расчёты для математического ожидания и дисперсии будем производить по нормированному распределению.

Будем считать, что для симметричных распределений номинальный размер находится в точке симметрии. Решим для них задачу нахождения распределения величин размеров наиболее удалённых от номинального размера и найдём их числовые характеристики, если произведена выборка объёмом  $\gamma$ .

Если случайная величина размера  $X$  имеет функцию плотности  $f(x)$ , то распределение величины наиболее удалённой от номинального размера  $a$ , есть распределение последней порядковой статистики модуля случайной величины  $Z=|X-a|$  выборки объёма  $\gamma$ . Функция плотности распределения её имеет вид [2]:

$$g(z_{(\gamma)}) = \gamma[\psi(z)]^{\gamma-1}\varphi(z), \tag{1}$$

где  $\varphi(z)$  - плотность распределения случайной величины  $Z$ , а  $\psi(z)$  - функция распределения.

**Нормальный закон распределения размеров изделий**

Для нормального распределения, которое применимо для качественных точности с девятого и больше [1], с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-a)^2 / 2\sigma^2),$$

плотность распределения случайной величины  $Z=|X-a|$  имеет вид:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2 / 2\sigma^2) & \text{при } z > 0 \end{cases},$$

а функция распределения:

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

Тогда, из (1) следует, что математическое ожидание последней порядковой статистики выборки объёма  $\gamma$  нормированной случайной величины  $Z$  для нормального закона распределения определяется выражением:

$$\mu(Z_{(\gamma)}) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^\gamma \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{\gamma-1} dx.$$

Отсюда математическое ожидание случайных величин, наиболее удалённых от номинального размера, имеет вид:

$$M(Z_{(\gamma)}) = \sigma\mu(Z_{(\gamma)}) \tag{2}$$

Найдём начальный момент второго порядка последней порядковой статистики нормированной случайной величины  $Z$  для нормального закона распределения. Это будет:

$$\mu(Z_{(\gamma)}^2) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^\gamma \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{\gamma-1} dx.$$

Отсюда, дисперсия для нормального закона распределения ближайшего размера к номинальному размеру имеет вид:

$$D(Z_{(\gamma)}) = \sigma^2(\mu(Z_{(\gamma)}^2) - \mu^2(Z_{(\gamma)})). \tag{3}$$

В системе MAPLE составлена программа для нахождения дисперсии наиболее удалённых размеров от номинального размера в зависимости от объёма взятых изделий.

**Равномерный закон распределения размеров изделий**

Для определения точности размеров изделия, изготовленных по шестому и меньшему качеству точности, применяется равномерный закон распределения [1] с функцией плотности распределения размеров

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a-l; \\ \frac{1}{2l} & \text{при } a-l < x \leq a+l; \\ 0 & \text{при } x > a+l, \end{cases}$$

где  $a$  - середина отрезка длиной  $2l$ .

Тогда плотность распределения случайной величины  $Z=|X-a|$  имеет вид:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ \frac{1}{l} & \text{при } 0 < z \leq l. \end{cases}$$

Функция распределения этой случайной величины равна

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ \frac{z}{l} & \text{при } 0 < z \leq l. \end{cases}$$

Тогда, на основании (1) плотность распределения наиболее удалённых значений от среднего значения выборки объёма  $\gamma$  имеет вид:

$$g(z_{(r)}) = \frac{r}{l} z^{r-1}.$$

Математическое ожидание для данного распределения равно

$$M(Z_{(r)}) = \frac{lr}{r+1}, \tag{4}$$

а начальный момент второго порядка

$$M(Z_{(r)}^2) = \frac{rl^2}{r+2}.$$

Тогда, дисперсия этой случайной величины, наиболее удалённой от номинального размера, равна

$$D(Z_{(r)}) = M(Z_{(r)}^2) - M^2(Z_{(r)}) = l^2 \frac{r}{(r+1)^2(r+2)}. \tag{5}$$

Так как дисперсия генеральной совокупности  $D(X) = l^2/3$ , то эта дисперсия определяется через дисперсию генеральной совокупности выражением

$$D(Z_{(r)}) = \frac{3rD(X)}{(r+1)^2(r+2)}.$$

При объёме выборки  $r = 5$  эта дисперсия в 16,8 раза меньше дисперсии генеральной совокупности, что говорит о высокой точности этой статистики.

### Закон распределения Симпсона размеров изделий

Для качеств точности восьмого, седьмого и некоторых случаях шестого, для оценки точности используется распределение Симпсона [1]. Поэтому найдём для этого распределения плотность распределения случайной величины, наиболее удалённой от среднего значения.

Функция плотности распределения Симпсона с математическим ожиданием, равным  $a$ , имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a - 2l; \\ \frac{x + 2l - a}{4l^2} & \text{при } a - 2l < x \leq a; \\ \frac{a + 2l - x}{4l^2} & \text{при } a < x \leq a + 2l; \\ 0 & \text{при } x > a + 2l. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения  $Z = |X - a|$  этой случайной величины имеет вид:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ \frac{2l - z}{2l^2} & \text{при } 0 < z \leq 2l; \\ 0 & \text{при } z > 2l. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$\Psi(z) = \int_0^z \frac{2l - t}{2l^2} dt = \frac{4lz - z^2}{4l^2}.$$

Из (1) имеем, что плотность распределения наиболее удалённого значения от номинального значения из выборки объёма  $r$  будет иметь вид:

$$g(z_{(r)}) = \frac{r(2l - z)(4lz - z^2)^{r-1}}{2^{r-1}(2l^2)^r}.$$

Математическое ожидание для данного распределения равно

$$M(Z_{(r)}) = 2l \left( 1 - \frac{4^r \Gamma^2(r+1)}{\Gamma(2r+2)} \right), \tag{6}$$

где  $\Gamma(r+1) = r!$  - гамма - функция.

Начальный момент второго порядка имеет вид:

$$M(Z_{(r)}^2) = 4l^2 + \frac{4l^2}{r+1} - \frac{2^{2r+3} l^2 \Gamma^2(r+1)}{\Gamma(2r+2)}.$$

Тогда дисперсия значения, наиболее удалённого от номинального, имеет вид:

$$D(Z_{(r)}) = 4l^2 \left( \frac{1}{r+1} - \frac{16^r \Gamma^4(r+1)}{\Gamma^2(2r+2)} \right). \tag{7}$$

Так как дисперсия генеральной совокупности имеет вид:

$$D(X) = \frac{2l^2}{3},$$

то для распределения Симпсона дисперсия случайных величин при объёмах выборки  $r$ , наиболее удалённой от математического ожидания, равна

$$D(Z_{(r)}) = 6D(X) \left( \frac{1}{r+1} - \frac{16^r \Gamma^4(r+1)}{\Gamma^2(2r+2)} \right).$$

При объёме выборки  $r = 5$  эта дисперсия в 5,52 раза меньше дисперсии генеральной совокупности, что говорит о высокой точности этой статистики при таком малом объёме выборки.

### Карта контроля качества по наиболее удалённому размеру от номинального значения

Полученные дисперсии размера максимального отклонения от номинального размера для трёх законов распределения точности изготовления изделий малы при малом объёме выборки, что говорит о малой ошибке в размерах низкокачественных изделий с размерами, далёкими от номинального размера.

Поэтому, выбирая и измеряя их, и ранжируя их по отклонению от номинального размера, можно создать карту контроля получения качественных изделий.

Данные распределения симметричны относительно своего математического ожидания, а это значит, что номинальный размер находится в точке среднего значения. Пусть  $e_i$  и  $e_s$  нижние и верхние предельные стандартные значения размеров изделия. Тогда

**Таблица 2**

для данных распределений номинальный размер  $k_0 = (e_i + e_s) / 2$  и величина  $\delta = (e_s - e_i) / 2$  - есть половина величины поля допуска. Тогда, применяя (2),(3),(4),(5),(6) и (7) для различных  $r$  величина  $T = (\delta - M(Z_{(r)})) / \sigma(Z_{(r)})$  для данных распределений, где  $\sigma(Z_{(r)}) = \sqrt{D(Z_{(r)})}$  имеет значения, представленные в табл. 1.

За предупредительные границы карты контроля можно принять для каждого распределения  $K_1 = (\delta + 2M(Z_{(r)})) / 3$ , а за допустимые границы -  $K_2 = (\delta + M(Z_{(r)})) / 2$ .

r	Нормальный закон		Закон Симпсона		Равномерный закон	
	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>
5	0,682185 δ	0,761639 δ	0,753728 δ	0,815296 δ	0,888889 δ	0,916667 δ
6	0,700888 δ	0,775666 δ	0,772672 δ	0,829504 δ	0,904762 δ	0,928571 δ
7	0,716412 δ	0,787309 δ	0,787827 δ	0,840870 δ	0,916667 δ	0,937500 δ
8	0,729637 δ	0,797228 δ	0,800308 δ	0,850231 δ	0,925926 δ	0,944444 δ
9	0,741129 δ	0,805847 δ	0,810818 δ	0,858113 δ	0,933333 δ	0,950000 δ
10	0,751270 δ	0,813453 δ	0,819827 δ	0,864870 δ	0,939394 δ	0,954545 δ

**Таблица 1**

r	$T = (\delta - M(Z_{(r)})) / \sigma(Z_{(r)})$		
	Нормальный закон	Закон Симпсона	Равномерный закон
5	2,571263681	2,125561199	1,183215957
6	2,471253846	2,091490878	1,154700539
7	2,386086310	2,066843406	1,133893419
8	2,311488410	2,048182421	1,118033988
9	2,244861424	2,033562117	1,105541597
10	2,184497197	2,021797832	1,095445115

В табл. 2 приведены значения  $K_1$  и  $K_2$  для трёх распределений точности изготовления.

Для  $r=8$  был проведён статистический анализ с использованием карты контроля при периодическом контроле с данными границами  $K_1$  и  $K_2$  при раз-

личных качествах точности. Он показал, что полученные допустимые границы достаточно хорошо определяют возможный выход размера за допуск для линейного процесса изменения среднего значения этих распределений.

**Выводы**

1. Полученные результаты по распределению наиболее удалённого значения от среднего значения и их числовые характеристики позволили предложить одинарную карту контроля качества.
2. Построенная карта контроля качества для различных качеств точности изделия решает сразу две задачи: определения размера в допуске и осуществление во времени процесса изготовления изделия.
3. Проведенный анализ показал, что предложенная карта контроля качества применима для любого качества точности создания изделия во времени в ходе производственного процесса.

**Литература**

1. Маталин А.А. Технология машиностроения: Учебник для машиностроительных вузов по специальности «Технология, металло-режущие станки и инструменты». [Текст] / А.А. Маталин -Л.: Машиностроение, 1985. -496с.
2. Дейвид Г. Порядковые статистики [Текст]: пер. с англ. под ред. В.В.Петрова; – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. -336с.