

# О ДВУХ МОДЕЛЯХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОПОР ШАССИ ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ МАШИН

**Б. М. Шифрин**

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра общетехнических дисциплин и авиационной химии

Государственная летная академия

ул. Добровольского, 1, г. Кировоград, Украина, 25005

Контактный тел.: 095-541-31-05

E-mail: B\_Shifrin@mail.ru

*Стаття є продовженням робіт по вивчення поперечних пружно-фрикційних коливань опор шасі пневмоколісних машин. За допомогою повнішої, ніж розглядалися раніше, математичної моделі показана придатність спрощених моделей*

**Ключові слова:** коливання, опора шасі, математична модель

*Статья является продолжением работ по изучению поперечных упруго-фрикционных колебаний опор шасси пневмоколесных машин. С помощью более полной, чем рассматривались ранее, математической модели показана пригодность упрощенных моделей*

**Ключевые слова:** колебания, опора шасси, математическая модель

*The article is continuation of works for studies transversal resiliently friction vibrations of supports of undercarriage of vehicle. By more complete, than examined before, a fitness is retained a mathematical model simplified models*

**Keywords:** vibrations, support of undercarriage, mathematical model

## 1. Введение

Вопросы математического моделирования движения автомобилей, автопоездов, самолетов, движущихся по взлетно-посадочной полосе, продолжают оставаться актуальными. Это, в частности, обусловлено тем, что остается нерешенной задача создания удобной и адекватной модели пневмоколеса [1], а также небезопасностью изучения ряда режимов движения в ходе натурных испытаний транспортной пневмоколесной машины (ТПКМ). Возникающие в процессе движения машины колебания опор шасси являются фактором, снижающим как безопасность движения, так и ресурс машины.

Настоящая работа является продолжением изучения упруго поперечных колебаний опор шасси, обусловленных наличием немонотонного участка кривой «поперечная сила трения на шине – угол увода» [1-3]. В работе изучается математическая модель, обладающая несколько большей общностью, чем модель [2]. Полученные результаты сопоставлены с результатами [2], что и предопределило название статьи.

## 2. Изучаемые математические модели и постановка задачи

Будем изучать поперечные (т.е. следующие вдоль оси OZ, рис.1) колебания опоры шасси ТПКМ. На рис. 1 показана модель изучаемого объекта и его движения. ТПКМ рассмотрим как механическую систему двух разновеликих по массе твердых тел – корпуса «1» и

опоры шасси «2». Опора шасси состоит из невесомой стойки и приведенного пневмоколеса.

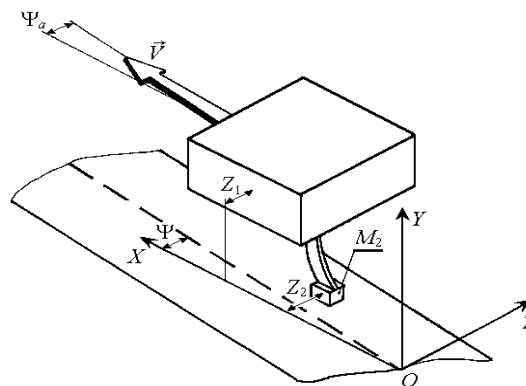


Рис. 1. Модель ТПКМ и ее движения

В ходе изучаемого движения тела «1» и «2» перемещаются поступательно. Продольная ось корпуса и плоскость диска пневматика все время параллельны оси OX, а поперечная ось корпуса и ось качения пневматика – оси OZ. Между продольной осью корпуса и линией заданного пути имеется угол рыскания продольной оси  $\Psi$ . Такой характер движения можно наблюдать, в частности, при посадке самолета при сильном боковом ветре.

Запишем уравнения движения тел «1», «2»:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} + c(Z_1 - Z_2) &= P_0, \\ M_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} + c(Z_2 - Z_1) &= -F \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $M_1, Z_i (i=1,2)$  – массы корпуса и опоры шасси, а также их координаты вдоль инерциальной оси OZ;  $A$  – жесткость упругой связи, определяемая изгибной жесткостью стойки;  $P_0 = \text{const}$  – движущая сила;  $F \neq \text{const}$  – сила трения;  $t$  – размерное время. Понятно, что  $M_2 \ll M_1$ . Продольную скорость тел системы будем полагать равной и постоянной,  $V = \text{const}$ .

Модель (1) предлагается в данной работе. Коротко представим также упрощенную модель [2]. Будем считать, что масса корпуса многократно превышает массу опоры шасси и потому отношение масс  $M_2 / M_1 = 0$ . Запишем уравнение поперечных колебаний опоры шасси относительно корпуса:

$$M_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} + c(Z_2 - Z_1) = -F, \tag{2}$$

где положим  $Z_1 = Wt$ ,  $W = \text{const}$ ,  $W \ll V$ .

Предполагая увод чистым [1], силу трения в формулах (1) и (2), как и в предыдущих работах [2, 3], представим в виде:

$$F = \mu_* N_0 f(u), \tag{3}$$

где  $N_0 = \text{const}$  – нормальная реакция опорной поверхности;  $\mu_* = \text{const}$  – коэффициент трения;  $f(u)$  – характеристика трения или безразмерная нелинейная функция относительного угла увода:

$$u = (dZ_2 / dt) / (V U_{cr}), \tag{4}$$

где  $U_{cr} = \text{const}$  – критический угол увода, при превышении которого на всем участке контакта шины с опорной поверхностью наблюдается скольжение.

Отношение  $P_0 / N_0$  назовем равным единице,

$$P_0 / (N_0 \mu_*) = p_0 = 1, \tag{5}$$

и сопоставим решения системы (1) и уравнения (2). Такое сопоставление даст возможность оценить влияние конечности отношения масс  $M_2 / M_1$ , а также неравномерности поперечного движения корпуса на колебания опоры шасси. Условие (5) равносильно требованию того, что изучаемое движение корпуса близко равномерному и реализуется угол увода близкий критическому.

### 3. Аналитико-численный анализ

Положим [2]:

$$f = f_1 = 2u - u^2, u \in [0, 8; 1, 2]. \tag{6}$$

Введем обозначение для деформации внутренней связи  $Z_1 - Z_2 = \Delta$  и запишем уравнения (1) в ином виде:

$$V_1 - V_2 = \frac{d\Delta}{dt}, M_1 \frac{dV_1}{dt} + c\Delta = P_0, M_2 \frac{dV_2}{dt} - c\Delta = -F \tag{7}$$

где  $V_i = dZ_i / dt, i=1,2$ . Система (7) приводится к одному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\left(\frac{M_2}{c}\right) \frac{d^3 V_2}{dt^3} + \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2}\right) \frac{dV_2}{dt} = \frac{P_0 - F}{M_1} - \left(\frac{1}{c}\right) \frac{d^2 F}{dt^2}. \tag{8}$$

Используя (4) и (6), а также безразмерное время

$$\tau = \omega_0 \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1}}, \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M_2}},$$

уравнение (8) перепишем в виде уравнения относительно функции  $u(\tau)$ :

$$\ddot{u} + \dot{u} = \varepsilon \Phi_u(u, \dot{u}, \ddot{u}), \tag{9}$$

где  $\varepsilon = \text{const} = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^{3/2} \cdot \frac{N_0 \mu_*}{M_1 V U_{cr} \omega_0}$ , точками обозначено дифференцирование по времени  $\tau$ ,

$$\Phi_u(u, \dot{u}, \ddot{u}) = p_0 - 2u + u^2 + 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_2}\right)(\dot{u}^2 - \ddot{u} + u\ddot{u}).$$

Учтем (5) и решение уравнения (9) будем искать в виде:

$$u(\tau) = y(\tau) + 1.$$

Приходим к уравнению относительно  $y(\tau)$ :

$$\ddot{y} + \dot{y} = \varepsilon \Phi_y(y, \dot{y}, \ddot{y}), \tag{10}$$

где

$$\Phi_y(y, \dot{y}, \ddot{y}) = y^2 + 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_2}\right)(\dot{y}^2 + y\ddot{y}).$$

Применяя технику метода усреднения [4, 5], решение уравнения (10) будем искать в виде:

$$y(\tau) = B(\tau) + A(\tau) \cos \theta(\tau), \theta(\tau) = \tau + \vartheta(\tau),$$

где  $B, A, \vartheta$  – временные функции, которые нужно определить. Потребуем выполнения условий:

$$\dot{y} = -A \sin \theta \text{ и } \ddot{y} = -A \cos \theta,$$

с учетом которых приходим к точным уравнениям относительно функций  $B, A, \vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{B} &= \varepsilon \Phi_y(B, A, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} A &= \varepsilon \Phi_y(B, A, \vartheta) \sin \theta, \\ \dot{A} &= \varepsilon \Phi_y(B, A, \vartheta) \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

После усреднения правых частей этих уравнений по быстро вращающейся фазе  $\theta$  находим приближенные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{B} &= \varepsilon(0.5A^2 + B^2), \\ \dot{\vartheta} A &= 0, \\ \dot{A} &= \varepsilon(M_1 / M_2) AB \end{aligned} \right\}. \tag{11}$$

Таким образом, приближенное решение уравнения (9) имеет вид:

$$u_{(1)}(\tau) = 1 + B_{(1)}(\tau) + A_{(1)}(\tau) \cos(\tau + \vartheta_{0(1)}), \quad (12)$$

где  $\vartheta_0$  – начальное значение фазового угла, а индекс (1) указывает, что решение относится к математической модели (1).

Применяя метод усреднения к модели (2), получим [2]:

$$u_{(2)}(\tau) = w_0 + A_{0(2)} \exp[\epsilon(w_0 - 1) \frac{M_1 + M_2}{M_2} \tau] \cos(\sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}} \tau + \vartheta_{0(2)}), \quad (13)$$

где  $w_0 = W / (VU_{cr}) = \text{const}$ ,  $A_0, \vartheta_0$  – начальные значения амплитуды и фазового угла, индекс (2) указывает на модель (2).

Положим

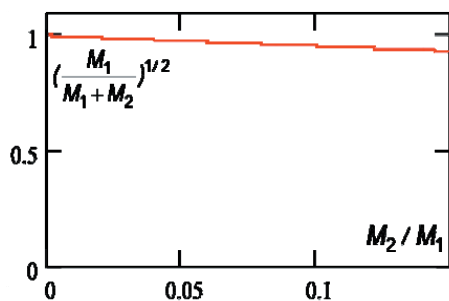
$$1 + B_{0(1)} = w_0; A_{0(1)} = A_{0(2)}; \vartheta_{0(1)} = \vartheta_{0(2)}$$

и сопоставим решения (12) и (13). Предварительно в уравнениях (11) перейдем к безразмерному времени  $T = \epsilon(M_1 / M_2)$ :

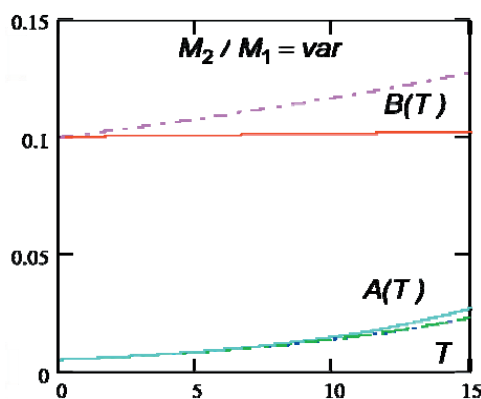
$$\left. \begin{aligned} dB/dT &= (M_2 / M_1)(0,5A^2 + B^2), \\ dA/dT &= AB \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С помощью рис. 2а приходим к выводу о близости частот колебаний решений (12) и (13) для реальных конструкций ТПКМ.

На рис. 2б приведены интегральные кривые  $A(T), B(T)$ , полученные с помощью интегрирования уравнений (14) методом Рунге-Кутты, при следующих начальных условиях:



а)



б)

Рис. 2. Результаты моделирования

$B_0 = 0,1; A_0 = 0,005$ . Нижние кривые построены для отношения  $M_1 / M_2 = 70$ , а верхние – для отношения  $M_1 / M_2 = 7$ . Кроме того, на рисунке приведена экспоненциальная кривая

$$A_{(2)}(\tau) = A_{0(2)} \exp[\epsilon(w_0 - 1) \frac{M_1 + M_2}{M_2} \tau],$$

которая совпала с кривой  $A(T)$  для случая  $M_1 / M_2 = 70$ .

#### 4. Замечание об адекватности использованной модели пневмоколеса

В модели ТПКМ опора представлена весовым абсолютно жестким пневмоколесом и невесомой упругой стойкой. Покажем, что при рассматриваемых значениях углов увода (6) пневмоколесо ведет себя подобно абсолютно твердому телу.

Вблизи нулевого основного угла увода поведение пневмоколеса при его поперечных колебаниях заметно отличается от поведения абсолютно твердого тела – проявляется податливость шины.

Где-то вблизи критического угла увода  $U_{cr}$  податливость пневмоколеса исчерпывается, сила трения  $F$  перестает расти и пневмоколесо начинает скользить в поперечном направлении подобно абсолютно твердому телу.

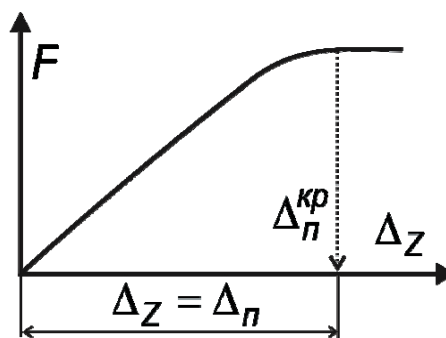


Рис. 3. Сила трения и деформация пневматика

Уточним сказанное, располагая экспериментальным материалом о зависимостях  $F(\Delta_n)$ , где  $\Delta_n$  – поперечная деформация пневмоколеса. Эти зависимости используются при определении поперечной жесткости шин [6, 7]. (В статье [6] представлены данные о поведении пневмоколеса с шиной P165/80R13 при вертикальном нагружении  $N = 4,2$  кН; в отчете [7] – данные о поведении 4-рех

типов шин при вертикальных нагружениях трех уровней:  $N = 2; 4; 6$  кН). Опуская некоторые детали, экспериментальные зависимости  $F(\Delta_z)$  имеют вид, представленный на рис. 3, здесь  $\Delta_z$  – поперечное смещение испытательного стола, на котором установлено пневмоколесо, диск которого неподвижно закреплен. До деформации  $\Delta_n^{kp}$  пневмоколесо податливо и деформируется при смещении стола; прило-

женная сила, а также сила трения при этом растут; зависимость  $F(\Delta_n)$  близка линейной.

При превышении деформации  $\Delta_n^{kp}$  рост прилагаемой силы и силы трения прекращается – шина начинает проскальзывать относительно смещаемого стола. Расчетным путем установим углы увода, соответствующие деформации  $\Delta_n^{kp}$ , и сопоставим эти расчетные углы ( $U^{kp}$ ) с критическим углом  $U_{cr} = 0,2$  радиана. Расчет выполним с помощью формулы И. Рокара [8], а именно,  $U^{kp} = \Delta_n^{kp} / R_n$ , где  $R_n$  – радиус пневмоколеса. Результаты расчетов поместим в таблицу.

Таблица

Отношение  $U^{kp} / U_{cr}$ 

Шина	N, кН	$U^{kp} / U_{cr}$
Goodyear, 205/55R16	2,0	0,317
Goodyear, 205/55R16	4,0	0,385
Goodyear, 205/55R16	6,0	0,495
P165/80R13	4,2	0,641

## 5. Выводы

Теоретически изучены поперечные упруго фрикционные колебания опор шасси транспортной пневмоколесной машины.

Основной упор сделан на проверку возможности использования упрощенной расчетной схемы [2, 3], где принято, что корпус движется равномерно, а масса опоры шасси пренебрежимо мала по сравнению с массой корпуса.

Привлечена математическая модель, позволяющая учесть и неравномерность движения корпуса, и конечность отношения масс корпуса и опоры шасси. Проверка показала, что для изучения упруго фрикционных колебаний можно использовать упрощенную расчетную схему [2, 3]. Используя более полную модель, рассмотренную в данной статье, замечаем, что поправки, относящиеся к колебательной составляющей движения, малы. Работа направлена на изучение адекватности ранее предложенных математических моделей колебаний опор шасси транспортной пневмоколесной машины.

## Литература

1. Раджика Н.В. Tyre and vehicle dynamics [Текст] / Н.В. Раджика. - Butterworth-Heinemann, 2006. - 642 p.
2. Плахтиенко Н.П. О поперечных колебаниях шасси самолета [Текст] // Н. П. Плахтиенко, Б.М. Шифрин - Проблемы прочности. - 2002. - №6. С.79-88.
3. Шифрин Б.М. Фрикционные неустойчивость и колебания самолета на разбеге/пробеге [Текст] // Б.М. Шифрин. Восточно-европейский журнал передовых технологий. - 2006. - №6/2 (24). С.19-24.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний [Текст] / В.Л. Бидерман. - М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов, Ю.С. Митропольский. - М.: ГИФМЛ, 1963.- 412 с.
6. Loeb J. S. Lateral stiffness, cornering stiffness and relaxation length of the pneumatic tire [Текст] /J.S. Loeb, D.A. Guenther, F. Chen Hung-Hsu, J.R. Ellis// SAE Techn. Pap. Ser., 900129, 1990. - 9 p.
7. Schmeitz A.J.C. Run flat tires vs. conventional tires. An experimental comparison [Текст] /A.J.C. Schmeitz, I.J.M. Besselink, H. Nijmeijer// EU of technology, Eindhoven, 2006. - 41 p.
8. Рокар И. Неустойчивость в механике: автомобили, самолеты, висячие мосты: пер. с франц. [Текст] /И. Рокар. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 287 с.