В представленій роботі розглядається розв'язання узагальненої зв'язаної динамічної задачі термопружності для півпростору. Розв'язання рівнянь виконане за допомогою теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь

Ключові слова: взаємозв'язана термопружність, асимптотико-груповий аналіз

В представленной работе рассматривается решение обобщенной связанной динамической задачи термоупругости для полупространства. Решение уравнений выполнено с помощью теории инвариантно-групповых свойств дифференциальных уравнений

Ключевые слова: взаимосвязанная термоупругость, асимптотико-групповой анализ

In the presented work the decision of the generalized interrelated dynamic task of thermoelasticity is examined for half-space. The decision of equalizations is executed with the theory of invariant-group properties of differential equalizations

Keywords: interrelated thermoelasticity, method of the asymptotic-group analysis

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А.Д. Шамровский
Доктор технических наук, профессор
Контактный тел.: (061) 275-35-73, 066-733-98-05
E-mail: merkatan@ukr.net

Г.В. Меркотан
Аспирант*
Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем
Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69000
Контактный тел.: (061) 275-35-73, 066-733-98-05
E-mail: merkatan@ukr.net

Явление термоупругости играет большую роль во многих задачах науки и техники, связанных с изучением процессов деформации и нагрева различных тел.

Уравнения термоупругости описывают распределение температуры в теле и его деформации, вызванные неоднородностью температурного поля и приложенными к телу силами.

Для численного решения стационарных задач теории упругости давно и успешно применяют метод конечных элементов [6]. В [9,5,4] при решении задач используют метод конечных разностей. В ряде работ (например, [1, 8]), рассматриваются разностные методы для решения динамических задач теории упругости.

Представленная работа посвящена решению динамической связанной задачи термоупругости с учетом конечности скорости распространения тепла в одномерном случае. Подобная задача рассматривается в [7] и решается с помощью метода интегральных преобразований, но имеет ряд сложностей при переходе от изображения к оригиналу. Для решения поставленной задачи применен метод асимптотико-группового анализа[10], предложенный Шамровским А.Д. С помощью данного метода удалось сделать качественный анализ движения плоской механической и тепловой волны. Метод асимптотико-группового анализа обладает достаточной эффективностью, решение разыскивается как инвариантно-групповое и доводится до наглядного графического результата.

Задача распространения механических и тепловых волн в изотропном однородном полупространстве описывается системой уравнений:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial T}{\partial x}-\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial t}+\eta\tau_r\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial t^2}$$

$$\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}-\beta T \quad \sigma_{yy}=\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}-\beta T$$

$$\sigma_{zz}=\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}-\beta T$$

Учтем, что $\beta=\alpha_T(3\lambda+2\mu)$, $\eta=\frac{T_0\alpha_T(3\lambda+2\mu)}{\lambda_T}$, $a=\frac{\lambda_T}{c_v}$ – коэффициент температуропроводности, $c_q=\sqrt{\frac{a}{\tau_r}}$ – скорость распространения тепла, $T=\theta-T_0$ – приращение температуры точек тела, θ – абсолютная температура, t – время, u – перемещение, τ_r – время релаксации теплового потока, λ_T – коэффициент теплопроводности изотропного тела.

Перейдем к безразмерным величинам.

$$\bar{x}=\frac{c_1 x}{a},\ \bar{t}=\frac{c_1^2 t}{a},\ \bar{T}=2\alpha_T T,\ U=\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{c_1}{a}u,\ \bar{\sigma}=\frac{\sigma}{3\lambda+2\mu}.$$

$\varepsilon = \dfrac{\alpha_t^2(3\lambda+2\mu)^2 T_0}{(\lambda+2\mu)c_v}$ - коэффициент связности, при $\delta = 0$ задача несвязанная;

$M = \dfrac{c_1}{c_q}$

где c_1 – скорость звука в термоупругой среде (продольные волны), c_q – скорость тепловой волны. При $c_q \to \infty$ (M=0) имеем классическую модель задачи термоупругости.

Опустим черточки над переменными и перепишем уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{M^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}\right)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - T \quad \sigma_{yy} = \left(1-2a_s^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - T \quad \sigma_{zz} = \left(1-2a_s^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - T$$

Уравнения (2) описывают распространение связных одномерных термоупругих волн. Рассмотрим эти уравнения подробнее. Возьмем от первого уравнения производную по x и введем обозначения:

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ e_x = \partial_x u \tag{3}$$

В итоге первые два из уравнений (2) примут вид:

$$\partial_x^2 e_x - \partial_x^2 T = \partial_t^2 e_x \tag{4}$$

$$-\varepsilon\partial_t^2 e_x + M^2\partial_x^2 T = \partial_t^2 T + M^2\left(\varepsilon\partial_t e_x + \partial_t T\right)$$

Выполняя некоторые преобразования, получим:

$$\partial_x^2\left(e_x - T\right) = \partial_t^2 e_x \tag{5}$$

$$\partial_x^2\left[-\varepsilon e_x + \left(\varepsilon + M^2\right)T\right] = \partial_t^2 T$$

Введем в рассмотрение следующие матрицу и вектор:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\varepsilon & \varepsilon + M^2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} e_x \\ T \end{pmatrix} \tag{6}$$

Тогда уравнения (5) можно записать в матричной форме:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X \tag{7}$$

Найдем собственные числа матрицы A.

$$a_{1,2}^2 = \tfrac{1}{2}\left(1+\varepsilon+M^2\right) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\varepsilon+M^2\right)^2 - 4M^2}$$

Введем в рассмотрение вектор:

$$Y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

связанный с вектором X соотношением:

$$X = UY\,, \tag{8}$$

где U – матрица собственных векторов.

В развернутом виде имеем:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow e_x = f + g,\ T = \alpha_1 f + \alpha_2 g$$

где $\alpha_i = 1 - a_i^2 \quad (i = 1,2)$

Подставим (8) в (7), получая:

$$\partial_x^2 AUY = \partial_t^2 UY$$

Умножая полученное соотношение слева на матрицу U^{-1} имеем:

$$U^{-1} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y,\quad \Lambda = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

В развернутом виде полученное соотношение примет вид:

$$a_1^2\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0\,,\ a_2^2\partial_x^2 g - \partial_t^2 g = 0$$

Таким образом, переходя от величин e_x и T к величинам f и g, мы получили систему двух независимых волновых уравнений, описывающих распространение фронтов волн со скоростями a_1 и a_2.

Вернемся теперь к полной системе уравнений (5). Вводя в рассмотрение матрицу:

$$B = M^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

и используя вновь (6) запишем (4) в матричной форме:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X + \partial_t BX$$

Подставляя сюда (8) получаем:

$$\partial_x^2 AUY = \partial_t^2 UY + \partial_t BUY \tag{9}$$

Умножая соотношение (9) слева на матрицу U^{-1}, имеем:

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y + \partial_t DY \tag{10}$$

Здесь:

$$D = U^{-1}BU =$$

$$= \frac{M^2}{\alpha_2 - \alpha_1}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{M^2\left(\varepsilon + \alpha_1\right)}{\alpha_2 - \alpha_1}\,,\ \beta_2 = \frac{M^2\left(\varepsilon + \alpha_2\right)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

В развернутой форме соотношение (10) примет вид:

$$a_1^2\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = -\beta_1\partial_t f - \beta_2\partial_t g \tag{11}$$

$$a_2^2\partial_x^2 g - \partial_t^2 g = \beta_1\partial_t f + \beta_2\partial_t g$$

Принципиальным отличием данных уравнений по сравнению с уравнениями (4) и (5) является выделение волновых операторов с известными скоростями распространения фронтов волн.

Используя (2) добавим к (11) соотношение упругости:

$$\sigma_{xx} = e_x - T = a_1^2 f + a_2^2 g$$

При необходимости нахождения перемещения u, будем использовать (5).

Разыскиваем решение уравнений полученных уравнений (11) в виде:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \tag{12}$$

Члены рядов (12) удовлетворяют рекуррентным уравнением:

$$\begin{aligned} &a_1^2\partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i = -\beta_1\partial_t f_{i-1} - \beta_2\partial_t g_{i-1} \\ &a_2^2\partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i = \beta_1\partial_t f_{i-1} + \beta_2\partial_t g_{i-1} \quad (i = 1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{13}$$

В свою очередь, решение уравнений (13) разыскиваем в виде:

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} f_{ij}^1 x^{i-j}(a_1 t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=2}^{i} f_{ij}^2 x^{i-j}(a_2 t - x)^{\gamma+j-1} \tag{14}$$

$$g_i = \sum_{j=2}^{i} g_{ij}^1 x^{i-j}(a_1 t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=1}^{i} g_{ij}^2 x^{i-j}(a_2 t - x)^{\gamma+j-1} \quad (i = 1,2,\ldots)$$

Коэффициенты данных сумм можно найти из рекуррентных соотношений, получаемых после подстановки (14) в уравнения (13).

Объединяем выражения (12) и (14), затем группируем слагаемые с одинаковыми степенями величин $a_1 t - x$ и $a_2 t - x$. В итоге получаем выражения для нахождения искомых функций:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^1(x)(a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} f_i^2(x)(a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \tag{15}$$

$$g = \sum_{i=2}^{\infty} g_i^1(x)(a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(x)(a_2 t - x)^{\gamma+i-1}$$

Подставляем полученные выражения (15) в (11). После вычисления соответствующих производных и приведения расщепления по одинаковым степеням $a_1 t - x$ и $a_2 t - x$ приходим к дифференциальным уравнениям, решение которых в первом приближении будет:

$$f_1^1 = f_{11}^1 e^{-\delta_1 x}, \quad g_1^2 = g_{11}^2 e^{-\delta_2 x}$$

Нетрудно проверить, что экспоненциальный множитель будет входить и в результаты всех приближений. В итоге получаем:

$$f_i^1 = e^{-\delta_1 x} F_i^1(x), \quad G_i^1 = e^{-\delta_1 x} G_i^1(x),$$

$$f_i^2 = e^{-\delta_2 x} F_i^2(x), \quad G_i^2 = e^{-\delta_2 x} G_i^2(x)$$

Решение этих уравнений разыскивается в виде:

$$F_i^1 = \sum_{j=1}^{i} F_{ij}^1 x^{i-j}, \; G_i^1 = \sum_{j=2}^{i} G_{ij}^1 x^{i-j}, \; F_i^2 = \sum_{j=2}^{i} F_{ij}^2 x^{i-j},$$

$$G_i^2 = \sum_{j=1}^{i} G_{ij}^2 x^{i-j} \quad (i = 1,2,\ldots)$$

Подставляя полученные соотношения в уравнения (15), получим соотношения для нахождения функций нового базиса:

$$f = e^{-\delta_1 x}\sum_{i=1}^{\infty}(a_1 t - x)^{\gamma+i-1}\sum_{j=1}^{i} F_{ij}^1 x^{i-j} +$$

$$+ e^{-\delta_2 x}\sum_{i=2}^{\infty}(a_2 t - x)^{\gamma+i-1}\sum_{j=2}^{i} F_{ij}^2 x^{i-j}$$

$$g = e^{-\delta_1 x}\sum_{i=2}^{\infty}(a_1 t - x)^{\gamma+i-1}\sum_{j=2}^{i} G_{ij}^1 x^{i-j} +$$

$$+ e^{-\delta_2 x}\sum_{i=1}^{\infty}(a_2 t - x)^{\gamma+i-1}\sum_{j=1}^{i} G_{ij}^2 x^{i-j}$$

Для нахождения констант интегрирования $F_{ii}^1, F_{ii}^2, G_{ii}^1, G_{ii}^2$ используем граничные условия.

При x=0 имеем:

$$f(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_1^{\gamma+i-1} F_{ii}^1 t^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_2^{\gamma+i-1} F_{ii}^2 t^{\gamma+i-1}$$

$$g(0,t) = \sum_{i=2}^{\infty} a_1^{\gamma+i-1} G_{ii}^1 t^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} a_2^{\gamma+i-1} G_{ii}^2 t^{\gamma+i-1}$$

Таким образом, напряжение и температуру на границе x=0 следует задавать в виде рядов по возрастающим степеням времени t:

$$\sigma(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i t^{\gamma+i-1}, \quad T(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i t^{\gamma+i-1}$$

Рис. 1. Графики напряжения, температуры и перемещения при значении времени t=0.5

Наиболее интересными являются задачи о внезапно приложенном на границе постоянном напряжении либо температуре. При этом $\sigma_1 \neq 0$ и/или $T_1 \neq 0$ задаются.

На графике приведен пример внезапно заданной на границе температурой для термоупругого полупространства при внезапно приложенной на границе температуре.

сматриваем обобщенную динамическую задачу, т.е. учитываем конечность распространения тепла. В этом случае имеет смысл рассматривать движение тепловой и механической волны только при малых значениях времени.

В работе выведено инвариантно-групповое решение динамической связанной задачи обобщенной термоупругости. Рассмотрен одномерный случай, на

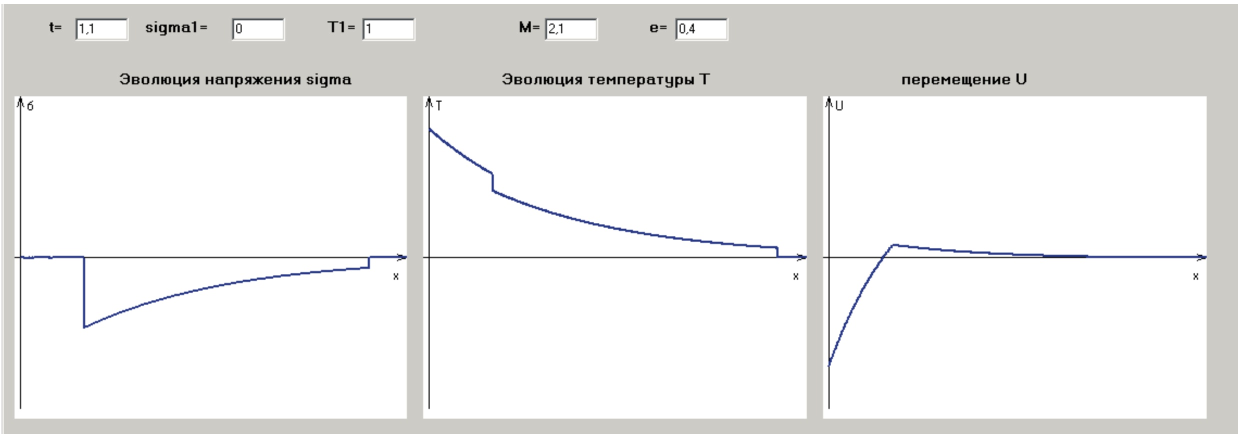

Рис. 2. Графики напряжения, температуры и перемещения при значении времени t=1.1

Мы видим, что в полупространстве образуются два фронта волн. Фронт упругой волны предшествует тепловой.

С уменьшением теплоотдачи с поверхности полупространства динамические температурные напряжения уменьшаются по экспоненте. Здесь мы рас-

примере которого мы убедились в относительной простоте предложенного метода асимптотико-группового анализа, который можно также применять для аналогичных двумерных задач. Отметим качественное сходство полученных результатов с данными, описанными в исследованиях [7].

Литература

1. Белужина, И. Г. Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями. / И. Г. Белужина // Журн. ЖВМ и МФ. – 1969. – Т.9, № 2 – с.362-372.
2. Гасилов, В.А. К расчету напряженно-деформированного состояния среды в области сложной формы. / В. А. Гасилов, С. И. Деревянко, В. И. Маслянкин // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР – 1988. – № 31, 25 – с. 82.
3. Коваленко, А. Д. Введение в термоупругость. / А. Д. Коваленко – К.: Наукова думка, 1965. – 204с.
4. Молчанов, И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. / И.Н. Молчанов – К.: Наукова думка, 1979. – 316с.
5. Партон, В. З. Методы математической теории упругости. / В. З. Партон, П. И. Перлин – М.: Наука, 1981. – 688с.
6. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. / Победря, Б.Е. – Изд-во Московского университета, 1995. – 366с.
7. Подстригач, Я.С. Обобщенная термомеханика. / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно – К.: Наукова думка – 1976 г. –356 с.
8. Самарский, А. А. Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости. / А. А. Самарский // Журн. ЖВМ и МФ. – 1965. – т.5, № 1 – с.34-43.
9. Тимошенко, С. П. Теория упругости. / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1975. – 576 с.
10. Шамровский, А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. / А. Д. Шамровский – Запорожье: ЗГИА, 1997. –136 с.
11. Кукуджанов, В. Н. Динамические задачи взаимосвязанной термоупругости. / Кукуджанов В.Н., Острик А.В. // Інститут проблем механики, М.: Наука, 1988. – с. 125-130.