

В роботі приведена методика розрахунку точок перетину орбіт метеорів потоку з площиною перпендикулярною середній орбіті потоку. Отримання таких перетинів дозволяє як дослідити тонку структуру метеорного потоку, так і перевірити якість його виділення з допомогою існуючих функцій відстані в просторі елементів орбіт (D_{SH} -критерій Саутворта і Хокінса, D_r -критерій Друмонда та ін).

Ключові слова: перетин орбіт, метеорні потоки, штрафні функції, D -критерій, відстань, орбіта, метеор

В работе приведена методика расчета точек пересечения орбит метеоров потока с плоскостью перпендикулярной средней орбите потока. Получение таких сечений позволяет как исследовать тонкую структуру метеорного потока, так и проверить качество его выделения с помощью существующих функций расстояния в пространстве элементов орбит (D_{SH} -критерий Саутворта и Хокинса, D_r -критерий Друмонда и др.)

Ключевые слова: сечение орбит, метеорные потоки, штрафные функции, D -критерий, расстояние, орбита, метеор

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОРБИТ МЕТЕОРОВ ПОТОКА С ПЛОСКОСТЬЮ

С. И. Борбулев

Генеральный директор

ООО «Ампер»

ул. Мельникова, 2, г. Харьков, Украина, 61002

E-mail: ort@kture.kharkov.ua

Ю. И. Волощук

Доктор технических наук, профессор*

E-mail: ort@kture.kharkov.ua

Ю. В. Черкас

Аспирант*

E-mail: jura_cherkas@meta.ua

*Кафедра сетей связи

Харьковский национальный университет

радиоэлектроники

пр. Ленина, 16, г. Харьков, Украина, 61166

1. Введение

Необходимо отыскать способ выявления структурных особенностей метеорных потоков, выделенных из всего имеющегося множества орбит индивидуальных метеоров с помощью D_{SH} -критерия Р. Саутворта и Дж. Хокинса [1].

Об алгоритме кластер-анализа [2, 3]. Оригинальная методика оценки средних орбит метеорных потоков и ее сравнительный анализ с методиками, использовавшимися до сих пор, изложена в [4]. В работах [5 – 7] приведены некоторые предварительные результаты анализа каталога потоковых и спорадических метеоров Харьковского национального университета радиоэлектроники (ХНУРЭ). Как отмечено в [2], при выявлении метеорных потоков в ХНУРЭ для кластер-анализа использован известный алгоритм ФОРЕЛЬ [8, 9]. Этот алгоритм предназначен для выявления кластеров простой формы – гиперсфер.

В шестимерном фазовом пространстве элементов орбит метеоров в общем случае кластеры имеют более сложную форму, которая определяется не столько происхождением того или другого роя и потока, сколько необходимым условием наблюдения метеоров в атмосфере Земли:

$$1 - 0.017 < R = \frac{q(1+e)}{1 \pm e \cos \omega} < 1 + 0.017, \quad (1)$$

где R – расстояние от центра Солнца до одного из узлов орбиты в а.е., ω – аргумент перигелия, q – перигелийное

расстояние, e – эксцентриситет орбиты, пересекающейся с орбитой Земли, знак "+" соответствует восходящему, а "–" – нисходящему узлу орбиты. Из (1) следует, что элементы орбит метеоров, наблюдаемых в атмосфере Земли, не могут изменяться независимо друг от друга, они жестко связаны между собой. Однако, следует отметить, что при нахождении "центра" кластера – средней орбиты потока – погрешность оценки можно устранить, если при оценке средних использовать весовые коэффициенты [2, 3].

$$W = \begin{cases} \left(1 - \frac{D}{D_0}\right)^k, & D < D_0, \\ 0, & D > D_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $D_0 = 0.25$, $k = 2$ (эти значения получены подбором), D – величина D_{SH} -критерия для орбиты метеороида потока относительно орбиты потока.

Фактически процедура выделения потока из спорадического фона всегда является однотипной: сначала для каждой орбиты метеороидов потока находится штрафная функция относительно средней орбиты потока, затем производится кластер-анализ и по отобранным орбитам уточняется средняя орбита и т. д., пока центр кластера не зафиксируется. Очевидно, что D_{SH} -критерий является одной из возможных штрафных функций. Найдем некоторую другую штрафную функцию, которая позволила бы уточнять классификацию, построенную с использованием D_{SH} -критерия.

2. Методика и алгоритм решения

Все многообразие штрафных функций в рассматриваемой задаче можно условно разделить на две группы. В первую можно отнести такие функции, которые аналогичны расстоянию между точками в шестимерном пространстве кеплеровых элементов орбит $\{e, q, i, \omega, \Omega, t\}$. Здесь i – наклонение орбиты к плоскости эклиптики, t – время, когда был зарегистрирован радиометеор, которое непосредственно связано с истинной аномалией. Во вторую группу отнесем функции, основанные на пространственной ориентации орбит в привычном для нас трехмерном пространстве, т.е. в декартовой гелиоцентрической системе координат. D_{SH} -критерий и Dg -критерий являются лучшими представителями первой группы штрафных функций. Для выявления тонкой структуры потоков, используем штрафную функцию из второй группы. До настоящего времени такой тип штрафных функций в метеорной астрономии не использовался.

Одним из важных достоинств таких штрафных функций является их наглядность. Действительно, описать математически, понять, а следовательно, и классифицировать объекты в трехмерном пространстве проще, чем в шестимерном. Чтобы при переходе от функции шести переменных к функции трех, а, как далее будет показано, и двух переменных, не потерять в качестве классификации, необходимо исследовать несколько характерных точек орбиты потока. Распределив их равномерно по средней орбите, можно фиксировать все особенности пространственного расположения орбиты данного метеора. Геометрической интерпретацией предлагаемой штрафной функции (рис. 1) являются координаты точки пересечения орбиты метеора и плоскости, нормальной к средней орбите потока в точке с заданной истинной аномалией. Координаты отсчитываются от точки пересечения плоскости и средней орбиты. Поскольку поток сечется плоскостью, а она, как известно, является двумерным пространством, то, перейдя в систему координат сечения, можно обрабатывать двумерные данные по каждому сечению. В частности, выделять сгущения, струи в потоке и т. д., используя хорошо разработанные методы кластер-анализа в декартовом пространстве, например метод k -средних.



Рис. 1. Схема сечения средней орбиты потока плоскостью

Алгоритм поиска координат точек пересечения орбит метеороидов с плоскостью сечения будет таким:

- 1) найти коэффициенты уравнения плоскости сечения;
- 2) найти совместное решение для уравнений орбиты данного метеороида и плоскости сечения, т.е. координаты точек пересечения в гелиоцентрической декартовой системе координат;

3) перейти из гелиоцентрической декартовой системы координат в систему координат сечения.

Первый этап выполняется один раз для всего потока, остальные процедуры производятся для каждой орбиты отдельно.

Изложим математическую часть способа получения сечения.

Точку на средней орбите, в которой будем производить сечение потока (назовем ее центром сечения), зададим с помощью истинной аномалии. Рассмотрим, прежде всего, как можно получить декартовы гелиоцентрические координаты точки (x, y, z) , заданной с помощью истинной аномалии v на орбите с элементами $\{e, q, i, \omega, \Omega, t\}$.

Процедура такого перехода описана в [3], приведем ее с некоторыми упрощениями, вызванными спецификой нашей задачи.

$$\begin{aligned} x &= P_x r \cos v + Q_x r \sin v; \\ y &= P_y r \cos v + Q_y r \sin v; \\ z &= P_z r \cos v + Q_z r \sin v, \end{aligned} \tag{3}$$

где ось x направлена в точку весеннего равноденствия, ось y повернута на 90° относительно оси x в плоскости эклиптики, а ось z направлена на северный полюс.

Векторы \vec{P} и \vec{Q} определяются через элементы орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i; \\ P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i; \\ P_z &= \sin \omega \sin i; \\ Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i; \\ Q_y &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i; \\ Q_z &= \cos \omega \cos i; \\ R_x &= \sin \Omega \sin i; \\ R_y &= -\cos \Omega \sin i; \\ R_z &= \cos i. \end{aligned} \tag{4}$$

Вектор \vec{R} в данной процедуре не участвует, так как эллипс является плоской фигурой, однако он потребуется нам в дальнейшем. Расстояние r от фокуса эллипса до точки с заданной истинной аномалией v находится по формуле:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \tag{5}$$

Найдем направляющие косинусы нормали к плоскости сечения. Так как плоскость сечения по определению перпендикулярна касательной к средней орбите в центре сечения, то вектор касательной будет одновременно и вектором нормали плоскости. Аналитический способ получения касательной к эллипсу дает решение, содержащее функцию арктангенс, что вносит неоднозначность, от которой можно избавиться, используя приближенный метод решения задачи. Рис. 2 иллюстрирует этот метод. Здесь изображена средняя орбита потока, точка S обозначает Солнце, q – перигелий орбиты. Остальные обозначения объясняются ниже.

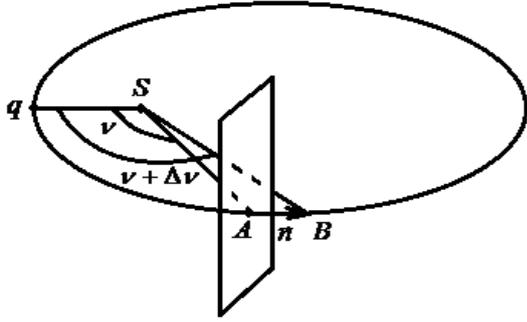


Рис. 2. Схема нахождения касательной к эллипсу

Пусть задана истинная аномалия центра сечения v . Вычтем декартовы гелиоцентрические координаты центра сечения $A(x_a, y_a, z_a)$ из таких же координат точки $B(x_b, y_b, z_b)$ на эллипсе с истинной аномалией $(v + \Delta v)$. Направляющие косинусы вектора нормали n найдем так:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(x_b - x_a)}{|n|}; \\ \cos \beta &= \frac{(y_b - y_a)}{|n|}; \\ \cos \gamma &= \frac{(z_b - z_a)}{|n|}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$|n| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}. \quad (7)$$

Уже при $\Delta v = 0.001^\circ$ точность оказывается удовлетворительной.

Свободный член d канонического уравнения плоскости найдем, подставив в это уравнение координаты центра сечения:

$$d = x_a \cos \alpha + y_a \cos \beta + z_a \cos \gamma. \quad (8)$$

Для нахождения точки пересечения произвольной орбиты и плоскости сечения найдем векторы \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} для этой орбиты, воспользовавшись соотношениями (4), и решив следующую систему уравнений относительно истинной аномалии:

$$d = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma; \quad (9)$$

$$x = P_x r \cos v + Q_x r \sin v; \quad (10)$$

$$y = P_y r \cos v + Q_y r \sin v; \quad (11)$$

$$z = P_z r \cos v + Q_z r \sin v, \quad (12)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (13)$$

Воспользовавшись этими уравнениями, изменяя v в интервале $[0, 2\pi]$ с некоторым малым шагом Δv , можно построить проекции каждой из орбит метеороидов потока в трехмерном евклидовом пространстве. Преобразуем уравнение (13) к более удобному виду:

$$r = \frac{q(1 + e)}{1 + e \cos v}. \quad (14)$$

Как это принято, будем записывать скалярное произведение векторов i и j как (i, j) . Тогда после ряда подстановок получим:

$$\frac{q(1 + e) \cdot \cos v \cdot (P, n) + \sin v \cdot (Q, n)}{1 + e \cos v} = d. \quad (15)$$

Далее:

$$\cos v (q(1 + e) \cdot (P, n) - d \cdot e) = d - q(1 + e)(Q, n) \sin v. \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$M = q(1 + e) \cdot (P, n) - d \cdot e; \quad (17)$$

$$N = q(1 + e)(Q, n). \quad (18)$$

Подставив M и N в формулу (16), получим:

$$M \cos v = d - N \sin v; \quad (19)$$

$$M \cos v + N \sin v = d. \quad (20)$$

Применяя формулы Эйлера, получим:

$$\frac{(N + jM)e^{jv} - (N - jM)e^{-jv}}{2j} = d; \quad (21)$$

$$\frac{\sqrt{N^2 + M^2}}{2j} (\exp j[v + \arctg(M/N)] - \exp j[-v - \arctg(M/N)]) = d; \quad (22)$$

$$\sqrt{N^2 + M^2} \sin[v + \arctg(M/N)] = d; \quad (23)$$

$$v = \arcsin \left(\frac{d}{\sqrt{N^2 + M^2}} \right) - \arctg(M/N). \quad (24)$$

Поскольку в диапазоне изменения истинной аномалии $(0, 2\pi)$ функции арксинус и арктангенс являются неоднозначными, (24) дает сразу четыре значения v . Критерием выбора одного из них определяется специфика задач, решаемых с помощью штрафной функции. Если выбирать то значение истинной аномалии, при котором расстояние r до Солнца будет наиболее близким к расстоянию от Солнца до центра сечения, то штрафная функция будет мало чувствительна к орбитам метеороидов с аргументом перигелия, отличающимся от среднего на угол около 180° . Наиболее эффективным критерием выбора решения является близость значений истинной аномалии центра сечения и найденного корня.

При построении решающей процедуры возникают сложности при измерении углового расстояния. Формально углы 359° и 1° отличны на 358° , а фактически на 2° . Чтобы решить эту проблему, можно использовать следующую решающую функцию для двух углов ϕ и η :

$$f = \sqrt{(\cos\phi - \cos\eta)^2 + (\sin\phi - \sin\eta)^2}. \tag{25}$$

Достоинством этой функции является полная ее однозначность. Получив с помощью такой решающей функции значение истинной аномалии и подставив его в уравнение (13), затем в уравнения системы (10), (11) и (12), найдем гелиоцентрические декартовы координаты точки пересечения данной орбиты с плоскостью сечения.

Теперь можно приступать к выполнению третьего пункта алгоритма, описанного выше, а именно: перейти от гелиоцентрических декартовых координат точек пересечения к декартовым координатам в плоскости сечения.

Выберем систему координат сечения таким образом, чтобы одна ее ось лежала в плоскости орбиты, была нормальна касательной к средней орбите и направлена от Солнца. Другая ось была бы нормальна к плоскости орбиты, а третья дополняла систему координат. В качестве начала координат выберем центр сечения.

На рис. 3 (x,y,z) – гелиоцентрическая система координат, (i,j,k) – система координат, связанная с плоскостью сечения.

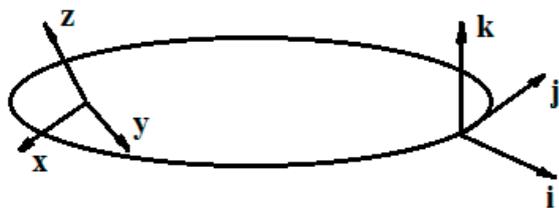


Рис. 3. Схема перехода от гелиоцентрической системы координат к системе координат в заданной точке орбиты

Для того, чтобы перейти от декартовой гелиоцентрической системы координат к координатной системе сечения, необходимо найти направляющие косинусы векторов этой системы в гелиоцентрической системе координат.

Направляющими косинусами вектора k будут составляющие вектора R из (4). Направляющие косинусы вектора j совпадают с направляющими косинусами плоскости сечения, как было показано выше. Направляющие косинусы вектора i найдем из условия его перпендикулярности двум предыдущим векторам j и k.

Такое условие выполняется для векторного произведения j и k, откуда находим:

$$\begin{aligned} i_x &= j_y k_z - j_z k_y; \\ i_y &= j_z k_x - j_x k_z; \\ i_z &= j_x k_y - j_y k_x. \end{aligned} \tag{26}$$

Поскольку проекции векторов j и k суть направляющие косинусы, то, вследствие свойств векторного произведения, проекции вектора i также будут направляющими косинусами. Имея разложения векторов i, j и k в гелиоцентрической системе координат, составив из них уравнения перехода в систему координат сечения:

$$\begin{aligned} k &= k_x(x - x_a) + k_y(y - y_a) + k_z(z - z_a); \\ i &= i_x(x - x_a) + i_y(y - y_a) + i_z(z - z_a); \\ j &= j_x(x - x_a) + j_y(y - y_a) + j_z(z - z_a). \end{aligned} \tag{27}$$

где индексом “a” обозначены гелиоцентрические координаты центра сечения.

Наконец, чтобы убедиться в том, что вектор i не направлен внутрь орбиты, добавим положительное приращение к большой полуоси средней орбиты и найдем для такой орбиты точку сечения. Если координата по вектору i окажется отрицательной, то необходимо поменять знаки у всех компонент этого вектора. На этом переход от шестимерной штрафной функции к двумерной можно считать выполненным. Теперь полученные координаты пересечений орбит потока с плоскостью сечения можно обработать каким-либо из методов кластерного анализа и на основе его результатов выявить тонкую структуру потока.

3. Пример исследования структуры метеорных потоков предложенным методом

Применение рассмотренной выше методики для анализа метеорных потоков банка ХНУРЭ (содержит 5160 потоков) [7] привел к выявлению ряда новых классов потоков [10], отличающихся сечениями орбит в характерных точках средней орбиты потока. Для всех этих потоков были получены сечения для истинных аномалий средней орбиты 0, 90, 135, 180 и 270 градусов.

Кроме того, построены сечения для истинной аномалии орбиты потока в точке, соответствующей восходящему или нисходящему узлу орбиты в зависимости от того, в каком из них орбита потока пересекает орбиту Земли. Для каждого из потоков также были построены трехмерные портреты [10]. Приведем анализ потока, который относится к классу «потоков-двоек», названного так по характерному виду точечных диаграмм сечений потоков такого типа.

На рис. 4 приведены трехмерные проекции потока в гелиоцентрической системе декартовых координат.

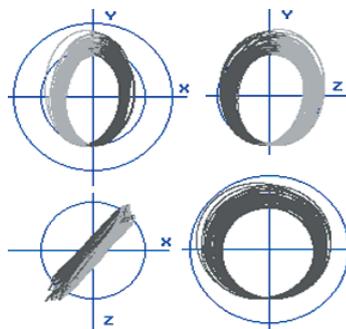


Рис. 4. Проекция потока №2054 банка ХНУРЭ в гелиоцентрической системе координат

Оси X, Y и Z соответствуют таким же осям на рис. 3. В правой нижней части рис. 4 представлена проекция орбит потока на плоскость, в которой лежит средняя орбита потока. Поскольку плоскость XY есть плоскость эклиптики, в левой верхней части рис. 4 показаны проекции орбит метеороидов потока на плоскость эклиптики.

На каждой из трех проекций орбит метеороидов потока черным цветом изображены те части орбит, которые расположены над плоскостью эклиптики, серым цветом – те, что лежат под плоскостью эклиптики. Далее, на проекциях орбит на плоскость эклиптики и плоскость средней орбиты нанесены окружности, радиусы которых соответствуют орбитам Земли и Марса. На остальных двух проекциях для конкретизации масштаба нанесена окружность радиусом 1 а.е.

На рис. 5 а, б приведены сечения потока №2054 банка ХНУРЭ [7] в перигелии и нисходящем узле средней орбиты потока соответственно.

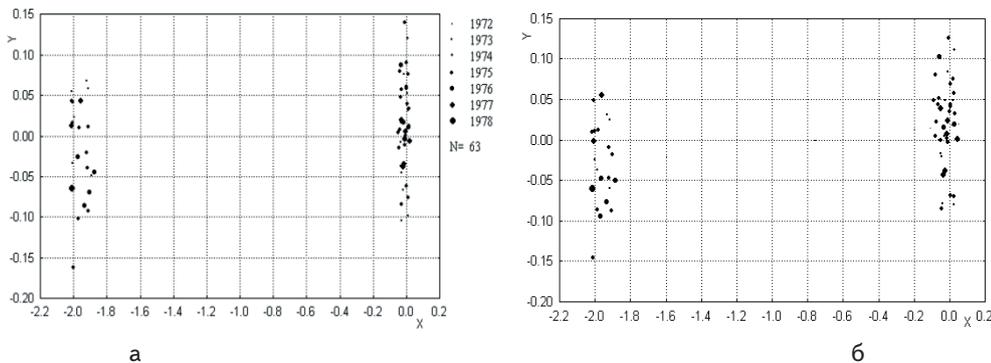


Рис. 5. Сечения потока №2054 банка ХНУРЭ: а - перигелии, б - афелии

При этом обозначение декартовых координат отличается от того, что указано на рис. 3: ось *i* обозначена X, ось *k* обозначена Y. Все размеры приведены в астрономических единицах. Кроме того, на точечных диаграммах сечений следы орбит потоков отображены точками разных размеров в зависимости от того, в каком году был зарегистрирован тот либо другой метеор.

Средняя орбита потока пересекает секущую плоскость в точке с координатами (0, 0). Из самого вида приведенных графиков понятно, почему потоки такого вида названы потоками-двойками: следы орбит метеороидов потока четко разделились на две группы – кластера, причем расстояние между этими группами по координате X близко к 2 а.е.

4. Выводы

Приведенная в данной работе методика и алгоритм

расчета точек пересечений орбит потока с плоскостью перпендикулярной к средней орбите потока фактически является новой штрафной функцией, позволяющей совместно с существующими D-критериями проводить более тонкий и наглядный анализ структуры потока. Применение данной методики позволит решать спорные вопросы, когда разные D

-критерии дают существенно различные значения расстояния для одной и той же пары орбит потока. Данная методика позволяет, во-первых, уточнить классификацию (убрать "лишние" метеороиды из потока) и элементы средней орбиты потока и, во-вторых, выявить тонкую структуру потока, а в некоторых случаях разбить исходный поток на 2, 3 иногда 4 потока [10].

Литература

1. Southworth, R.D. Statistics of Neteor Streams [Text] / R.D. Southworth, G.S. Hawkins // Smithson. Contribs. Astrophys. – 1963. – №7. – pp. 261-285.
2. Волощук, Ю. И. Метеорный комплекс вблизи орбиты Земли: спорадический фон, потоки, ассоциации. I. Методика выделения потоков и ассоциаций из выборки орбит индивидуальных метеоров большого объема [Текст] / Ю. И. Волощук, Б. Л. Кашеев, В. А. Подоляка // Астрон. вестн. – 1995. – Т. 29, №5. – С. 439-449.
3. Secanina, Z. Model of Meteor Streams. IV. A Study of Radio Streams from the Synoptic Year [Text] / Z. Secanina // Icarus. – 1976. – V. 27. – pp. 265-321.
4. Волощук, Ю. И. Методика расчета средних орбит метеорных потоков [Текст] / Ю. И. Волощук, Б. Л. Кашеев // Астрон. вестн. – 1999. – Т. 33, №4. – С. 345-359.
5. Волощук, Ю. И. Метеорный комплекс вблизи орбиты Земли: спорадический фон, потоки, ассоциации. 2. Сравнительный анализ некоторых статистических характеристик потоковых и спорадических метеорных тел [Текст] / Ю. И. Волощук, Б. Л. Кашеев // Астрон. вестн. – 1996. – Т. 30, №6. – С. 541-560.
6. Волощук, Ю. И. Метеорный комплекс вблизи орбиты Земли: спорадический фон, потоки, ассоциации. 3. Источники потоковых и спорадических метеорных тел [Текст] / Ю. И. Волощук, А. В. Воргуль, Б. Л. Кашеев // Астрон. вестн. – 1997. – Т. 31, №4. – С. 345-369.
7. Волощук, Ю. И. Метеорные потоки и ассоциации, выявленные по результатам многолетних радиолокационных наблюдений метеоров в Харькове [Текст] / Ю. И. Волощук, Д. Ю. Горелов // Харьков: Изд-во «НТМТ», 2011. – 383с.
8. Айвазян, С. А. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности [Текст] / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин // М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
9. Загоруйко, Н. Г. Методы распознавания и их применение [Текст] / Н. Г. Загоруйко // М.: Сов. радио, 1972. – 206 с.
10. Батьківські тіла метеорних потоків і оцінка їх зустрічі із Землюю [Текст]: звіт про НДР №117 (закл.) / ХНУРЕ; керівн. Ю. І. Волощук; викон.: А. В. Воргуль, С. В. Коломієць, С. І. Борбульов, Є. П. Павленко. – Харків, 2002. – 118 с. – Інв. № 0100U001338.