

Синтез інтегральної оцінки тренду за сукупністю показників даних часових рядів

О. М. Трунов, В. П. Беглиця

Розглянуто необхідність кількісної оцінки суспільних процесів, тенденцій та дій соціальних інституцій, що здійснюють керування. Визначено, що інформаційна відкритість та наявність інструментів обробки і інформування формує умови ефективного адміністрування. Проведено аналіз трендів – часових рядів динаміки індикаторів. Для аналізу і узагальнення обмежено перелік пріоритетних показників чотирма та обрано данні звітів Світового Банку, Obozrevatel.ua, Transparency International. Введено уніфіковану норму, яка забезпечить спів-вимірність показників, що формують висновок про стан, тенденції та процеси. Введено одну із можливих норм, що застосовуються для евклідових просторів. Обґрунтовано систему базисної оцінки інтегрального показника за даними про ефективність урядування, якість регулювання, політичну стабільність та відсутність насильства та індекс CPI. Отримані вирази оцінки прогнозних значень інтегрального показника. Запропоновано у якості оцінки для аналізу ефективності дій публічного адміністрування використовувати нижню межу. Промодельовані процеси оцінювання і отримано п'ятирічний часовий ряд для інтегрального показника. Представлено зв'язок похибки інтегрального показника, розміру вікна ковзання, стрибків першої та другої похідних узагальненого часового ряду та допустимої похибки, як обмеження нерівність. Запропоновано вводити систему представлення і відображення часових рядів у безрозмірних, обмежених просторах поворотом на кут навколо спільної вісі. Введені означення, доведено теорему про збереження локальних значень відносних розмірів та похибок. Показано вплив квадратичної форми на локальну відносну похибку інтегрального показника. Проведено прогнозування розвитку та дана оцінка дій публічного адміністрування за оцінкою інтегрального показника

Ключові слова: інтегральний показник, ефективність квадратичної норми, норма розвинення, обмеження нерівність норми, геометрична нерівність

1. Вступ

Загальновідомо, що наявність інструментів кількісної оцінки тенденцій, процесів і дій соціальних інституцій, які здійснюють публічне адміністрування, є запорукою інформаційної відкритості та нових можливостей аналізу і успішного керування [1].

Представлення кількісних оцінок, що демонструють реалізацію економічної політики [2], дозволяє контролювати перебіг економічних процесів за сукупністю матеріалів [3] статистичної звітності або за сукупністю кількісних показників, які визначено стандартом чи встановленим переліком [4]. Як правило,

обсяги даних про динаміку економічних показників, які накопичено і системно збираються для дослідження суспільних процесів [5] ефективності керування, ознак корумпованості є надто великі [6]. Особливо їх сприйняття ускладнено для пересічних громадян [7]. У зв'язку з цим задача пошуку способів компактного представлення [8] вимагає своєї постановки та розв'язку. Не менш важливими є аналогічні проблеми для інших предметних галузей, таких як транспортування нафти, газу, коливання курсу валют і т. і.

Крім означеного, незважаючи на те, що на сьогоднішній день у своїй більшості в дослідженнях динаміки соціально-економічних процесів [9] регламентуючі документи визначають системний набір кількісних і якісних показників [10], але все одно до їх складу додаються різноманітні не системні дані

У зв'язку з наголошеним, для утворення достовірного середовища кількісних показників [12] у ході дослідження і побудови методу компактного інтегрального представлення оберемо дані [13], що отримані та оприлюднені у офіційних джерелах зовнішніми незалежними експертами [14]. Для аналізу трендів і прогнозу тенденцій та ризиків оберемо довготривалі [5], а іноді навіть двадцятирічні, терміни, на яких простежується динаміка індикаторів ефективності державного управління, оскільки такі кроки приводять до збільшення достовірності. За цих обставин, як у більшості випадків, залучимо без змін назви показників та числові данні звітів Світового Банку [14]. Крім того, для оцінки впливу долі "тіньової" економіки добираються дані про її динаміку із таких джерел як *Obozrevatel.ua – 2017* [7] та які подаються у співставленні із даними про індекс сприйняття корупції (CPI) *Transparency International*, за 2012–2017. Однак збільшення кількості джерел інформації і показників приводить до різноманітності та порушує умову співставлення, що суттєво ускладнює усвідомлення та прозорість сприйняття навіть для підготовлених експертів і систем експертних оцінок. Для уникнення такого роду проблем відповідно до ISO 37001:2016 "Системи управління заходами боротьби з корупцією, перелік пріоритетних показників", що представлено часовими рядами [12], кількісно обмежено, але це не розв'язує проблему прозорості і простоти та не утворює умови для прогнозних оцінок і висновків.

В умовах світової глобалізації, проблема кількісного і якісного аналізу великої кількості числових потоків при роботі з метаданими актуалізує задачі побудови методів оцінки. Одна з них полягає в тому, щоб сформувавши інтегральний показник за сукупністю показників – часових рядів. Головною перешкодою, що ускладнює розв'язок задачі формування інтегрального показника, є відсутність моделі встановленого закону кількісного зв'язку між показниками. Пряме застосування методів багато факторної апроксимації до розв'язку цієї задачі не можливе, оскільки одночасно невідомими є кількісні данні про величину інтегрального показника та вид функції інтегрального показника. Крім того, не розв'язаною є проблема прозорого, одночасного представлення обраної сукупності показників для аналізу експертами.

На сьогоднішній день парадигма "координації", теоретичні основи якої закладено в [15], є однією із найбільш ефективних для побудови моделей і управління організаційно-економічними системами. Слід зазначити, що її застосу-

вання стає успішним тільки разом із комплексним добром кількісних показників. Однак методи системного аналізу і математичної статистики, які представляються як ефективний інструмент побудови моделей аналізу і синтезу, не придатні до інтегральної оцінки за набором часових рядів показників у тому числі і публічного адміністрування. У зв'язку з означеним, практична задача формування методу побудови інтегрального показника як інструменту оцінки ефективності керування та корумпованості суспільства є привабливою для аналізу. До переліку показників за стандартом [12] відносяться: ефективність урядування, якість регулювання, політична стабільність та відсутність насильства і індекс СРІ [13, 14]. Здатність розв'язку задачі про інтегральний показник до формування правдоподібних результатів оцінюється в умовах існування системи кількісних показників за даними статистичної звітності [13], що визнано достовірними. Існуючі приклади успішної побудови нелінійних моделей інтегральної оцінки за системою чотирьох або п'яти типів показників. Так, наприклад, відхилення функціоналів від квадратичних форм, які мінімізується [16] або які подаються штучними та рекурентними мережами [17], або які оцінюють інтегральний показник адекватності [21], утворено виходячи із відомого фізичного зв'язку. Незважаючи на те, що вони не розповсюджуються безпосередньо на розв'язок означеної проблеми узагальнення чотирьох часових рядів, вони є прикладом розв'язку задачі інтегральної оцінки. Пошук та дослідження впливу факторів, як причин зниження показників розвитку так і переліку дій або бездіяльності інституцій, виконавчих і законодавчих органів не вдається проводити методами координаційного управління. Однією з причин тому є відсутність уніфікованого методу, який дозволяє об'єднувати сукупність часових рядів у єдиний показник – часовий ряд.

У зв'язку з наведеним актуальними є дослідження здатності і застосовності методів прикладної математики та впровадження нових кібернетичних парадигм до побудови інтегральної оцінки. Реалізація вимог прозорості, однозначності та простоти, як необхідних вимог, дозволять об'єктивно інформувати суспільство за допомогою ЗМІ.

Таким чином, на відміну від задачі апроксимації часових рядів, для якої числові дані відомі, а встановлення виду функції та числових коефіцієнтів є завданням, виникає принципово нова задача. Її сутність та відмінність полягає у необхідності побудови функції, вигляд якої невідомий за даними часових рядів, методика визначення та перелік яких було встановлено стандартами або іншими нормативними документами.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Покрокові рухи у напрямі ринкових перетворень, забезпечення структурної перебудови економік впроваджується при застосуванні інструментів моделювання [8] та оцінки рівня корупції [4, 5]. Відсутність інструментів та практики оцінки динаміки корупції, та сама вона як явище, притаманне трансформаційним економікам [4], є одними з факторів, що перешкоджає поглибленню міжнародної економічної та політичної інтеграції і безумовно стримує розвиток [5].

На сьогодні існують індекси, показники контролю за корупцією, пропонувані Світовим Банком. Їх часові ряди демонструє певну дієвість моделей антикорупційних інституцій [5]. Однак не зважаючи на це, переосмислення державної стратегії в цій сфері, після утворення нових антикорупційних інституцій, свідчить, що спостерігається значна кількість суперечностей [9]. Ці суперечності торкаються як нормативно-правового забезпечення, так і організаційного механізму, а особливо методів і критеріїв оцінювання рівня корупції [10, 11].

Виокремимо для аналізу тільки останні – методи і критерії оцінювання рівня корупції [10, 11]. Спираючись на методологію оцінювання Світового Банку та за стандартом [12], обмежимо розгляд трьома часовими рядами, до яких долучимо індекс сприйняття корупції (CPI) Transparency International [13, 14]. Таким чином, до розгляду залучаються чотири незалежні часові ряди: ефективність урядування, якість регулювання, політична стабільність та відсутність насильства, індекс CPI.

Головною нерозв'язаною суперечністю та проблемою побудови методу інтегральної оцінки є відсутність відомого закону зв'язку між зазначеними чотирма часовими рядами, а також відсутність числових даних про часовий ряд для інтегрального показника.

Крім того, слід зазначити, що у ці періоди також важливим є зміна впливу векторів інформаційної політики. У зв'язку з цим, необхідність і спрямованість на збільшення доступу до інформації, яка стосується державних послуг та показників корумпованості, породжує необхідність визначення динаміки кількісних показників [6] засобами відео-відображення. Її суттєвою складовою, яка також вимагає кількісної оцінки і прозорого відображення, є перебіг бюджетного процесу і державних закупівель для державних та муніципальних установ, включно з достовірним декларуванням доходів чиновників і негативним відношенням до проявів корупції у суспільстві. Досягнення позитивних зрушень і результатів у реалізації означених процесів не можливо забезпечити старими методами покровових проб та помилок, а також старими інструментами [15, 16]. Особливо це стосується умов обмеженості золотовалютних і енергетичних ресурсів, обмежень у часі та військової агресії. За таких умов розв'язок взаємно пов'язаних організаційно-технічних і економічних задач вимагає моделювання і відображення результатів сучасними засобами [15–21].

Другою нерозв'язаною суперечністю є нездатність сучасних відео-засобів щодо одночасного простого і прозорого для розуміння відображення сукупності показників – часових рядів. Відповідно до них, узагальнені нелінійні об'єкти, що об'єднано у підсистеми та системи, та аналіз їх функціонування зведено до аналізу кількісного узагальненого показника [16]. Тому пряме застосування ідей, запропонованих ще у 1970-х роках та у подальшому розвинутих в роботах [22, 23], вимагає свого удосконалення. Останні роботи з аналізу часових рядів, наприклад [24, 25], демонструють нові результати у порівнянні з методиками побудови моделей типу авторегресії з ковзним середнім з ендогенними змінними. Така методика побудови математичних моделей та алгоритму оцінювання невідомих параметрів на основі аналізу часових рядів має переваги за рахунок того, що використовує байесівський підхід [24], але розповсюдження її на нелі-

нійні моделі ускладнено. Спроби узагальнення процесів побудови моделей та прогнозу для нелінійних моделей часових рядів і чисельні приклади наведено у [26]. Як показано у [26], ефективною для опису практично будь-якої відомої на сьогоднішній день комбінованої, гібридної або декомпозиційної моделі є запропонована узагальнена схема прогнозування нестационарних взаємопов'язаних часових вибірок рядів. Успіх її реалізації зумовлено за рахунок впровадження ідентифікації на основі методів «Гусениця»-SSA, швидкого ортогонального пошуку, методу групового урахування аргументів. Однак, незважаючи на її переваги над моделями авторегресії з ковзним середнім, такі методи не дозволяють об'єднувати моделі часових рядів у єдиний узагальнений показник та будувати модель нелінійного об'єкту [27].

На сьогодні існує досвід, за яким загальноприйняте представлення нелінійних об'єктів за парадигмою опису замінено надсучасною парадигмою припису [16]. Не менш ефективно є представлення їх рекурентною мережею, яка завдяки застосуванню метода рекурентної апроксимації розширила межі своїх можливостей [17]. Впровадження компаративної теорії скалярного багатфакторного оцінювання у тому числі і ідентифікації [19], разом із введеним трирівневим компаратором [20], утворює основи для оцінювання похибки моделі [20] та управління процесом її побудови на основі багатфакторного критерію адекватності [21]. Така постановка задачі синтезу керуючого впливу та застосування комплексного сучасного підходу до управління техніко-економічними системами успішно реалізовані для розв'язку окремих технічних задач [28–33]. Разом з тим, для постановки і забезпечення їх розв'язку використовувались спеціальні критерії [28], інструменти [29], операції [30], що подані єдиним аналітичним виразом: ефективність [31], адекватність [21, 33], вектор-індикатор [29-31], аналітичне навчання [32] та калібрування мережі [33].

Таким чином, досвід впровадження робіт [29-32] продемонстрував, що побудова методу, який забезпечить утворення для визначеного переліку показників єдиного виразу інтегрального критерію кількісної оцінки і ілюстрації перебігу соціально-економічних процесів, є визначальною [29-31]. У зв'язку з цим для об'єднання переваг парадигми керування припису [16], представлення єдиним виразом інтегрального критерію [17] є закономірним, логічно обґрунтованим завданням. Розвиток означеного напряму математичного обґрунтування кібернетичного підходу до побудови систем оцінки ефективності державного управління з протидії корумпованості суспільства, ефективності керування і інформування забезпечиться тільки завдяки використанню спеціального методу формування інтегрального показника. Його впровадження, разом із застосуванням мережевих технологій аналітичного навчання [17], рекурентного калібрування [33] або графічного представлення і подання через операції матричної алгебри, відкриває нові можливості і стимулює пошук нових форм представлення часових рядів [34].

Узагальнення аналізу наведених джерел дозволяє констатувати, що головною нерозв'язаною суперечністю та проблемою побудови методу інтегральної оцінки є відсутність відомого закону зв'язку між часовими рядами, а також відсутність числових даних про часовий ряд для інтегрального показника.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою дослідження є побудова методу синтезу інтегральної оцінки, що подає її єдиним виразом для визначеного переліку чотирьох показників – часових рядів – та кількісно оцінює і наочно ілюструє перебіг соціально-економічних процесів, у тому числі і оцінки протидії корумпованості суспільства.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати задачі:

– дослідити застосовність єдиної метрики до побудови тренду загального індексу ефективності за ідеєю оцінки нижньої межі та встановити властивості відносної похибки для утвореного тренду;

– дослідити застосовність єдиної метрики до синтезу тренду за ідеєю представлення у просторі з поворотними координатними площинами та встановити зв'язок між розмірами вікна ковзання, стрибками першої та другої похідних вихідних часових рядів і узагальненого та допустимою похибкою.

4. Застосування єдиної метрики до побудову тренду загального індексу ефективності публічного адміністрування

4. 1. Застосування єдиної метрики до побудову тренду загального індексу ефективності за ідеєю оцінки нижньої межі

Для конкретизації і однозначності уяви про об'єкт дослідження та уникнення сперечань про кількість показників, які необхідно обрати для аналізу, скористаємось приписом сучасного стандарту [12], даними Світового Банку і Transparency International про часові ряди. Така законодавчо визначена постановка задачі дозволить зняти зайві фактори та дозволить зосередитись на суті дослідження аспектів прикладної математики і кібернетики.

Для реалізації підходу до побудови адекватних моделей [25, 26, 28] техніко-економічних систем проведемо нормалізацію показників. Вибір норми здійснимо виходячи із додатності оцінок в умовних грошових одиницях та додатності оцінок дій уряду. Врахуємо також різномірність змісту показників – часових рядів, що на сьогоднішній день обрано за базу [21]: ефективність урядування, якість регулювання; політичну стабільність; відсутність насильства; індекс *CPI*. У зв'язку з означеним оберемо для кожного i – того часового ряду свою величину норми $|X_i|_{\max}$. Однак, приймаючи за норму максимальне значення на інтервалі області визначення $|X_i|_{\max}$ (табл. 1), її буде необхідно перевизначати при кожній зміні інтервалу вибірки та при переході від одного фактора до іншого фактору. Безумовно, останнє є її недоліком, але саме така норма забезпечує високу чутливість до локальних змін факторів [21]. Припустимо, що оцінки показників, які опубліковано у звітах [13, 14] Світового банку і Transparency International, є достовірні, тоді відповідно до них побудуємо її оцінку, яку представимо у табл. 1.

Обмежимо розгляд прикладом, оприлюднених у авторитетних джерелах даних для однієї країни [13,14], оскільки самі по собі дані не відіграють суттєвої ролі. Такий підхід обґрунтовується тим, що у даній роботі досліджуються можливості побудови методу інтегральної оцінки, а не динаміка рівня корупції.

Таблиця 1

Показники державного управління за даними [13,14] та за інтегральною оцінкою

Індикатор	1996	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Ефективність урядування [14]	28	22	24	21	32	31	40	35	32
X_1	7.	5.5	6	5.25	8	7.75	10	8.75	8
Якість регулювання [14]	34	32	34	30	30	30	29	30	36
X_2	9.4	8.9	9.4	8.33	8.3	8.33	8.06	8.33	10
Політична стабільність та відсутність насильства [14]	43	34	45	44	42	21	6	5	6
X_3	9.56	7.556	10	9.78	9.33	4.67	1.33	1.11	1.33
Індекс <i>CPI</i> [13]	–	–	–	–	26	25	26	27	29
X_4	–	–	–	–	0.897	0.86	0.897	0.93	1
Індекс, <i>GIE</i>	–	–	–	–	0.694	0.349 9	0.119 8	0.087	0.106

Введемо позначення для інтегрального показника *GIE*. Зазначимо, що його роль може також означатися як синонім із назвою «загальний індекс ефективності» за аналогією до назви, що використовує стандарт ISO 37001:2016 та дані Світового Банку і Transparency International. Відповідно до мети дослідження, необхідно будувати метод, який дозволяє знайти функцію, яка встановлює зв'язок між інтегральним показником *GIE* та унормованими, безрозмірними показниками: ефективність урядування, якість регулювання – X_1 ; політична стабільність – X_2 ; відсутність насильства – X_3 ; індекс *CPI* – X_4 . Позначимо шукану функцію наступним чином: $GIE=f(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Скористаємось загальним підходом, що застосовується у задачах прикладної математики, функціонального аналізу, дослідження операцій та природничих науках – методом припущень. Подамо обрану систему припущень у вигляді постулатів. Головними твердженнями постулатів оберемо:

– при нульовому результаті реалізації управлінської діяльності – ефективності урядування – її інтегральний показник (загальний індекс ефективності) *GIE* – нульовий;

– при нульовій якості керування (регулювання) її інтегральний показник (загальний індекс ефективності) *GIE* теж – нульовий;

– за умов, коли одночасно кожен із факторів дорівнює нулю – інтегральний

показник (загальний індекс ефективності) GIE дорівнює нулю.

Подальший пошук будемо здійснювати у межах цих припущень. На підставі цих тверджень розвинення загального індексу ефективності GIE будемо здійснювати у ряд Маклорена, який подамо у лінійному наближенні:

$$GIE = \sum_i^N \frac{\partial GIE}{\partial X_i} \Big|_{x_i=0} \Delta X_i = \sum_i^N \frac{\partial GIE}{\partial X_i} \Big|_{x_i=0} X_i = C \sum_i^N \delta_i X_i;$$

$$C = \left(\sum_i^N \frac{\partial GIE}{\partial X_i} \Big|_{x_i=0} \right); \delta_i = C^{-1} \frac{\partial GIE}{\partial X_i} \Big|_{x_i=0}. \quad (1)$$

Відповідно до властивостей геометричної нерівності, оцінимо нижню границю загального індексу ефективності:

$$GIE = C \sum_i^N \delta_i X_i \geq C \prod_{i=1}^N (X_i)^{\delta_i}.$$

Останнє дозволяє отримати з точністю до постійного множника оцінку динаміки показників розвитку процесів урядування. Покладаючи у першому наближенні дану групу чотирьох показників аналізу рівнозначними та для метрики $N^n = \sum_{i=1}^n |X_i|^n$, оцінку загального індексу ефективності згідно до геометричної нерівності представимо:

$$GIE = \frac{1}{4} (|X_1|^4 + |X_2|^4 + |X_3|^4 + |X_4|^4) \geq X_1 X_2 X_3 X_4.$$

Для випадку, коли вплив різних факторів не рівний, а визначається коефіцієнтами ваги, то найменше значення ефективності може бути оцінено за допомогою видозміненої форми тієї ж геометричної нерівності:

$$\left(|X_1|^4 + |X_2|^4 + |X_3|^4 + |X_4|^4 \right) \geq \left(\frac{1}{k_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{k_2} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{k_3} \right)^{k_3} \left(\frac{1}{k_4} \right)^{k_4} X_1^{4k_1} X_2^{4k_2} X_3^{4k_3} X_4^{4k_4}.$$

Таким чином, у наслідок властивостей степеневі функції, отриманий вираз дає верхню та нижню границю показника ефективності, яку з урахуванням позначень індексу CPI запишемо:

$$X_1 X_2 X_3 X_4 \leq GIE \leq 4 X_1 X_2 X_3 X_4. \quad (2)$$

Таким чином, на підставі введеної норми, визначених коефіцієнтів ваг та геометричної нерівності викладеного обґрунтовано оцінку верхньої та нижньої границі загального індексу GIE (2). Такий широкий інтервал надає перевагу песимістичній оцінці – нижній межі, який в подальшому слід використовувати як оцінку загального індексу ефективності GIE .

Для оцінки впливу похибок оцінювання вихідних індикаторів позначимо їх відносні величини як ε_i . За цих умов відносна похибка інтегрального показника визначиться як відносна похибка непрямого вимірювання:

$$\Delta GIE = GIE \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta X_i}{X_i} = GIE \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i. \quad (3)$$

В силу обраних норм найбільше максимально можливе значення похибки інтегрального показника визначиться сумою величин відносних похибок. Для визначення впливу величини інтервалу осереднення та динамічних властивостей інтегрального показника на локальне значення похибки, скориставшись квадратичною формою розвинення у ряди Тейлора у околі моменту часу t_0 , та запишемо:

$$\begin{aligned} \Delta GIE = & \left(GIE_0 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial GIE}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \sum_{j=1, i=1}^{4,4} \frac{\partial^2 GIE}{2 \partial X_j \partial X_i} \frac{\partial X_j \partial X_i}{dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right) \times \\ & \times \sum_{i=1}^4 \left(\varepsilon_{i0} + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2 \varepsilon_i}{2 dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, інтервал осереднення разом з динамічними властивостями інтегрального показника та оцінки похибки факторів впливу сформував вимоги до максимального часу оцінювання кожного з величин показників. Розвинення (4) також встановлює загальний зв'язок між розмірами вікна ковзання, стрибками першої та другої похідної узагальненого часового ряду, допустимою похибкою інтегрального показника. Для встановлення виразів практичних розрахунків припустимо, що час є неперервною величиною, похибка ΔGIE є інтегрованою разом з квадратом, оберемо вікно ковзання шириною у δt та введемо норму:

$$\|\Delta GIE\| = \frac{1}{\delta \tau} \left[\int_{t_0 - \delta \tau / 2}^{t_0 + \delta \tau / 2} \Delta GIE^2 dt \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Застосовуючи норму (5) до рівняння (4) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left| GIE_0 + \frac{dGIE}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2GIE}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right|_{\min} \left\| \sum_{i=1}^4 \left| \varepsilon_{i0} + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2\varepsilon_i}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right\| \leq \|\Delta GIE\| \leq \\ & \leq \left| GIE_0 + \frac{dGIE}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2GIE}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right|_{\max} \left\| \sum_{i=1}^4 \left| \varepsilon_{i0} + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2\varepsilon_i}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Остання нерівність еквівалентна виразу, що визначає верхню та нижню границю, які обмежують значення норми відносної похибки та пов'язують її з властивостями утвореного часового ряду для песимістичної оцінки інтегрального показника і протяжністю вікна ковзання:

$$\begin{aligned} & \frac{GIE_0}{\left| GIE_0 + \frac{dGIE}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2GIE}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right|_{\max}} \sum_{i=1}^4 \left\| \varepsilon_{i0} + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2\varepsilon_i}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right\| \leq \\ & \leq \frac{\|\Delta GIE\|}{\left| GIE_0 + \frac{dGIE}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2GIE}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right|_{\max}} \leq \sum_{i=1}^4 \left\| \varepsilon_{i0} + \frac{d\varepsilon_i}{dt} \Big|_{t_0} \Delta t + \frac{d^2\varepsilon_i}{2dt^2} \Big|_{t_0} \Delta t^2 \right\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, за умов наявних можливостей регулювати розміри вікна ковзання, його величину слід обирати з урахуванням стрибків першої та другої похідної узагальненого часового ряду та допустимої похибки.

4. 2. Застосування єдиної метрики до синтезу тренду за ідеєю представлення у просторі з поворотними координатними площинами

Для реалізації другого підходу до побудови адекватних моделей, що узагальнюють сукупність чотирьох часових рядів, також застосуємо нормалізацію показників. Виходячи із факту додатності оцінок, що здійснюються в умовних грошових одиницях, та додатності оцінок дій публічного адміністрування, обемо одну із можливих евклідових норм: максимальне значення на проміжку.

Для подальшого викладу ідеї припустимо, що маємо спільну вісь часу для всієї системи чотирьох факторів, які визначено на сьогодні законодавче [12]. За цих умов загальний вираз n -ного показника, як часовий ряд для відображення на площину, після множення на множник $\exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right)$ буде повернуто на кут $\frac{\pi n}{2}$:

$$X'_n(t) = \exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) X_n(t),$$

де i – уявна одиниця.

Вибір значень кута з нерівності $\alpha < \frac{\pi}{2n_{\max}}$ дозволяє представити часові ряди у вигляді сукупності відображень у першому октанті. Останнє дозволяє проводити швидкі експрес перегляди під гострими або тупими кутами при пересуванні вікна ковзання одночасно для всієї обраної сукупності показників. Представимо таку сукупність наступним чином:

$$GIE = \prod_{n=0}^3 X'_n(t) = \prod_{n=0}^3 \exp(i\alpha n) X_n(t). \quad (8)$$

Слід означити, що пропонований спосіб є простим та наочним у представленні при 3-D моделюванні. Однак утворений часовий ряд має деформовану величину абсолютної похибки, але величина локальної відносної похибки при відображенні інтегрального ряду або складових часових рядів зберігається. Для забезпечення термінологічної однозначності введемо означення.

Означення 1.

Чверть простір, що утворено як перетин півпросторів і обмежено двома позитивними напрямками вісі часу і вісі показника, яку повернуто проти годинникової стрілки на кут 90 градусів, будемо називати площиною представлення часового ряду.

Означення 2.

Перша при переборі проти годинникової стрілки серед площин представлення із спільною часовою віссю часу будемо називати площиною відліку.

Означення 3.

Двогранний кут між площиною відліку та площиною представлення часового ряду, що відраховано проти годинниковою стрілки, будемо називати кутом повороту

Означення 4.

Площина представлення, яку повернуто на кут повороту 90 градусів, будемо називати площиною відображення часового ряду.

Теорема. Вибір значення кута повороту α величиною, що обрана з діапазону $[\alpha] < \alpha < \frac{\pi}{2n_{\max}}$, забезпечує збереження відносної похибки для усіх компонентів відображень складових числових рядів незалежно від зміни черговості подання та величини показника.

Доведення. Представимо приріст загального множника $\exp(i\alpha n) X_n(t)$ інтегрального показника, що подано виразом (8), у вигляді:

$$\Delta[\exp(i\alpha n) X_n(t)] = \exp(i\alpha n) \frac{dX_n(t)}{dt} \Delta t.$$

За цих умов абсолютна похибка та загальний множник мають спільний

множник $\exp(i\alpha n)$. Швидкість зміни загального множника помножена на приріст часу, як похідна від скаляра, та величина загального множника завжди співпадають за напрямом, оскільки обидві величини є скалярами. У випадку відображення цих двох величин як скалярної суми на площину представлення ці два доданки проєктуються на неї. Останнє еквівалентне множенню на косинус однакового кута повороту та не змінює їх відношення:

$$\frac{\Delta[\exp(i\alpha n)X_n(t)]}{\exp(i\alpha n)X_n(t)} = \frac{\exp(i\alpha n)\frac{dX_n(t)}{dt}\Delta t}{\exp(i\alpha n)X_n(t)} = \frac{\frac{dX_n(t)}{dt}\Delta t}{X_n(t)} = \frac{\Delta X_n(t)}{X_n(t)} = \varepsilon_n(t) \quad (9)$$

оскільки є загальним множителем.

Наслідками теореми є

– по-перше, у діапазоні значень $[\alpha] < \alpha < \frac{\pi}{2n_{\max}}$ відсутні вибірккові значення

кутів повороту площини представлення;

– по-друге, якість відображення визначається кутом порогу чутливості $[\alpha]$ та розподільчою здатністю інструменту візуального аналізу представлених відображень.

Крім того, слід зазначити, що застосування квадратичної норми як однієї з чотирьох норм, яка застосовується у евклідових просторах, підтверджує, що подання загальної оцінки часових рядів у виді (8) не змінює локальну похибку вихідних рядів. Підтвердимо останнє твердження прямим розрахунком, визначаючи компоненти за (9):

$$\varepsilon_{GIE}(t) = \left[\sum_{n=1}^4 \varepsilon_{GIE_n}^2(t) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Якщо величина показника унормована, то його максимальне значення дорівнює одиниці. За цих умов значення максимально можливої абсолютної похибки теж дорівнює одиниці, а значить унормоване з тією ж нормою значення відносної максимально можливої похибки дорівнює одиниці. Тоді оцінка похибки за виразом (10) дає 2. Оцінка ж максимально можливої похибки за виразом (1) буде 4, а значить синтез форми представлення показника за виразом (8) є більш ефективним.

Використання операції повороту на кут дозволяє компактно представити інформацію, але таке векторне подання приводить до збільшення результуючої відносної похибки. Її величина лежить у інтервалі $[2, 4]$.

5. Обговорення результатів моделювання та прогноз розвитку

В наслідок моделювання проведено розрахунки нижньої межі за формулою (2) загального індексу ефективності GIE , результати яких представлено у

нижній строчці табл. 1. Аналіз динаміки загального індексу ефективності демонструє що для даних по Україні у 2015 він сягнув своєї нижньої межі 0.08702, а у 2016 році почав зростати і зріс на величину 0.019 досягнувши значення 0.106667. Останнє складає практично двадцять відсотків від величини показника *GIE* 2015 року. Прогнозне його значення становитиме на кінець 2017 року 0.13784, а на кінець 2018 сягне значення 0.144 ± 0.09 .

Синтез оцінки, що зроблено на підставі пропонованого методу для даних Світового Банку і Transparency International, не є єдино можливою галуззю застосувань. Такі інтегральні оцінки можуть розповсюджуватись на інші часові ряди за умов, коли вони у своїй сукупності описують один об'єкт. Завершуючи цю роботу, слід зазначити, що достовірність методу складно оцінювати, коли достовірність вхідної інформації невідома. Однак у даному випадку важливою і очевидною є опосередкована оцінка. Так, Міжнародний Валютний Фонд, оцінюючи діяльність уряду, прийшов до аналогічного висновку про зростання показників. Рішення фонду "виділити кредитну підтримку Україні" слід оцінювати як опосередковану ознаку, яка за тенденцією узгоджується із ростом інтегрального показника індексу ефективності *GIE* табл. 1,

Безумовно, що оскільки в даний роботі поставлено за мету синтезувати простий і прозорий метод побудови оцінки інтегрального показника - загального індексу ефективності *GIE*, аналіз спирався тільки на відомі чисельні значення. Введення будь яких існуючих перетворень цих даних, по-перше, вносить додаткову складову похибки, яку необхідно оцінювати, а по-друге, зменшує прозорість розрахунків. Перехід до опису цих показників за допомогою теорії нечітких множин є також проблематичним. Незважаючи на приклади ефективного застосування до фінансового аналізу, які наводяться у роботі [35] або інші її надсучасні застосування до опису, прогнозування і оптимізації нелінійних об'єктів дронів-трансформерів [36], такий перехід суттєво ускладнює розрахунки, оскільки вимагає наявності ефективних методів побудови функцій належності. Останнє обумовлено рівнем розвитку сучасних методів вибору законів для апроксимації і забезпечення її адекватності [12].

Очевидно, що пряме застосування апроксимації часових трендів окремих індикаторів і показників, які означені міжнародними стандартами [12], є складною задачею. Обґрунтування виду функцій та пошук параметрів апроксимації, у тому числі методом найменших квадратів [37], або методом групового врахування аргументу [38], на сьогодні є задачею, розв'язаною для обмеженого проміжку. Результати застосування сплайн апроксимації [39], або рекурентної апроксимації [40] разом із використанням ідеї максимізації адекватності [21], або компаративної ідеї ідентифікації добутку за поліномами Колмогорова-Габора [19], теж не спрощують задачу. У зв'язку з викладеними результатами синтезу оцінки єдиним виразом часового ряду інтегрального показника, що забезпечують просте просторове подання групової інформації про складові часові ряди та означення умов відсутності викривлення локальної відносної похибки, слід очікувати наступні напрями розвитку. Перш на все, це розвиток інструментів взаємоперетворення і узгодження мислення дедуктивного і індуктивного з неформальними образами [41, 42]. По друге, введення багаторівневого моніторингу

[43] з одночасним пошуком і впровадженням завадостійкого моделювання [44] відкриє шлях до формування ефективних методів оцінки інтегрального показника у задачах публічного адміністрування. Слід очікувати, що пошук нових можливостей застосувань методів наближень функцій з обмеженнями [45] та успіхи окремих застосувань до розв'язку технічних задач [46] разом із впровадженням чебишевської апроксимації [47] відіграє важливу роль у становленні методів інтегральної оцінки за даними часових рядів.

Таким чином, запропонований метод оцінки загального індексу ефективності державного управління з протидії корумпованості суспільства *GIE*, має переваги у порівнянні з іншими означеними можливими підходами за рахунок простоти і наочності. Однак, слід очікувати, що при суттєвій деталізації аналізу, тобто збільшенні кількості факторів аналізу більше за чотири, даний метод почне втрачати чутливість до впливу окремих факторів, в наслідок співвимірності максимально можливої похибки із величиною приросту самого інтегрального показника *GIE*. За цих умов пошук методів прямого застосування рекурентних мереж разом із використанням алгоритму аналітичного навчання [17], ідеї максимізації адекватності [16], інструментів вектор-індикатору [17], очевидно дозволить будувати алгоритм опису фрагментів минулого часових рядів у виді чорної скриньки. Очікується, що у цих умовах тренди будуть мати меншу похибку та більшу чутливість, але не дозволять прогнозувати їх майбутній перебіг.

7. Висновки

1. Обґрунтовано метод інтегральної оцінки, що подає її єдиним виразом для визначеного переліку чотирьох показників – часових рядів – та може слугувати загальним індексом ефективності керування показником-індексом. Застосовані уніфіковані норми, які приводять всі фактори впливу до спів-вимірних умов. Незважаючи на те, що вихідні фактори впливу є різними за величиною і фізичною природою, утворені з них часові ряди є безрозмірними величинами визначеного обмеженого діапазону. Безрозмірність і обмеженість інтегрального показника забезпечує представлення та прозоре відображення (без викривлення величини відносної похибки) для формування висновку про стан перебігу дій і прогнозу результатів.

2. Песимістична оцінка або оцінка мінімального значення інтегрального показника ефективності публічного адміністрування представляється у вигляді добутку базисної системи чотирьох унормованих показників, що визначені стандартом. Представлення інтегрального показника за ідеєю оцінки нижньої межі у вигляді добутку зменшує похибку у двічі. Динамічні властивості інтегрального показника, інтервал осереднення, оцінки похибки факторів впливу формують вимоги до максимального часу оцінювання кожного з вихідних показників у вигляді обмежень нерівностей. Такі обмеження зв'язують вимоги до точності інтегрального показника та квадратичні норми властивостей вихідних часових рядів. Представлення у просторі з поворотними координатними площинами дозволяє встановити зв'язок між розміри вікна ковзання стрибками першої та другої похідної узагальненого часового ряду та допустимою похибкою. Таке

представлення на площині відображення дозволяє компактно подати інформацію, але векторне подання приводить до збільшення результуючої відносної похибки. Її величина лежить у інтервалі [2, 4], що все ж таки менше за максимально можливу похибку суми чотирьох показників, яка дорівнює 4.

3. Дослідження динаміки інтегрального показника пропонованим методом для даних 2014–2017 років за звітами Світового Банку і Transparency International встановило здатність утвореного методу до практичного відтворення якісної відповідності із їх загальним висновком. Пряме застосування розробленого методу до розрахунку дозволило отримати прогнозне значення інтегрального показника на кінець 2017 року 0.13784, а на кінець 2018 він становитиме 0.144 ± 0.09 .

Література

1. Про Державний суверенітет України: Декларація від 16.07.1990 р. № 55-ХІІ // Верховна Рада УРСР. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/55-12>
2. Основні напрями економічної політики в умовах незалежності: Постанова від 25.10.1991 р. № 1698-ХІІ // Верховна Рада України. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/1698-12>
3. Основи національної економічної політики: Постанова від 24.03.1992 р. № 2226-ХІІ // Верховна Рада України. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/2226-12>
4. Transparency International Ukraine. URL: <https://ti-ukraine.org/>
5. Beglytsia V. P., Tsyplitska O. O. Corruption and economic development: the role of the state // Scientific Bulletin of Polissia. 2018. Vol. 1, Issue 1 (13). P. 135–141. doi: [https://doi.org/10.25140/2410-9576-2018-1-1\(13\)-135-141](https://doi.org/10.25140/2410-9576-2018-1-1(13)-135-141)
6. Державна служба в Україні у 2005–2012 роках (основні показники якісного та кількісного складу) // Info-Light. 2013. URL: <http://infolight.org.ua/content/derzhavna-sluzhba-v-ukrayini-u-2005-2012-rokah-osnovni-pokazniki-yakisnogo-ta-kilkisnogo-skladu>
7. Україна третя в світі по долі "тіньової" економіки // Obozrevatel. 2017. URL: <https://www.obozrevatel.com/ukr/finance/ukraina-potrapila-v-rejting-krain-iz-tinovoyu-ekonomikoyu.htm?obozrevatellang=uk>
8. Зосимова Ж. С. Зарубіжний досвід менеджменту зовнішньоекономічної діяльності і можливість застосування в Україні // Вісник Одеського національного університету. Економіка. 2013. Т. 18, Вип. 3 (1). С. 158–161. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vonu_econ_2013_18_3\(1\)_42](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vonu_econ_2013_18_3(1)_42)
9. Max Weber: The Theory of Social and Economic Organization. New York: Oxford University Press, 1947. 436 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=G3TYBu6-4G0C&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>
10. Хачатурян Х. В. Переорієнтація державного управління на потреби громадян: нова європейська модель та Україна // Вісник Київського міжнародного університету. 2009. Вип. 8. URL: <http://www.kyumu.edu.ua/vmv/v/08/khachaturian.htm>

11. Про заходи щодо впровадження Концепції адміністративної реформи в Україні: Указ від 22.07.1998 р. № 810. URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/Laws/show/810/98>
12. ISO 37001:2016. Система управління заходами боротьби з корупцією. Вимоги із рекомендаціями для використання. URL: http://pecb.com.ua/wp-content/uploads/2017/02/ISO-37001_2016_ukr.pdf
13. Corruption Perception Index 2017 // Transparency International. URL: https://www.transparency.org/news/feature/corruption_perceptions_index_2017
14. Worldwide Governance Indicators // The World Bank. URL: <http://info.worldbank.org/governance/wgi/#reports>
15. Ходаков В. Е., Соколова Н. А., Кирийчук Д. Л. О развитии основ теории координации сложных систем // Проблемы інформаційних технологій. 2014. № 2. С. 12–21.
16. Trunov A. Realization of the paradigm of prescribed control of a nonlinear object as the problem on maximization of adequacy // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 4, Issue 4 (82). P. 50–58. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.75674>
17. Trunov A. Recurrent approximation as the tool for expansion of functions and modes of operation of neural network // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 5, Issue 4 (83). P. 41–48. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.81298>
18. Петров Э. Г. Координационное управление (менеджмент) процессами реализации решений // Проблемы інформаційних технологій. 2014. № 2. С. 6–11.
19. Петров К. Э., Крючковский В. В. Компараторная структурно-параметрическая идентификация моделей скалярного многофакторного оценивания: монография. Херсон: Олди-плюс, 2009. 294 с.
20. Trunov A. Criteria for the evaluation of model's error for a hybrid architecture DSS in the underwater technology ACS // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 6, Issue 9 (84). P. 55–62. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.85585>
21. Трунов О. М. Критерій адекватності як оцінка ефективності процесу побудови моделі // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1, № 4 (73). С. 36–41. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.37204>
22. Tsay R. S. Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, 2010. doi: <https://doi.org/10.1002/9780470644560>
23. Enders W. Applied econometric time series. New York: Wiley and Sons, 1994. 433 p.
24. Трухан С. В., Бідюк П. І. Методика побудови математичних моделей актуарних процесів // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 1, № 4 (73). С. 27–35. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.36486>
25. Бідюк П. І., Борисевич А. С. Оцінювання параметрів моделей із застосуванням методу Монте-Карло для марковських ланцюгів // Наукові праці

Чорноморського державного університету імені Петра Могили. Сер.: Комп'ютерні технології. 2008. Т. 90, № 77. С. 21–37.

26. Щелкалин В. Н. Системный подход к синтезу математических моделей прогнозирования взаимосвязанных нестационарных временных рядов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 2, № 4 (74). С. 21–35. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.40065>

27. The Methods Bayesian Analysis of the Threshold Stochastic Volatility Model / Bidyuk P., Gozhyj A., Szymanski Z., Kalinina I., Beglytsia V. // 2018 IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP). 2018. doi: <https://doi.org/10.1109/dsmp.2018.8478474>

28. Trunov A. Recurrent transformation of the dynamics model for autonomous underwater vehicle in the inertial coordinate system // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 39–47. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95783>

29. Trunov A., Belikov A. Application of recurrent approximation to the synthesis of neural network for control of processes phototherapy // 2015 IEEE 8th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS). 2015. doi: <https://doi.org/10.1109/idaacs.2015.7341389>

30. Trunov A. Peculiarities of the interaction of electromagnetic waves with bio tissue and tool for early diagnosis, prevention and treatment // 2016 IEEE 36th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). 2016. doi: <https://doi.org/10.1109/elnano.2016.7493041>

31. Trunov A. Theoretical predicting the probability of electron detachment for radical of cell photo acceptor // 2017 IEEE 37th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). 2017. doi: <https://doi.org/10.1109/elnano.2017.7939776>

32. Trunov A. Recurrent Approximation in the Tasks of the Neural Network Synthesis for the Control of Process of Phototherapy // Computer Systems Healthcare and Medicine. Denmark, 2017. P. 213–248.

33. Trunov A., Malcheniuk A. Recurrent network as a tool for calibration in automated systems and interactive simulators // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 9 (92). P. 54–60. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126498>

34. Trunov A., Fisun M., Malcheniuk A. The processing of hyperspectral images as matrix algebra operations // 2018 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2018. doi: <https://doi.org/10.1109/tcset.2018.8336305>

35. Gil-Lafuente A. M. Fuzzy Logic In Financial Analysis. Springer-Verlag Berlin Heiderberg, 2005. 450 p. doi: <https://doi.org/10.1007/3-540-32368-6>

36. Trunov A. Transformation of operations with fuzzy sets for solving the problems on optimal motion of crewless unmanned vehicles // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4, Issue 4 (94). P. 43–50. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.140641>

37. Батунер Л. А., Позин М. Е. Математические методы в химической технике. 6-е изд., испр. Л.: Химия, 1971. 824 с.
38. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев: Наукова думка, 1981. 296 с.
39. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
40. Construction of the method for building analytical membership functions in order to apply operations of mathematical analysis in the theory of fuzzy sets / Dykhta L., Kozub N., Malcheniuk A., Novosadovskyi O., Trunov A., Khomchenko A. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 5, Issue 4 (95). P. 22–29. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.144193>
41. Ивахненко А. Г. Образное мышление как согласование результатов дедуктивного мышления и вариантов индуктивного мышления // Управляющие системы и машины. 2005. № 2. С. 3–7.
42. Madala H. R., Ivakhnenko G. Inductive learning algorithms for complex systems modeling. CRC Press, 1994.
43. Проблемы индуктивного двухуровневого мониторинга сложных процессов / Ивахненко А. Г., Савченко Е. А., Ивахненко Г. А., Синявский В. Л. // Управляющие системы и машины. 2007. № 3. С. 13–21.
44. Ивахненко А. Г., Степашко В. С. Помехоустойчивость моделирования. К.: Наукова думка, 1985. 216 с.
45. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. В. Аппроксимация с ограничениями. К.: Наукова думка, 1982. 252 с.
46. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наукова думка, 1980. 352 с.
47. Попов Б. А., Малачивский П. С. Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций. Львов, 1984. 70 с.