Основним елементом при виробництві багатьох електронних пристроїв є п'єзоелектричні пластини. Найбільш характерним та розповсюдженим параметром таких пластин є частота власних коливань, яка залежить від багатьох геометричних, технологічних та фізичних факторів

Ключові слова: п'єзоелектричні пластини, нормальний закон

Основным элементом при производстве многих электронных устройств являются пьезоэлектрические пластины. Наиболее характерным и распространённым параметром таких пластин является частота собственных колебаний, которая зависит от многих геометрических, технологических и физических факторов

Ключевые слова: пьезоэлектрические пластины, нормальный закон

A basic element at the production of many electronic devices are piezoelectric plates. The most characteristic and widespread parameter of such plastins is frequency of eigentones, which depends on many geometrical, technological and physical factors

Keywords: piezoelectric plate, the normal law

УДК 681.586.773

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

В.Я. Журавлёв
Кандидат технических наук, профессор*
Контактный тел.: (057) 702-13-16, 705-05-30

А.Д. Меняйло
Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: (057) 702-14-94, 68-96-20

*Кафедра проектирования и эксплуатации электронных аппаратов
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61121

1. Введение

В последнее время значительное распространение получили устройства, принцип работы которых основан на пьезоэлектрическом эффекте. Такими устройствами являются пьезоэлектрические излучатели, разнообразные преобразователи физических величин в электрические, источники стабилизированных колебаний, а также специальные диагностические и медицинские устройства.

Основным элементом при производстве таких устройств являются пьезоэлектрические пластины разных типоразмеров. Наиболее характерным и распространённым параметром таких пластин является частота собственных колебаний, которая зависит от многих геометрических, технологических и физических факторов. В связи с тем, что количество этих факторов достаточно велико, а возможность их контроля ограничена, целесообразно применить статистический подход к таким исследованиям. Такой подход и был реализован в данном исследовании.

2. Определение статистического закона распределения частоты колебаний пьезоэлектрических пластин

Для комплексной оценки качества технологического процесса производства пьезоэлектрических пластин целесообразно определение статистического закона распределения частоты собственных колебаний для случайно отобранной партии пьезоэлектрических пластин прямоугольной формы. Это дает возможность оценить качество технологического процесса производства с одной стороны, а с другой – дает возможность учесть статистические параметры при проектировании соответствующих радиоэлектронных устройств. Для статистического исследования была случайным образом отобрана партия пластин объемом 100 экземпляров. Исходная гистограмма этой партии пластин для последующего анализа представлена на рис. 1

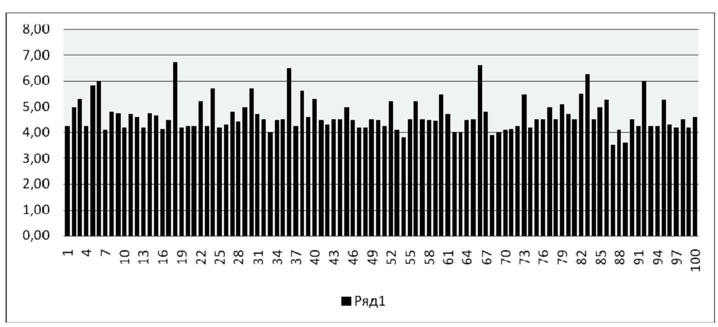

Рис. 1. Гистограмма собственных частот случайной выборки пьезоэлектрических пластин

Обработка результатов эксперимента проводилась с помощью соответствующего программного обеспечения. В основе алгоритма определения закона распределения частоты собственных колебаний пластин лежат теоретические предпосылки, изложенные в [1,2]. Расчет был проведен в следующей последовательности:

* Определяем статистическое математическое ожидание частоты собственных колебаний пластин F_i по формуле

$$\overline{M_F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{n}.$$

где n – количество пластин.

В результате получили статистическое математическое ожидание частоты колебаний пластин равное 4,5 кГц.

* Определяем статистическую дисперсию по формуле

$$\overline{D_F} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(F_i - \overline{M}_F\right)^2}{n-1}$$

При подстановке соответствующих значений, получим значение равное 0,23.

* Определяем среднеквадратическое отклонение частоты собственных колебаний от математического ожидания

$$\overline{\sigma_F} = \sqrt{\frac{\overline{D_F}}{n}}.$$

Получили результат 0,045.

*Учитывая число степеней свободы, определяемое из выражения $\eta = n-1$, задаваясь доверительной вероятностью Р (ε) = 0,95, т.е. надёжностью полученного статистического результата, используя табулированное распределение Стьюдента, например в [3], находим квантили распределения $t_a = 2$.

* Далее определяем половину длины доверительного интервала для частоты собственных колебаний, используя известную формулу

$$\varepsilon = t_a \cdot \overline{\sigma_F}.$$

Полученный результат 0,09, округляем до 0,1.

* Определяем величину доверительного интервала, которая соответствует надёжности результата $P(\varepsilon) = 0{,}95$

$$I = \overline{M_F} \pm \varepsilon = 4{,}5 \pm 0{,}1.$$

Таким образом, доверительный интервал I= (4,5 ± 0,1).

* Разбиваем статистический ряд частоты собственных колебаний на интервалы начиная с математического ожидания и строим табл. 1.

Таблица 1

Интервалы, кГц	3,6-3,8	3,8-4,0	4,0-4,2	4,2-4,4	4,4-4,6	4,6-4,8	4,8-5,0	5,0-5,2	5,2-5,4
n_i	2	5	9	18	25	18	8	5	4
$\overline{P}_i$	0,02	0,053	0,096	0,191	0,266	0,191	0,085	0,053	0,043

При этом объем выборки уменьшен до 94, т.к. 6 измерений частоты выпадают из ряда и считаются грубыми ошибками. Этот факт можно интерпретировать как 6% брак при производстве.

* Подсчитываем число значений частоты колебаний пластин попавших в каждый интервал и определяем соответствующую статистическую вероятность $\overline{P_i} = \frac{n_i}{n}$. Результаты заносим в табл. 1.

* По полученным данным, на основании табл. 1, строим гистограмму собственной частоты колебаний, рис. 2

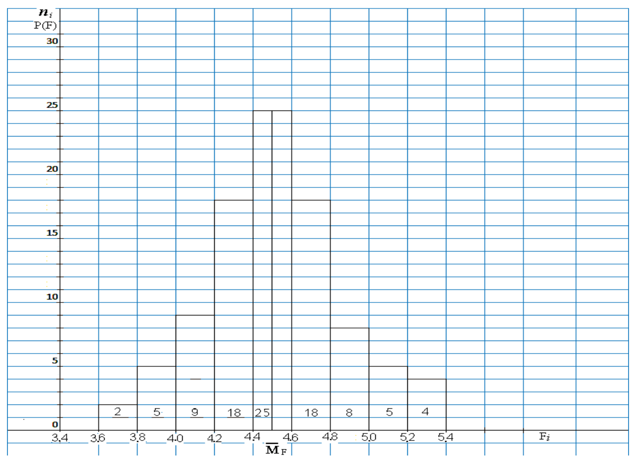

Рис. 2. Гистограмма обработанных значений собственной частоты колебаний пьезоэлектрических пластин

* Уточняем математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение частоты статистического распределения по формуле

$$\overline{M}_F = \sum_{i=1}^{к} F_{ci}\overline{P}_i,$$

где к - количество интервалов. Причём, в качестве полномочного представителя каждого интервала примем его середину. Уточнённое математическое ожидание составило $\overline{M}_F = 4{,}51$ кГц.

* Уточняем среднеквадратичное отклонение частоты пластины σ от математического ожидания $\overline{M}_F$.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{к}\left(F_{ci} - \overline{M}_F\right)^2 \overline{P}_i}.$$

Уточнённое среднеквадратичное отклонение равно $\sigma = 0{,}46$.

* Определим необходимое количество измерений частоты собственных колебаний пьезоэлектрических пластин, которое понадобится для того, чтобы с вероятностью 0,9 ошибка от замены вероятности статистической частотой не превзошла, например 10%. При обработке статистических данных установили, что в интервал $\overline{M}_F \pm \sigma$ составило 67 попаданий частоты пластин, что соответствует частоте событий $P^* = \frac{67}{94} = 0{,}71$.

*Тогда предельно допустимая ошибка в этом случае составит $\varepsilon = 0{,}1 \cdot 0{,}71 = 0{,}071 \approx 0{,}1$.

Пользуясь методикой приведенной в [1] построим график для нахождения числа измерений собственных колебаний пластин, чтобы ошибка от замены вероятности частотой не превышала 10%. Из графика рис. 3 видно, что ошибка падает до допустимой величины при числе опытов n порядка 80.

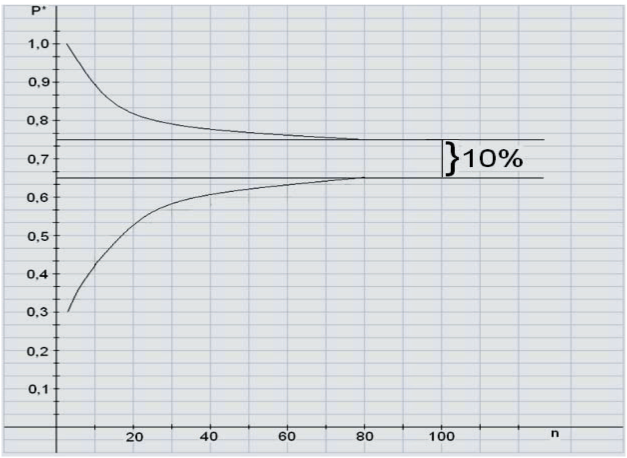

Рис. 3. График определения ошибки вычислений

* Найдём теоретическую вероятность попадания в интервалы частоты колебаний пластины, используя таблицы приведенной функции Лапласа.

$$P_i = 0,5\left[\Phi_0\left(\frac{F_{i+1}-\overline{M}_F}{0,477\sqrt{2}\sigma_F}\right)-\Phi_0\left(\frac{F_i-\overline{M}_F}{0,477\sqrt{2}\sigma_F}\right)\right],$$

где $\Phi_0(Z)$ - приведенная функция Лапласа,

F_{i+1}, F_i - границы интервала.

Составляем табл. 2, куда заносим результаты расчёта теоретической вероятности.

Таблица 2

Интервалы кГц	3,6-3,8	3,8-4,0	4,0-4,2	4,2-4,4	4,4-4,6	4,6-4,8	4,8-5,0	5,0-5,2	5,2-5,4
n_i	2	5	9	18	25	18	8	5	4
P_i	0,005	0,106	0,117	0,154	0,21	0,158	0,12	0,075	0,044
Pn_i	0,5	10	11	14,5	19,7	14,9	11,3	7,0	4,1
x^2	4,5	2,5	0,36	0,845	1,426	0,645	0,96	0,57	0,002

*Вычисляем функцию плотности распределения x^2 для каждого интервала из выражения

$$\chi^2 = \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i}.$$

Результаты расчёта заносим в табл. 2.

Просуммировав величину χ^2 для всех интервалов получили результат $\sum\chi^2 = 11,8$. Исходя из полученной $\sum\chi^2$ и числу степеней свободы $\eta = k-1$, пользуясь таблицей квантилей распределения χ^2, находим вероятность того, что истинное значение частоты собственных колебаний пластины находится в пределах χ^2 и ∞. Такая вероятность равна 0,15, что подтверждает гипотезу о том, что собственная частота колебаний пьезоэлектрических пластин распределена по нормальному закону.

Выводы

В результате проведенных исследований установлено, что статистические данные частоты собственных колебаний пьезоэлектрических пластин с большой вероятностью могут быть описаны нормальным законом распределения.

В данной статье реализована подробная методика проверки статистических данных на нормальный закон распределения.

Определено необходимое количество измерений частоты собственных колебаний пластин (n=80), чтобы с заданной ошибкой (10%) можно бы было заменить статистическую частоту вероятностью.

Литература

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. – 7-е изд. Стереотип – М.: Высшая школа, 2001. – 575с.
2. Смирнов Н.В.,. Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений: Учебное пособие – 3-е изд. Стереотип – М.: Наука, 1969. – 511с.
3. Леонов А.И., Дубровский Н.Ф.. Основы технической эксплуатации бытовой радиоэлектронной аппаратуры: Учебник для вузов. – М.: Легпромбытиздат, 1991. – 272с.