

выхлопного тракта установки (ВТУ) с разработкой рекомендаций по снижению пульсаций давления и экспериментальной проверкой их эффективности.

Для решения поставленных задач была создана модель ВТУ, содержащая диффузор газовой турбины (ДТ), выхлопной патрубок (ВП), диффузор котла-утилизатора (ДКУ), котел-утилизатор (КУ). Модель КУ включала только первый трубный пучок. Коэффициент моделирования был принят равным 11,11, исходя из производительности компрессора К-500 для получения чисел Маха в потоке, соответствующих натурным условиям.

Исследования показали, что в тракте ВТУ (полная комплектация) имеет место высокий уровень пульсаций по частоте 81Гц и уменьшенный уровень пульса-

ций при удвоенной частоте по сравнению с работой без ДКУ.

Высокий уровень вибрации на режиме холостого хода является сочетанием ряда неблагоприятных факторов: значительной закрутки потока, неоптимальными соотношениями лопаточных аппаратов в ДТ и влиянием всей сети.

Установка в систему выхлопных диффузоров раскручивающего устройства приводит к существенному снижению уровня вибраций элементов выхлопного тракта как на режиме холостого хода, так и номинальной нагрузки. Удалось снизить величины колебаний в разных точках ВТУ в 6-23 раза.

Работы в этом направлении необходимо продолжить.

УДК 534

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ВАЛА З ЛОПАТЯМИ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ

**О. Д. Шамровський**  
Професор\*

Контактний тел.: (0612) 60-12-16  
E-mail: adshamr@rambler.ru

**В. О. Шевченко**  
Аспірант\*

Контактний тел.: 096-680-50-06  
E-mail: shevictory@gmail.com

**Ю. О. Лимаренко**  
Доцент\*

Контактний тел.: 096-234-71-97  
E-mail: lymarenko@yandex.ru

\*Кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем

Запорізька державна інженерна академія  
пр. Леніна, 226, м. Запоріжжя, 69006

*Розглянуто просторову дискретну модель вала з лопатями робочого колеса поворотно-лопатевої гідротурбіни. Проведено аналіз вимушених коливань системи. Розроблену в [4] методику керування антирезонансу застосовано для гасіння небажаних коливань вала з лопатями*

*Ключові слова: вал, лопать, вимушені коливання, резонанс*

*Рассмотрена пространственная дискретная модель вала с лопастями рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины. Проведен анализ вынужденных колебаний системы. Разработанная в [4] методика управляемого антирезонанса использована для гашения нежелательных колебаний вала с лопастями*

*Ключевые слова: вал, лопасть, вынужденные колебания, резонанс*

*The discrete model of shaft with blades of adjustable-blade turbine water wheel is observed. The controlled antiresonance methods which was developed in [4] is applied for undesirable system vibrations dumping*

*Key words: shaft, blade, forced vibrations, resonance*

### Вступ

Робочі колеса гідротурбін зазнають значних навантажень при їхній експлуатації. Істотно впливають при цьому різного роду вібрації. Зазвичай питання вібрацій для низькооборотних, порівняно з авіаційними турбінами й компресорами, гідротурбін вважаються другорядними, однак, як показала аварія на Саяно-Шушенській ГЕС, зневажати вібраціями гідротурбін не можна [1]. Проблеми, обумовлені вібраціями гідротурбін, виникали також і на Дніпровській ГЕС. Таким чи-

ном, питання вібрацій робочих коліс гідротурбін є досить актуальними й потребують детального вивчення.

При аналізі явищ, що відбуваються при вібраціях, особливо важливими є дослідження, що дозволяють одержувати якісні результати. Такою властивістю володіють, зокрема, дискретні моделі [2, 3]. У даній роботі описана дискретна модель вала з лопатями поворотно-лопатевої гідротурбіни. На основі запропонованої моделі зроблено аналіз резонансних коливань вала з лопатями, а також продемонстрована розроблена раніше [4] технологія керування резо-

нансними коливаннями у всьому діапазоні частот коливань системи.

### Дискретна модель вала з лопатями

Розглянемо просту просторову дискретну модель вала з лопатями робочого колеса поворотного-лопатевої гідротурбіни [2], що складається з абсолютно твердого вала радіуса  $R$  масою  $M$ , на який із кроком  $2\pi/n$  насаджені  $n$  абсолютно твердих лопатей, з'єднаних пружно з валом. Вісі, навколо яких повертаються лопаті відносно вала, утворюють із віссю вала деякий кут  $\alpha$  (рис. 1).

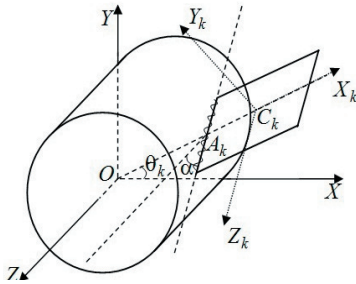


Рис. 1. Кріплення лопаті до вала в просторовому випадку

Центр системи координат  $OXYZ$  збігається з геометричним центром вала. Бічні границі лопатей рівновіддалені від торців вала.

У якості узагальнених координат, що задають положення системи в просторі, візьмемо координати  $x, y, z$  центра вала, кути повороту вала  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  відносно нерухомих координатних осей і кути  $\varphi_k$  ( $k=1, n$ ) поворотів лопат щодо вала, усього  $n+6$  координат.

Для довільної лопаті номер  $k$  полярний кут  $\theta_k$ , що задає вихідне положення лопаті, дорівнює:

$$\theta_k = \frac{2\pi}{n}(k-1) \quad (k=1, \dots, n). \quad (1)$$

Рух вала з лопатями описується зв'язаною системою  $n+6$  диференціальних рівнянь [2]:

$$\begin{aligned} S_{11_n} \ddot{x} + S_{17} \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \ddot{\varphi}_k + c_x x &= 0 \\ S_{22_n} \ddot{y} + S_{27} \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \ddot{\varphi}_k + c_y y &= 0 \\ S_{33_n} \ddot{z} + S_{37} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_k + c_z z &= 0 \\ S_{44_n} \ddot{\varphi}_x + S_{47}^s \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \ddot{\varphi}_k + S_{47}^c \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \ddot{\varphi}_k + c_{xy} \varphi_x &= 0 \\ S_{55_n} \ddot{\varphi}_y + S_{57}^s \sum_{k=1}^n \sin \theta_k \ddot{\varphi}_k + S_{57}^c \sum_{k=1}^n \cos \theta_k \ddot{\varphi}_k + c_{xy} \varphi_y &= 0 \\ S_{66_n} \ddot{\varphi}_z + S_{67} \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_k + c_\varphi \varphi_z &= 0 \\ S_{17} \sin \theta_k \ddot{x} + S_{27} \cos \theta_k \ddot{y} + S_{37} \ddot{z} + (S_{47}^s \sin \theta_k + S_{47}^c \cos \theta_k) \ddot{\varphi}_x + \\ + (S_{57}^s \sin \theta_k + S_{57}^c \cos \theta_k) \ddot{\varphi}_y + S_{67} \ddot{\varphi}_z + S_{77} \ddot{\varphi}_k + \\ + (c_1 + 2c_0 h^2) \varphi_k - c_0 h^2 (\varphi_{k-1} + \varphi_{k+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

( $k=\overline{1, n}$ ),  $\varphi_0 = \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi_1$   
де

$S_{11_n}, S_{22_n}, S_{33_n}, S_{44_n}, S_{55_n}, S_{66_n}, S_{77_n}, S_{17}, S_{27}, S_{37}, S_{47}^s, S_{47}^c, S_{57}^s, S_{57}^c, S_{67}$  – коефіцієнти, що залежать від мас, моментів інерції та геометричних характеристик системи;  $c, c_\varphi, c_{xy}, c_z, c_0, c_1$  – жорсткісні характеристики системи.

Пошук власних частот і форм коливань здійснюється з урахуванням її інваріантності щодо перетворень групи  $SO(2)$ , що дозволяє значно зменшити розмірність задачі, і викладений в [2].

### Вимушені коливання

Розглянемо вимушені коливання системи на прикладі вала із трьома лопатями. Нехай деяка сила  $\vec{P}_1$ , прикладена в точці  $C_{P_1}$  площини  $XOY$ , спрямована паралельно до цієї площини й перпендикулярно до осі  $OX$  (рис. 2), діє на першу лопать. Точка  $C_{P_1}$  прикладення сили розташована на відстані  $l_1$  від лінії кріплення лопаті до вала.

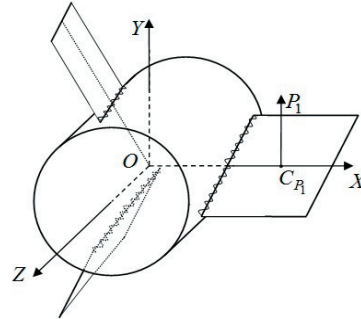


Рис. 2. Схема прикладення сили  $P_1$

Нехай сила  $P_1$  змінюється з часом по гармонічному закону:

$$P_1 = f_1 \cos pt. \quad (3)$$

Тоді рух розглянутої механічної системи під дією сили  $P_1$  буде описуватися системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} S_{11_3} \ddot{x} + S_{17} \frac{\sqrt{3}}{2} (\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3) + c_x x &= 0 \\ S_{22_3} \ddot{y} + S_{27} \left( \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_3 \right) + c_y y &= P_1 \\ S_{33_3} \ddot{z} + S_{37} (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3) + c_z z &= 0 \\ S_{44_3} \ddot{\varphi}_x + S_{47}^s \frac{\sqrt{3}}{2} (\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3) + S_{47}^c \left( \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_3 \right) + c_{xy} \varphi_x &= 0 \\ S_{66_3} \ddot{\varphi}_z + S_{67} (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3) + c_\varphi \varphi_z &= P_1 (R + l_1) \\ S_{27} \ddot{y} + S_{37} \ddot{z} + S_{47}^c \ddot{\varphi}_x + S_{57}^c \ddot{\varphi}_y + S_{67} \ddot{\varphi}_z + S_{77} \ddot{\varphi}_1 + \\ + (c_1 + 2c_0 h^2) \varphi_1 - c_0 h^2 (\varphi_3 + \varphi_2) &= P_1 l_1 \cos \alpha \\ S_{17} \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{x} - S_{27} \frac{1}{2} \ddot{y} + S_{37} \ddot{z} + S_{47}^s \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\varphi}_x - \\ - S_{47}^c \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_x + S_{57}^s \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\varphi}_y - S_{57}^c \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\varphi}_y + \\ + S_{67} \ddot{\varphi}_z + S_{77} \ddot{\varphi}_2 + (c_1 + 2c_0 h) \varphi_2 - c_0 h (\varphi_1 + \varphi_3) &= 0 \\ -S_{17} \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{x} - S_{27} \frac{1}{2} \ddot{y} + S_{37} \ddot{z} - S_{47}^s \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\varphi}_x - S_{47}^c \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_x + -S_{57}^s \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\varphi}_y & \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок системи рівнянь (4) шукаємо в аналогічному (3) виді:

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos pt, y = A_y \cos pt, z = A_z \cos pt, \\ \varphi_x &= A_{\varphi_x} \cos pt, \varphi_y = A_{\varphi_y} \cos pt, \varphi_z = \\ &= A_{\varphi_z} \cos pt, \varphi_k = A_k \cos pt \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язуючи систему  $n+6$  рівнянь, отриману підстановкою (5) в (4), при різних значеннях частоти  $p$  знаходимо залежності амплітуд узагальнених координат від цієї частоти:

$$\begin{aligned} A_x &= A_x(p), A_y = A_y(p), A_z = A_z(p), \\ A_{\varphi_x} &= A_{\varphi_x}(p), A_{\varphi_y} = A_{\varphi_y}(p), A_{\varphi_z} = A_{\varphi_z}(p), A_k = A_k(p) \quad (6) \\ (k &= 1, 2, 3) \end{aligned}$$

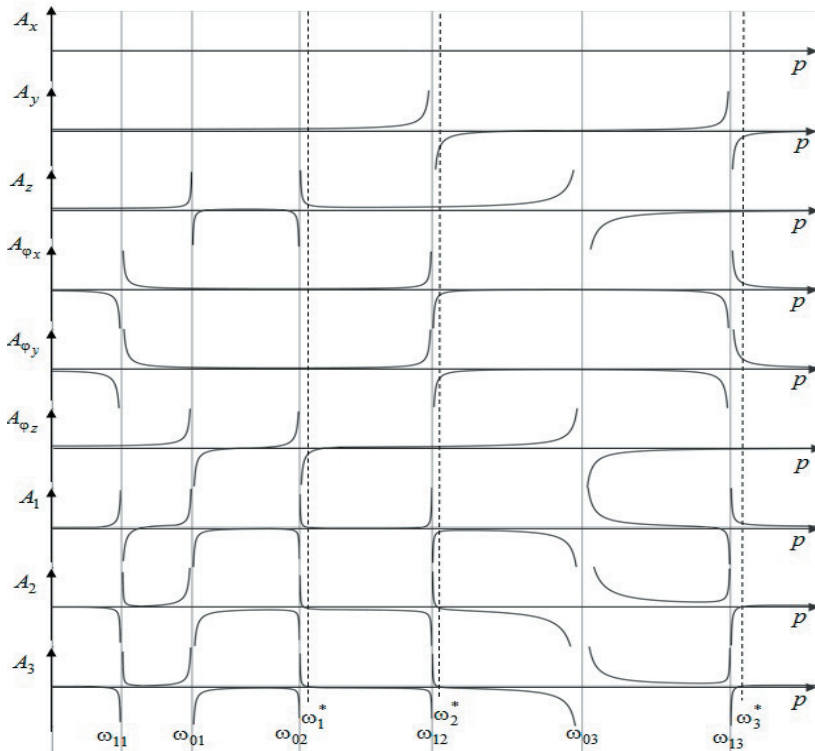


Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики узагальнених координат

На рис. 3 представлені амплітудно-частотні характеристики системи при певних значеннях параметрів цієї системи. Перший індекс 0 у позначенні частот відповідає осьовій симетрії, 1 – одному вузловому діаметру.

Графіки для  $A_x$  й  $A_y$  не показує резонансів на частотах, що відповідають вісесиметричним коливанням. Це пов'язане з відсутністю при таких коливаннях лінійних переміщень вала уздовж осей  $OX$  й  $OY$ .

Графік для  $A_\varphi$  не має резонансів на частотах, що відповідають коливанням з одним вертикальним вузловим діаметром.

Це викликано відсутністю поворотів вала при таких коливаннях. Графіки для амплітуд лопатей  $A_1$ ,

$A_2$  мають характерні резонансні зростання амплітуд на всіх власних частотах коливань, оскільки лопаті беруть участь у всіх видах власних форм коливань вала з лопатами.

Також були зроблені розрахунки для випадку дії збурювальної сили  $P_2 = f_2 \cos pt$  на другу лопать. Хоча, з фізичної точки зору, цей випадок принципово нічим не відрізняється від розглянутого вище, але відносно системи координат  $OXYZ$  результати виглядають інакшими.

Для цього випадку прикладення сили слід зазначити, що вплив на другу лопать викликає рух вала уздовж всіх трьох координатних осей, хоча й з різними амплітудами.

Обертання вала навколо осі  $OZ$ , відображене амплітудою  $A_{\varphi_z}$ , залишається таким самим, а навколо осей  $OX$  та  $OY$  зберігається, але з іншими амплітудами. Друга лопать (амплітуда  $A_2$ ) рухається так само, як раніше перша лопать (амплітуда  $A_1$ ).

Перша й третя лопаті (амплітуди  $A_1, A_3$ ) рухаються однаково й так само, як раніше друга лопать (амплітуда  $A_2$ ).

### Керований антирезонанс

Звернемо увагу на те, що при резонансі вала з лопатами зростають до великих значень одночасно амплітуди всіх лопатей, а не тільки тієї, на яку діє збурювальна сила. Інакше кажучи, сила, що діє на одну лопать, дуже впливає не тільки на цю лопать, але й на всі інші.

Використаємо цей ефект для гасіння резонансу розглянутої системи.

Нехай збурювальні сили однакової частоти діють одночасно на першу й другу лопаті (рис. 4).

Обидві сили змінюються за гармонічним законом:

$$P_1 = f_1 \cos pt, P_2 = f_2 \cos pt \quad (7)$$

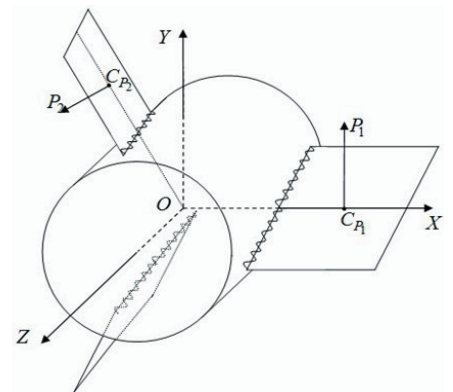


Рис. 4. Схема прикладення сил  $P_1$  і  $P_2$

$$\begin{aligned}
 (c - p^2 S_{113}) A_x - S_{17} p^2 (A_2 - A_3) &= -f_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 (c - p^2 S_{223}) A_y - S_{27} p^2 \left( A_1 - \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} A_3 \right) &= f_1 - f_2 \frac{1}{2} \\
 (c_z - p^2 S_{333}) A_z - S_{37} p^2 (A_1 + A_2 + A_3) &= 0 \\
 (c_{xy} - p^2 S_{443}) A_{\varphi_x} - S_{47}^s p^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (A_2 - A_3) - S_{47}^c p^2 \left( A_1 - \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} A_3 \right) &= 0 \\
 (c_{xy} - p^2 S_{553}) A_{\varphi_y} - S_{57}^s p^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (A_2 - A_3) - S_{57}^c p^2 \left( A_1 - \frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} A_3 \right) &= 0 \\
 (c_\varphi - p^2 S_{663}) A_{\varphi_z} - S_{67} p^2 (A_1 + A_2 + A_3) &= f_1 (R + l_1) + f_2 (R + l_2) \\
 -p^2 S_{27} A_y - p^2 S_{37} A_z - p^2 S_{47}^s A_{\varphi_x} - p^2 S_{47}^c A_{\varphi_y} - p^2 S_{67} A_{\varphi_z} + \\
 + [(c_1 + 2c_0 h^2) - p^2 S_{77}] A_{\varphi_1} - c_0 h^2 (A_{\varphi_2} + A_{\varphi_3}) &= f_1 l_1 \cos \alpha \quad (8) \\
 p^2 S_{27} \frac{1}{2} A_y - p^2 S_{37} A_z - p^2 \left( S_{47}^s \frac{\sqrt{3}}{2} - S_{47}^c \frac{1}{2} \right) A_{\varphi_x} - p^2 \left( S_{57}^s \frac{\sqrt{3}}{2} - S_{57}^c \frac{\sqrt{3}}{2} \right) A_{\varphi_y} - \\
 - p^2 S_{17} \frac{\sqrt{3}}{2} A_x - p^2 S_{67} A_{\varphi_z} + [(c_1 + 2c_0 h) - S_{77}] A_{\varphi_2} - c_0 h (A_{\varphi_1} + A_{\varphi_3}) &= f_2 l_2 \cos \alpha \\
 p^2 S_{27} \frac{1}{2} A_y - p^2 S_{37} A_z + p^2 \left( S_{47}^s \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{47}^c \frac{1}{2} \right) A_{\varphi_x} - p^2 \left( S_{57}^s \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{57}^c \frac{1}{2} \right) A_{\varphi_y} + \\
 + p^2 S_{17} \frac{\sqrt{3}}{2} A_x - p^2 S_{67} A_{\varphi_z} + [(c_1 + 2c_0 h^2) - S_{77}] A_{\varphi_3} - c_0 h^2 (A_2 + A_1) &= 0
 \end{aligned}$$

Тоді система рівнянь руху буде мати аналогічний до (4) вид і після підстановки в неї (5) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження амплітуд (6):

Умова антирезонансу – це рівність нулю амплітуди коливань лопатки номер 1 [4]:

$$A_1 = 0, \quad (9)$$

за рахунок підбора амплітуди  $f_2$  сили, що діє на лопать номер 2 при заданій амплітуді  $f_1$  сили, що діє на лопать номер 1. При цьому в рівняннях (8) зникає невідома  $A_1$ , але замість неї з'являється інша невідома  $f_2$ , і, таким чином, баланс кількості невідомих і рівнянь зберігається.

Розв'язок одержуємо у вигляді, аналогічному (5). На рисунку 5 наведені відповідні амплітудно-частотні характеристики.

На всіх графіках є зона, що вимагає пояснень. Такі пояснення можна зробити, розглянувши графіки, зображені на рис. 3. При впливі єдиної збурювальної сили на першу лопать амплітуда коливань другої лопаті при частотах  $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$  та  $\omega_3^*$  перетинає вісь  $p$ , тобто обертається в нуль. На прикладі коливань ланцюжків було показано [4], що в таких випадках повне гасіння коливань неможливо, оскільки сила, що

гасить коливання, прикладена в точках з нульовою амплітудою. Однак, як й у випадках з ланцюжком, насправді мова йде про ділянки, на яких амплітуда коливань, що гасяться, досить мала й, власне кажучи, гасіння й не є потрібним. Тому виходом з даного положення є обмеження величини амплітуди  $f_2$  сили в такий самий спосіб, як було показано на прикладах ланцюжків [4].

Також необхідно відзначити явище збереження резонансу на деяких частотах. Це частоти коливань із одним вузловим діаметром. Відомо, що існує два варіанти вузлового діаметра – горизонтальний і вертикальний. Збурювальна сила, що діє на першу лопать, спрямована уздовж осі ОУ в площині ХОУ й тому збуджує коливання з вертикальним вузловим діаметром. Сила, що діє на другу лопать, нахилена під деяким кутом до осі ОУ й має, таким чином, горизонтальну й вертикальну складові. Вертикальна складова гасить резонансні коливання з вертикальним вузловим діаметром; у той же час горизонтальна складова викликає резонансні коливання з горизонтальним вузловим діаметром, що раніше були відсутніми. Таким чином, виявлене ще одне

обмеження на застосування керованого антирезонансу. Принаймні, ця ситуація вимагає вживання додаткових заходів. Наприклад, можна вимагати,

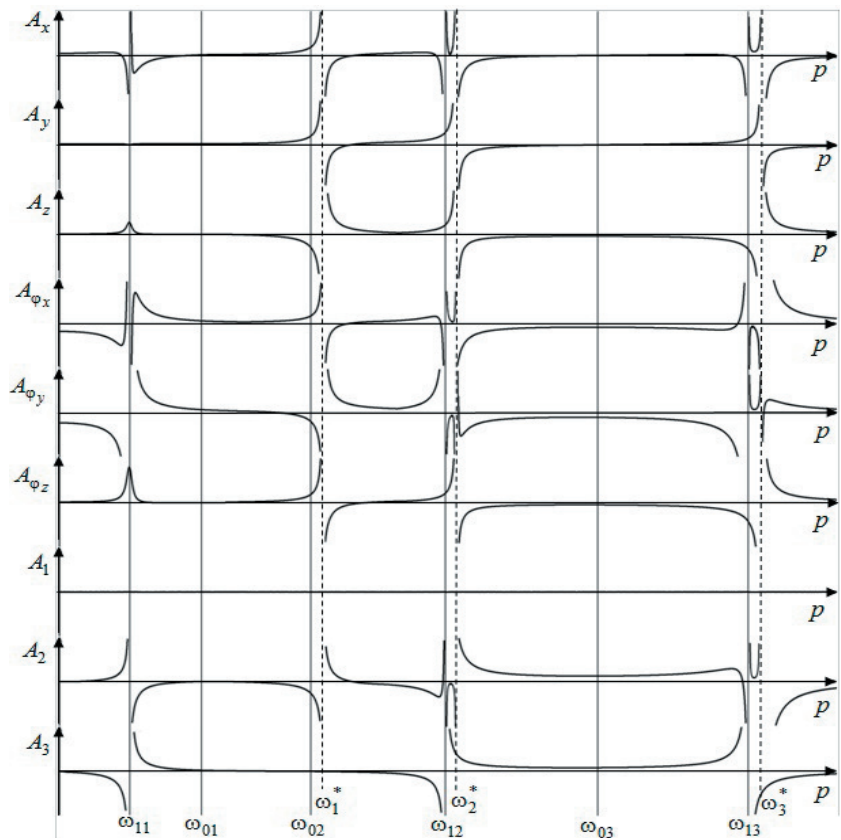


Рис. 5. Амплітудно-частотні характеристики у випадку дії двох сил

щоб сила, що діє на нахилену лопать, була також спрямована уздовж осі ОУ.

Відзначимо особливо, що резонансні коливання гасяться цілком на всіх власних частотах коливань вала з лопатями, тобто поставлена задача керування резонансними коливаннями в усьому діапазоні частот розв'язана повністю.

---

### Висновки

---

За допомогою дискретної моделі розглянуто задачу про вимушені коливання вала з лопатями. Роз-

глянуто також проблему керування резонансними коливаннями вказаної системи. Результати розрахунків продемонстрували теоретичну можливість застосування методики керованого антирезонансу [4] для гасіння небажаних резонансних коливань вала з лопатями. Сутність методики полягає в можливості гасіння коливань однієї з лопатей за рахунок прикладення гасильної сили, амплітуда якої залежить від частоти вимушених коливань, на якусь іншу лопать. Всі розрахунки були зроблені на прикладі вала з трьома лопатями, але збільшення кількості лопатей принципово не впливає на отримані в роботі якісні результати.

---

### Література

1. Акт технического расследования причин аварии, произошедшей 17 августа 2009 года в филиале Открытого Акционерного Общества «РусГидро» – «Саяно-Шушенская ГЭС имени П. С. Непорожного».
2. Григорьева, П.П. Исследование колебаний поврежденных дисков с лопатками газотурбинных двигателей на основе дискретной модели / П.П. Григорьева, А.Д. Шамровский // Проблемы машиностроения. – 2005. – 8, № 2. – С. 56-64.
3. Побережников, А.В. К вопросу о колебаниях расстроенного венца с различными видами связи лопаток / А.В. Побережников, А.П. Зиньковский // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4. – С. 97-101.
4. Шамровский, А.Д. Активное гашение колебаний в пружинно-массовой цепочке / А.Д. Шамровский, В.А. Шевченко, Ю.А. Лымаренко, Ю.М. Пазюк // Вісник Дніпропетровського університету. Серія "Механіка". – 2009. – Вип. 13, Т. 2, № 5. – С. 179 -190.