Представлено метод машинного синтезу дискретних коригуючих фільтрів для складних динамічних систем на підставі нелінійного програмування. Вимоги до фільтру представлено у вигляді нелінійного функціоналу та системи нелінійних обмежень

Ключові слова: синтез, ДКФ – дискретний коригуючий фільтр, обмеження

Представлен метод машинного синтеза дискретных корректирующих фильтров для сложных динамических систем на основе нелинейного программирования. Требования к фильтру представлены в виде нелинейного функционала и системы нелинейных ограничений

Ключевые слова: синтез, ДКФ - дискретный корректирующий фильтр, ограничения

The method of machine synthesis of discrete correcting filters for complicated dynamic systems on the basis of nonlinear programming is presented. Requirements to the filter are presented in the form of nonlinear functional and systems of nonlinear restrictions

Keywords: synthesis, ДКФ - the discrete correcting filter, restrictions

УДК 681.51.015

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.Г. Зотов
Кандидат технических наук, старший научный сотрудник
Контактный тел.: (057) 760-38-76

1. Введение

С точки зрения системного подхода к решению задач синтеза дискретных корректирующих фильтров (ДКФ) методы математического программирования трудно переоценить. Сложность может состоять в том, что цели бывает трудно выразить в виде математических выражений, точно отражающих суть проблемы. В подобных случаях задачи решаются на основе теории размытых (нечетких) множеств [1-3] или частично неопределенных систем [4]. Однако для корректно поставленной задачи решение получаем с минимальными затратами времени и с заданной точностью.

В настоящей работе преследуется цель построения эффективного метода машинного синтеза линейных рекурсивных дискретных корректирующих фильтров с вещественными коэффициентами для сложных динамических систем.

2. Постановка задачи

Пусть z – передаточная функция (ПФ) рекурсивного ДКФ задана в виде

$$W(z)=\sum_{i=0}^{m}A_i z^i \Big/ \sum_{i=0}^{k}B_i z^i \qquad (1)$$

где A_i, B_i – вещественные коэффициенты; m, k – порядок полиномов числителя и знаменателя ПФ соответственно $(m \le k)$; z – оператор z – преобразования.

Требование, предъявляемое к функции от динамического коэффициента усиления ДКФ, может быть задано в виде

$$Q=\min_{\omega_\mu \in \Omega}\sum_{\mu=1}^{N}F[\left|W(e^{j\omega_\mu T})\right|], \qquad (2)$$

где N – общее число точек частотной области, на котором минимизируется функция цели;

$\left|W(e^{j\omega_\mu T})\right|$ – значение модуля передаточной функции фильтра для μ – го значения круговой частоты;

Ω – заданный диапазон частот;

T – период квантования сигнала по времени.

Требования к дискретной фазо-частотной характеристике (ДФЧХ) аналитически представляется в виде системы неравенств (ограничений)

$$\arg[W(e^{j\omega_g T})] \le a(\omega_g), \qquad g=\overline{1,m_1}, \qquad (3)$$

$$\arg[W(e^{j\omega_g T})] \ge b(\omega_g), \qquad g=\overline{1,m_2}, \qquad (4)$$

где m_1, m_2 – число точек, в которых заданы ограничения, накладываемые на фазу «сверху» и «снизу» соответственно; $a(\omega_g), b(\omega_g)$ – значения ограничений, накладываемых на ДФЧХ ДКФ «сверху» и «снизу» соответственно.

Требования к статическому коэффициенту усиления фильтра представляется в виде равенства

$$\sum_{i=0}^{k} A_i - k_0 \sum_{i=0}^{k} B_i = 0 . \qquad (5)$$

Для упрощения решения (5) может быть заменено двумя неравенствами

$$\sum_{i=0}^{k} A_i - k_0 \sum_{i=0}^{k} B_i \ge 0 , \qquad (6)$$

$$\sum_{i=0}^{k} A_i - k_0 \sum_{i=0}^{k} B_i \le 0 . \qquad (7)$$

Требование собственной устойчивости ДКФ может быть представлено в виде системы линейных неравенств для минимального порядка ДКФ

$$B_2 + B_1 + B_0 > 0 ,$$

$$B_2 - B_0 > 0,$$

$$B_2 - B_1 + B_0 > 0 , \qquad (8)$$

полученных в результате билинейного преобразования $z = w+1/w-1$.

Для решения задачи синтеза ДКФ необходимо найти такие значения коэффициентов ДКФ A_i, B_i , которые доставят экстремум назначенному функционалу (2) при выполнении заданных ограничений (3), (4), (6) – (8).

3. Основная часть

Подставив $z = e^{j\omega T}$ в (1) получим

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\omega T) + j\sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\omega T) + j\sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\omega T)}, \qquad (9)$$

где $m = k$; ω – круговая частота; T – период квантования сигнала по времени.

Для представления задачи синтеза в терминах математического программирования в качестве функции цели может служить квадрат минимального динамического коэффициента усиления ДКФ

$$Q = \min_{\omega_\mu \in \Omega} \sum_{\mu=1}^{N} \left| W(e^{j\omega_\mu T}) \right|^2 , \qquad (10)$$

где N – число точек, на котором минимизируется функция цели.

Таким образом, функцию цели (10) можно представить в следующем виде

$$Q = \min_{\omega_\mu \in \Omega} \sum_{\mu=1}^{N} \{ \ell n[Re_1^2(\omega_\mu)] + \ell n[Im_1^2(\omega_\mu)] - \ell n[Re_2^2(\omega_\mu)] - \ell n[Im_2^2(\omega_\mu)] \}, (11)$$

где

$$Re_1(\omega_\mu) = \sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\Theta_\mu) ; \; Im_1(\omega_\mu) = \sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\Theta_\mu) ; (12)$$

$$Re_2(\omega_\mu) = \sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\Theta_\mu) ; \; Im_2(\omega_\mu) = \sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\Theta_\mu) ;$$

$$\Theta_\mu = \omega_\mu T . \qquad (13)$$

Представив $\ell n(x)$ в (11) в виде ряда с учетом первого члена, после преобразования получим

$$Q = \min_{\omega_\mu \in \Omega} \sum_{\mu=1}^{N} \left\{ \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\Theta_\mu) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\Theta_\mu) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\Theta_\mu) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\Theta_\mu) \right]^2 \right\} =$$

$$= \min_{\omega_\mu \in \Omega} \left\langle \left\{ \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\Theta_1) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\Theta_1) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\Theta_1) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\Theta_1 \right]^2 \right\} + \right.$$

$$+ \left\{ \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\Theta_2) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\Theta_2) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\Theta_2) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\Theta_2) \right]^2 \right\} +$$

$$\left. + \left\{ \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \cos(i\Theta_N) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{k} A_i \sin(i\Theta_N) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \cos(i\Theta_N) \right]^2 - \left[\sum_{i=0}^{k} B_i \sin(i\Theta_N \right]^2 \right\} \right\rangle . (14)$$

Расписав все слагаемые функционала (14) и осуществив ряд преобразований, представим функционал в матричной форме

$$Q = \min_{x \in R} \{ x' C x \} , \qquad (15)$$

где

$$C = \left[\begin{array}{c:c} c_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & c_{22} \end{array} \right] ; \; x = [A_0, A_1, \cdots, A_k, B_0, B_1, \cdots, B_k]' ;$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} \sum_{\mu=1}^{N} 1 & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(2\Theta_\mu T) & \cdots & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(k\Theta_\mu) \\ \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} 1 & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) & \cdots & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-2)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-1)\Theta_\mu] \\ \sum_{\mu=1}^{N} \cos(2\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} 1 & \cdots & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-3)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-2)\Theta_\mu] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-2)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-3)\Theta_\mu] & \cdots & \sum_{\mu=1}^{N} 1 & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) \\ \sum_{\mu=1}^{N} \cos(k\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum_{\mu=1}^{N} \cos[(k-2)\Theta_\mu] & \cdots & \sum_{\mu=1}^{N} \cos(1\Theta_\mu) & \sum_{\mu=1}^{N} 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{22}=-1\cdot\begin{bmatrix}\sum\limits_{\mu=1}^{N}1 & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(2\Theta_\mu T) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(k\Theta_\mu)\\ \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}1 & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-2)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-1)\Theta_\mu]\\ \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(2\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}1 & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-3)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-2)\Theta_\mu]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-2)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-3)\Theta_\mu] & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{N}1 & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu)\\ \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(k\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-1)\Theta_\mu] & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos[(k-2)\Theta_\mu] & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{N}\cos(1\Theta_\mu) & \sum\limits_{\mu=1}^{N}1\end{bmatrix}$$

$C - 2(k+1)\times 2(k+1)$ – мерная симметричная квазидиагональная матрица; $x' - 2(k+1)$ – мерный транспонированный составной вектор искомых коэффициентов; $c_{ii} - (:+1)\times(k+1)$ – мерные диагональные квадратные клетки матрицы C; $\Theta_\mu = \omega_\mu T$; T – период квантования сигнала по времени.

Рассмотрим систему ограничений на фазовый сдвиг ДКФ. Преобразуем комплексную передаточную функцию ДКФ (9) и получим её реальную и мнимую части

$$\mathrm{Re}(\omega)=\frac{\left[\sum\limits_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta)\right]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta)\right]+\left[\sum\limits_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta)\right]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta)\right]}{\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta)\right]^2+\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta)\right]^2},$$

$$\mathrm{Im}(\omega)=\frac{\left[\sum\limits_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta)\right]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta)\right]-\left[\sum\limits_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta)\right]\cdot\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta)\right]}{\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta)\right]^2+\left[\sum\limits_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta)\right]^2},\quad(16)$$

$$\Theta=\omega T.$$

Подставив выражения (16) в систему неравенств (3), (4), после преобразований получим

$$\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]-\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]\right\}-$$

$$-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]+\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta_g)\right]\right\}\le 0,\quad g=\overline{1,m_1},\ (17)$$

$$-\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]-\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]\right\}+$$

$$+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\left\{\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\cos(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\cos(i\Theta_g)\right]+\left[\sum_{i=0}^{k}A_i\sin(i\Theta_g)\right]\cdot\left[\sum_{i=0}^{k}B_i\sin(i\Theta_g)\right]\right\}\le 0,\quad g=\overline{1,m_2}.\ (18)$$

В результате ряда преобразований, системы неравенств (17) и (18) приводим соответственно к виду

$$\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}A_\gamma B_i\{\sin[(\gamma-i)\Theta_g]-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\le 0,\quad g=\overline{1,m_1},$$

$$\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}A_\gamma B_i\{-\sin[(\gamma-i)\Theta_g]+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\le 0,\quad \Theta_g=\omega_g T,\ g=\overline{1,m_2}.\ (19)$$

Дополняя систему неравенств (19) выражениями (6)-(8) получим полную систему ограничений

$$\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}A_\gamma B_i\{\sin[(\gamma-i)\Theta_g]-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\le 0,$$

$$\Theta_g=\omega_g T,\quad g=\overline{1,m_1},$$

$$\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}A_\gamma B_i\{-\sin[(\gamma-i)\Theta_g]+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\le 0,$$

$$g=\overline{1,m_2},\quad(20)$$

$$\sum_{i=0}^{k}A_i-k_0\sum_{i=0}^{k}B_i\le 0,$$

$$-\sum_{i=0}^{k}A_i+k_0\sum_{i=0}^{k}B_i\le 0,$$

$$B_2+B_1+B_0>0,$$

$$B_2-B_0>0,$$

$$B_2-B_1+B_0>0,$$

где m_1, m_2 – число точек ограничений на сдвиг фаз «сверху» и «снизу» соответственно; A_γ, B_i – коэффициенты ДКФ; k – порядок ДКФ; T- период прерывания сигнала по времени: $a(\omega_g), b(\omega_g)$ – величина ограничений на сдвиг фазы «сверху» и «снизу» соответственно.

Ограничения на фазовый сдвиг ДКФ являются нелинейными. Осуществим линеаризацию ограничений на сдвиг фаз путем разложения их в ряд Тейлора с учетом первых двух членов ряда. Таким образом, для первых двух неравенств (20) получим

$$F_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial A_i}(A_i-\overset{0}{A}_i)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial B_i}(B_i-\overset{0}{B}_i)\le 0,\quad g=\overline{1,m_1},$$

$$F_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial A_i}(A_i-\overset{0}{A}_i)+ +\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial B_i}(B_i-\overset{0}{B}_i)\le 0,\quad g=\overline{1,m_2}, \tag{21}$$

где

$$F_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)= =\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\overset{0}{A}_\gamma\overset{0}{B}_i\{\sin[(\gamma-i)\Theta_g]-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\},$$

$$\Theta_g=\omega_g T$$

$$g=\overline{1,m_1},$$

$$F_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)= =\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\overset{0}{A}_\gamma\overset{0}{B}_i\{-\sin[(\gamma-i)\Theta_g]+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\},$$

$$g=\overline{1,m_2}. \tag{22}$$

Для приведения системы неравенств (21) к каноническому виду запишем ее в следующем виде

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial A_i}A_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial B_i}B_i\le-\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i\overset{0}{B}_i,g),\quad g=\overline{1,m_1},$$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial A_i}A_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial B_i}B_i\le-\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i\overset{0}{B}_i,g),\quad g=\overline{1,m_2}, \tag{23}$$

где

$$\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=-F_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial \overset{0}{A}_i}\overset{0}{A}_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial \overset{0}{B}_i}\overset{0}{B}_i,$$

$$g=\overline{1,m_1},$$

$$\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=-F_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial \overset{0}{A}_i}\overset{0}{A}_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial \overset{0}{B}_i}\overset{0}{B}_i,$$

$$g=\overline{1,m_2}.$$

Для получения численных значений ограничений в (23), зададимся значениями корней (нулей и полюсов) ДКФ внутри окружности единичного радиуса z- плоскости и представим их в виде полиномов для числителя и знаменателя ДКФ

$$\prod_{i=0}^{k}(z\pm z_i)=\overset{0}{A}_0\pm\overset{0}{A}_1 z\pm\overset{0}{A}_2 z^2,$$

$$\prod_{i=0}^{k}(z\pm z_i^*)=\overset{0}{B}_0\pm\overset{0}{B}_1 z\pm\overset{0}{B}_2 z^2, \tag{24}$$

где z_i и z_i^* - нули и полюса передаточной функции ДКФ соответственно.

Полученные из (24) значения коэффициентов $\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i$, при подстановке в выражения $\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)$, $\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)$, дают численные значения правой части неравенств. Выражения частных производных под знаком суммы в системе неравенств (23) имеют вид

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{\sin[(p-i)\Theta_g]-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},$$

$$g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{\sin[(i-p)\Theta_g]-\mathrm{tg}\,a(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},$$

$$g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{-\sin[(p-i)\Theta_g]+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},$$

$$g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{-\sin[(i-p)\Theta_g]+\mathrm{tg}\,b(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},$$

$$g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k}, \tag{26}$$

где $\Theta_g=\omega_g T$.

Таким образом, полную систему неравенств получаем при замене в системе неравенств (20) нелинейных ограничений выражениями (22), (23) с учетом (25), (26). Тогда она в развернутой форме по числу точек ограничений m_1, m_2 примет вид

$$\frac{\partial F_1(1)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_1(1)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_1(1)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_1(1)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_1(1)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_1(1)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,1),$$

$$\frac{\partial F_1(2)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_1(2)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_1(2)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_1(2)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_1(2)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_1(2)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,2),$$

$$\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,m_1),$$

$$\frac{\partial F_2(1)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_2(1)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_2(1)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_2(1)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_2(1)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_2(1)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,1),$$

$$\frac{\partial F_2(2)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_2(2)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_2(2)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_2(2)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_2(2)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_2(2)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,2),$$

$$\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_0}A_0+\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_1}A_1+\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_2}A_2+\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_0}B_0+ +\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_1}B_1+\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_2}B_2\le\bar{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,m_2),$$

$$A_0+A_1+A_2-k_0B_0-k_0B_1-k_0B_2\le 0,$$

$$-A_0-A_1-A_2+k_0B_0+k_0B_1+k_0B_2\le 0,$$

$$0+0+0-B_0-B_1-B_2\le\ell,$$

$$0+0+0+B_0+0-B_2\le\ell,$$

$$0+0+0-B_0+B_1-B_2\le\ell, \tag{27}$$

где

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{\sin[(p-i)\Theta_g]-\operatorname{tg}a(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{\sin[(i-p)\Theta_g]-\operatorname{tg}a(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{-\sin[(p-i)\Theta_g]+\operatorname{tg}b(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{-\sin[(i-p)\Theta_g]+\operatorname{tg}b(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\overline{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=-F_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial\overset{0}{A}_i}\overset{0}{A}_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_1}{\partial\overset{0}{B}_i}\overset{0}{B}_i\ ,\ g=\overline{1,m_1}\ ,$$

$$\overline{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=-F_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial\overset{0}{A}_i}\overset{0}{A}_i+\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial F_2}{\partial\overset{0}{B}_i}\overset{0}{B}_i\ ,\ g=\overline{1,m_2}\ ,$$

$$F_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=\sum_{\gamma=0}^{k}\ \sum_{i=0}^{k}\overset{0}{A}_\gamma\overset{0}{B}_i\{\sin[(\gamma-i)\Theta_g]-\operatorname{tg}a(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\ ,\ g=\overline{1,m_1}\ ,$$

$$F_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,g)=\sum_{\gamma=0}^{k}\ \sum_{i=0}^{k}\overset{0}{A}_\gamma\overset{0}{B}_i\{-\sin[(\gamma-i)\Theta_g]+\operatorname{tg}b(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\}\ ,\ g=\overline{1,m_2}\ ,$$

$\Theta_g=\omega_g T$; $\ell-$ бесконечно малая величина близкая к нулю.

Систему неравенств (27) можно представить в виде матричного неравенства

$$A\cdot x\le b, \tag{28}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1(1)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_1(1)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_1(1)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_1(1)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_1(1)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_1(1)}{\partial B_2}\\
\frac{\partial F_1(2)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_1(2)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_1(2)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_1(2)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_1(2)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_1(2)}{\partial B_2}\\
--- & --- & --- & --- & --- & ---\\
\frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_1(m_1)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_1(m_1)}{\partial B_2}\\
\frac{\partial F_2(1)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_2(1)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_2(1)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_2(1)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_2(1)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_2(1)}{\partial B_2}\\
\frac{\partial F_2(2)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_2(2)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_2(2)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_2(2)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_2(2)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_2(2)}{\partial B_2}\\
--- & --- & --- & --- & --- & ---\\
\frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_0} & \frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_1} & \frac{\partial F_2(m_2)}{\partial A_2} & \frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_0} & \frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_1} & \frac{\partial F_2(m_2)}{\partial B_2}\\
1 & 1 & 1 & -k_0 & -k_0 & -k_0\\
-1 & -1 & -1 & k_0 & k_0 & k_0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix};x=\begin{bmatrix}A_0\\A_1\\A_2\\B_0\\B_1\\B_2\end{bmatrix};b=\begin{bmatrix}
\overline{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,1)\\
\overline{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,2)\\
\vdots\\
\overline{F}_1(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,m_1)\\
\overline{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,1)\\
\overline{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,2)\\
\vdots\\
\overline{F}_2(\overset{0}{A}_i,\overset{0}{B}_i,m_2)\\
0\\
0\\
\ell\\
\ell\\
\ell
\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{\sin[(p-i)\Theta_g]-\operatorname{tg}a(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_1(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{\sin[(i-p)\Theta_g]-\operatorname{tg}a(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_1},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial A_p}=\sum_{i=0}^{k}B_i\{-\sin[(p-i)\Theta_g]+\operatorname{tg}b(\omega_g)\cdot\cos[(p-i)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\frac{\partial F_2(g)}{\partial B_p}=\sum_{i=0}^{k}A_i\{-\sin[(i-p)\Theta_g]+\operatorname{tg}b(\omega_g)\cdot\cos[(i-p)\Theta_g]\},\quad g=\overline{1,m_2},\quad p=\overline{0,k},$$

$$\overline{F_1}(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) = -F_1(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F_1}{\partial \overset{0}{A_i}} \overset{0}{A_i} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F_1}{\partial \overset{0}{B_i}} \overset{0}{B_i} ,$$

$$g = \overline{1, m_1} ,$$

$$\overline{F_2}(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) = -F_2(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F_2}{\partial \overset{0}{A_i}} \overset{0}{A_i} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial F_2}{\partial \overset{0}{B_i}} \overset{0}{B_i} ,$$

$$g = \overline{1, m_2} ,$$

$$F_1(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) =$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \overset{0}{A_\gamma}\overset{0}{B_i}\{\sin[(\gamma-i)\Theta_g] - \operatorname{tg} a(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\} \le 0,$$

$$g = \overline{1, m_1} ,$$

$$F_2(\overset{0}{A_i},\overset{0}{B_i},g) =$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \overset{0}{A_\gamma}\overset{0}{B_i}\{-\sin[(\gamma-i)\Theta_g] + \operatorname{tg} b(\omega_g)\cdot\cos[(\gamma-i)\Theta_g]\} \le 0,$$

$$g = \overline{1, m_2} ,$$

$\Theta_g = \omega_g T$; $\ell -$ бесконечно малая величина близкая к нулю;

$A-(m_1+m_2+5)\times(2k+2)-$ мерная блочная матрица; $x-(2k+2)-$ мерный вектор искомых коэффициентов ДКФ; $b-(m_1+m_2+5)-$ мерный составной вектор.

Из рассмотрения полученных выражений следует, что задача синтеза представляющая собой квадратичную функцию цели (15) и систему (m_1+m_2+5) линейных матричных неравенств (28) может быть решена методом квадратичного программирования.

Прямая задача имеет вид (15), (28) или в общем виде

$$\min\{\, x'Cx \mid \quad Ax \le b\} , \tag{29}$$

где $A-$ матрица ограничений размера $m\times n$; $C-$ симметричная строго положительно определенная $n\times n-$ мерная матрица; $x-n-$ мерный искомый вектор.

В силу предположений о функции цели и ограничениях задача (29) имеет единственное решение. Условия Куна - Такера имеют вид

$$\begin{gathered} Ax + y = b , \\ 2Cx + A'u = -p , \\ u \ge 0, \quad y \ge 0, \\ u'y = 0 . \end{gathered} \tag{30}$$

Поскольку матрица C положительно определена, то существует обратная матрица C^{-1} и условие $2Cx + A'u = -p$ из (30) можно разрешить относительно x

$$x(u) = -\frac{1}{2}C^{-1}(A'u + p) , \tag{31}$$

После подстановки (31) в (30) условия Куна – Такера примут вид

$$\begin{gathered} 2Gu - y = -h , \\ u \ge 0, \quad y \ge 0 , \\ u'y = 0 , \end{gathered} \tag{32}$$

Где $h = \frac{1}{2}AC^{-1}p + b$, $G = \frac{1}{4}AC^{-1}A'$.

Последние условия (32) являются условиями Куна – Такера для двойственной задачи по отношению к прямой задаче (29). Двойственной задачей является задача вида

$$\min\{\varphi(u) = h'u + u'Gu \mid \quad u \ge 0\} .$$

Итерационный процесс решения двойственной задачи описывается формулами

$$u_i^{p+1} = \max\{0, \quad w_i^{p+1}\} ,$$

где

$$w_i^{P+1} = -\frac{1}{g_{ii}}\left(\sum_{J=1}^{i-1} g_{ij}u_j^{p+1} + \frac{h_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{\bar{m}} g_{ij}u_j^{p}\right),$$

$p-$ номер итерации; $g_{ij}-$ элементы матрицы $G = \frac{1}{4}AC^{-1}A'$; h_i- элементы вектора h ; $C^{-1}-$ обращенная матрица C ; u_j- элементы вектора u , являющегося решением двойственной задачи; $\bar{m}-$ число диагональных элементов матрицы G .

Решение задачи начинается с произвольно допустимой точки $u^0 \ge 0$.

На каждом шаге итерационного процесса производится оценка точности вычисления вектора u по формуле

$$u_i^{p+1} - u_i^p \le \rho ,$$

где $u_i^{p+1}-$ элементы вектора u настоящего итерационного шага; u_i^p- элементы вектора u предыдущего итерационного шага; $\rho-$ малое число, определяющее точность решения задачи. Для рассматриваемого класса задач $\rho = 0.008 \div 0.015$.

По найденному решению двойственной задачи, получаем вектор искомых коэффициентов в соответствии с формулой (31)

$$x(u) = -\frac{1}{2}C^{-1}(A'u + p) .$$

Решение представляет собой вектор, компонентами которого являются коэффициенты $z-$ передаточной функции синтезируемого ДКФ.

Полученные значения коэффициентов $z-$передаточной функции ДКФ доставляют минимум назначенному функционалу при выполнении заданных ограничений.

Структурная схема программы машинного синтеза ДКФ представлена на рис. 1.

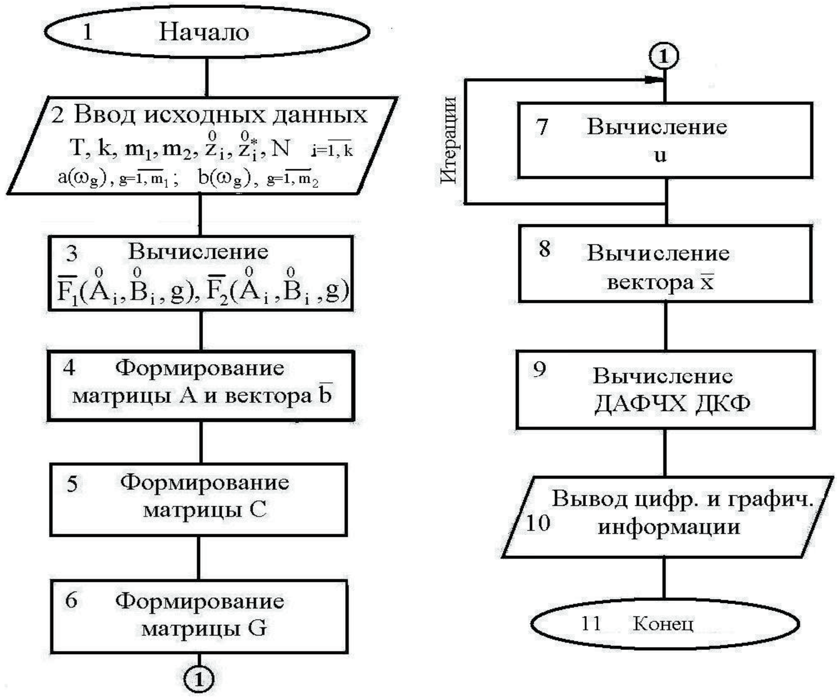

Рис. 1. Структурная схема программы синтеза ДКФ

При необходимости синтеза ДКФ произвольного порядка, следует записать соответствующую систему неравенств вместо системы неравенств (8).

4. Выводы

1. Предложен метод синтеза дискретных корректирующих фильтров на основе математического программирования.

2. Описана математическая модель задачи синтеза линейных дискретных рекурсивных корректирующих фильтров минимального порядка в терминах нелинейного программирования. Функция цели и часть системы ограничений, выраженные через коэффициенты передаточной функции ДКФ, существенно нелинейные.

3. Проведена линеаризация нелинейных ограничений, что позволило свести задачу синтеза к задаче квадратичного программирования. Последняя является на порядок более эффективной по времени синтеза чем метод скользящего допуска, отличающийся свойством насыщения функции цели в процессе синтеза для рассматриваемого класса задач.

4. После решения двойственной задачи вычисляется вектор искомых коэффициентов рекурсивного ДКФ минимального порядка, характеристики которого отвечают предъявляемым требованиям.

Литература

1. Зак Ю.А. Математические модели схем компромисса в многокритериальных задачах математического программирования с размытыми ограничениями [Текст] / Ю.А. Зак // Кибернетика и системный анализ. – 2010. - № 5. – С. 80-98.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов Ф.С. Нечеткие цели и сети [Текст] / В.В. Борисов, В.В. Круглов, Ф.С. Федулов. – М.: Горячая линия, Телеком, 2007. – 284 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация [Текст] / Ю.П. Зайченко. – Киев: Вища шк., 1991. – 191с.
4. Филаретов В.Ф. Разработка и исследование синтеза высокоточных систем управления сложными динамическими объектами в условиях параметрической неопределенности [Текст] / В.Ф. Филаретов // Проблемы управления. – 2006. № 4. – С. 9 – 19.