Розглядаються теоретичні аспекти застосування методів просторового гармонічного аналізу щодо аналітичного представлення за допомогою циліндричних гармонік скалярного потенціалу поля, утвореного зарядами, які розташовані на циліндричній поверхні кінцевої довжини

Ключові слова: просторовий гармонічний аналіз, циліндрична гармоніка, потенціал

Рассматриваются теоретические аспекты применения методов пространственного гармонического анализа для аналитического представления с помощью цилиндрических гармоник скалярного потенциала поля, созданного зарядами, распределенными по поверхности цилиндра конечной длины

Ключевые слова: пространственный гармонический анализ, цилиндрическая гармоника, потенциал

The theoretical aspects of application of methods of a spatial harmonic analysis for analytical solution with the help of cylindrical harmonics of a scalar potential of a field created by charges, distributed on a surface of a finite-length cylinder, are considered

Key words: spatial harmonic analysis, cylindrical harmonic, potential

УДК 621.317.4

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ЗАРЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.В. Гетьман
Кандидат технических наук*

А.В. Константинов
Аспирант*
*Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины
ул. Индустриальная, 19, г. Харьков, Украина, 61109
Контактный тел.: (0572) 99-11-75/Факс: 99-21-62
E-mail:ntcmto@ukrpost.ua

1. Введение

Построение аналитических моделей магнитного поля различных технических объектов (ТО) остается актуальной задачей электротехники, несмотря на многообразие численных методов расчета магнитных характеристик ТО. Практический интерес к аналитическим моделям обусловлен необходимостью анализа ТО по целому набору его параметров. Нелинейность взаимосвязей между параметрами ТО существенно усложняет, а порой делает невозможным проведения комплексного анализа конструктивных, энергетических и магнитных параметров ТО, только на основе результатов численного расчета. Такое ограничение не свойственно аналитическим моделям ТО, однако практическое применение последних связано с усложненным математическим аппаратом.

На сегодняшний день одним из ограничений практического применения аналитических моделей магнитного поля ТО остается недостаточная проработка их математического аппарата в плане применения к сложной геометрии электротехнических изделий. Поскольку замена реальной геометрии объекта на упрощенное аналитическое представление негативно сказывается на точности результатов применения метода, то целесообразно использовать аналитическое представление. Поэтому адаптация существующих и разработка новых методов пространственного гармонического анализа (ПГА) магнитного поля призваны снять ограничения, накладываемые на форму граничной поверхности ТО. Поскольку для широкого класса ТО граничной поверхностью является поверхность цилиндра, то в этих случаях рационально использовать методы цилиндрического гармонического анализа магнитного поля.

Целью работы является построение аналитической модели на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала поля, создаваемого распределенным по поверхности цилиндра зарядом.

2. Поле двух параллельных заряженных абсолютно проводящих пластин

Найдем аналитическое выражение для потенциала двух круглых тонких противоположно заряженных пластин. Пусть R - радиус пластин, h – расстояние между ними, q и $-q$ – заряды пластин. Введем цилиндрическую систему координат с центром, совпадающим с осью пластин, и расположенным посередине между ними (рис. 1).

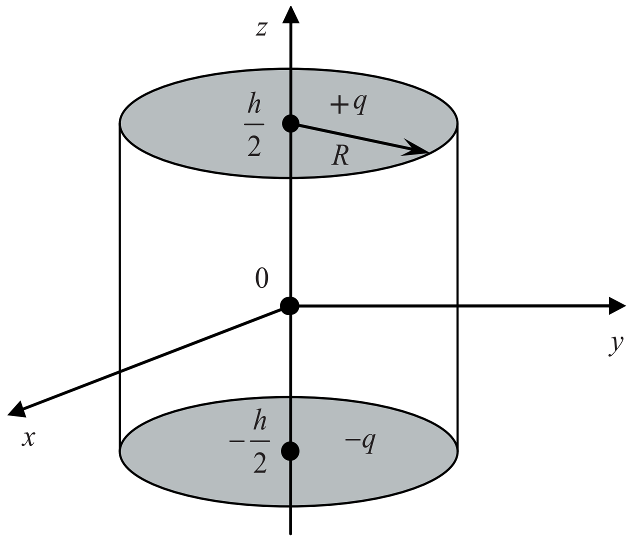

Рис. 1. Две параллельные заряженные круглые пластины

Распределение потенциала в области между пластинами подчиняется уравнению Лапласа [1]. Очевидно, что потенциал является нечетной функцией по z, и равен нулю в начале координат. Приходим к следующим решениям:

$$U(r,z)=\int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda r)\operatorname{sh}(\lambda z)d\lambda \tag{1}$$

Здесь J_0 –функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ – произвольный параметр, $A(\lambda)$ – неизвестная функция.

Для решения задачи воспользуемся условием проводимости. На абсолютно проводящих пластинах заряд стремится распределиться таким образом, чтобы поверхность пластин была эквипотенциальной

$$\int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda r)\operatorname{sh}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)d\lambda=V,\ 0\le r\le R \tag{2}$$

где V – некоторая константа. Применяя тождество [2]:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin kx}{x}J_0(\rho x)dx=1, \tag{3}$$

найдем $A(\lambda)$:

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}V\frac{\sin\lambda R}{\lambda\operatorname{sh}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)}. \tag{4}$$

Получаем:

$$U(r,z)=\frac{2}{\pi}V\int_0^\infty\frac{\sin(\lambda R)J_0(\lambda r)\operatorname{sh}(\lambda z)}{\lambda\operatorname{sh}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)}d\lambda. \tag{5}$$

Для вычисления V воспользуемся тем, что вблизи поверхности проводника нормальная составляющая напряженности поля равна поверхностной плотности заряда в этой точке:

$$\sigma\left(r,\frac{h}{2}\right)=-\frac{\partial U\left(r,\frac{h}{2}\right)}{\partial z}. \tag{6}$$

Тогда как суммарный заряд пластины равен:

$$q=2\pi\int_0^R r\cdot\sigma\left(r,\frac{h}{2}\right)dr. \tag{7}$$

Из выражений (5-7) находим V:

$$V=-\frac{q}{4R}\frac{1}{\int_0^\infty\sin(\lambda R)\lambda^{-1}\operatorname{sh}^{-1}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)J_1(\lambda R)\operatorname{ch}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)d\lambda}, \tag{8}$$

и, в итоге, получаем выражение для потенциала системы двух пластин:

$$U(r,z)=-\frac{q}{2\pi R}\frac{\int_0^\infty\sin(\lambda R)\lambda^{-1}\operatorname{sh}^{-1}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)J_0(\lambda r)\operatorname{sh}(\lambda z)d\lambda}{\int_0^\infty\sin(\lambda R)\lambda^{-1}\operatorname{sh}^{-1}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)J_1(\lambda R)\operatorname{ch}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)d\lambda}. \tag{9}$$

Характер распределения потенциала в плоскости XOZ показан на рис. 2, расчет для которого был проведен на основании (9), который был проверен численным методом.

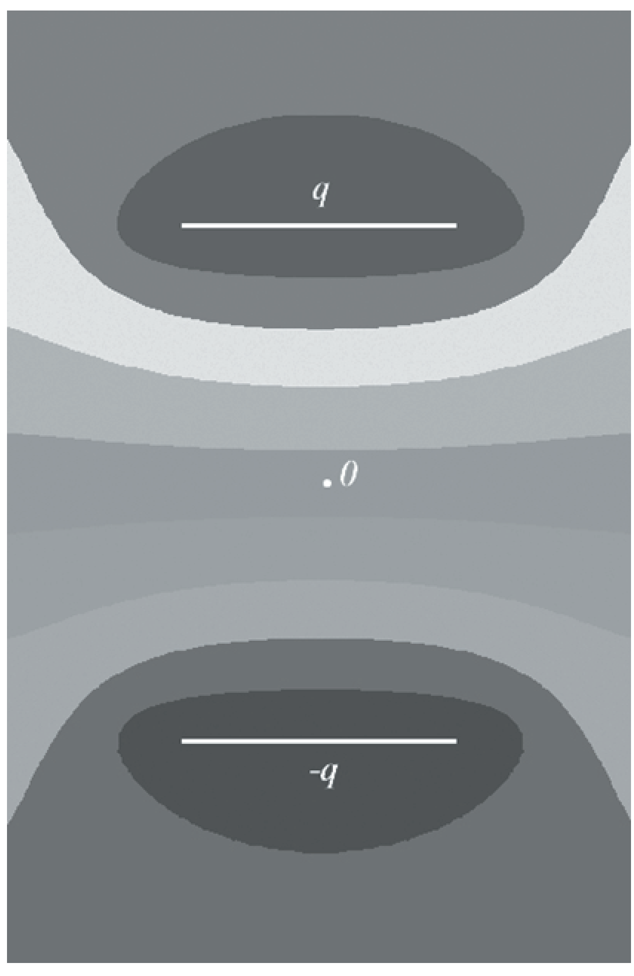

Рис. 2. Потенциал двух заряженных пластин

3. Поле заряженной боковой цилиндрической поверхности

Теперь вычислим потенциал, создаваемый заряженной цилиндрической поверхностью. Пусть R - радиус цилиндрической поверхности, h – ее высота. Введем цилиндрическую систему координат с центром, совпадающим с осью поверхности, и расположенным посередине ее высоты (рис. 3). Пусть, также, потенциал поля на боковой поверхности линейно зависит от z и равен ±V при z = ±h/2, где V – может быть взят из (8).

Распределение потенциала в области, ограниченной данной цилиндрической поверхностью, подчиняется уравнению Лапласа. Выражение для потенциала для этой области можно также представить в виде:

$$U(r,z)=\int_0^{\infty} B(\lambda) I_0(\lambda r)\sin(\lambda z)\,d\lambda \tag{10}$$

Для решения задачи воспользуемся описанными выше условиями.

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) I_0(\lambda R)\sin(\lambda z)\,d\lambda=\frac{2V}{H}\cdot z,\quad -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \tag{11}$$

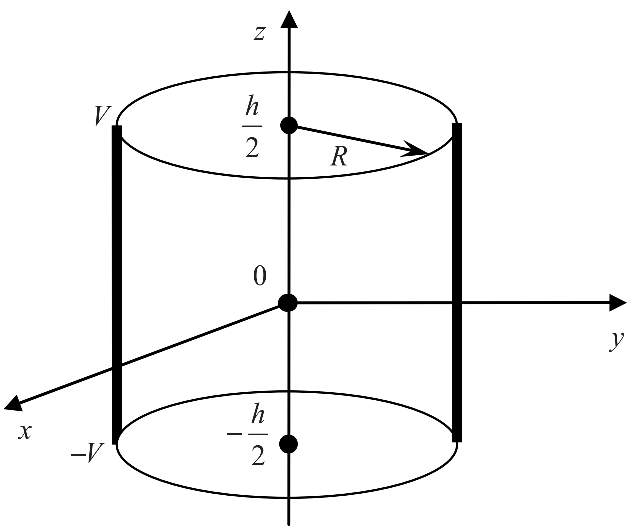

Рис. 3. Геометрия заряженной боковой цилиндрической поверхности

Для нахождения B(λ) воспользуемся выражением:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda R)\sin(\lambda z)\,d\lambda=\frac{z}{R}, \tag{12}$$

Тогда:

$$B(\lambda)=\frac{2R}{H}V\frac{J_1(\lambda R)}{\lambda I_0(\lambda R)} \tag{13}$$

Окончательно, для потенциала заряженной боковой поверхности получаем выражение:

$$U(r,z)=\frac{2R}{H}\cdot V\int_0^{\infty}\frac{J_1(\lambda R)}{\lambda I_0(\lambda R)} I_0(\lambda r)\sin(\lambda z)\,d\lambda \tag{14}$$

На рис. 4 показано распределение поля внутри заряженной боковой поверхности цилиндра рассчитанное на основании (14).

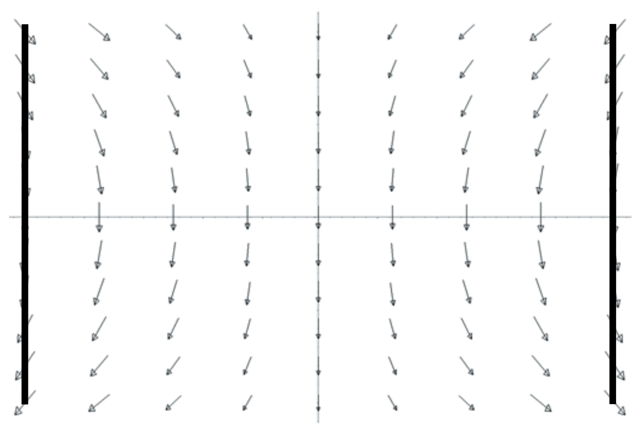

Рис. 4. Поле заряженной боковой цилиндрической поверхности

4. Выводы

Разработанные аналитические модели поля на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала могут быть использованы при построении модели намагниченности цилиндров конечной длины, в частности, для построения модели равномерно намагниченного вдоль оси симметрии цилиндра.

Литература

1. Smythe W. Static and Dynamic Electricity. -ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. – 703 с.