

УДК 532.5

РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Ю. В. Бразалук

Научный сотрудник

Кафедра аэрогидромеханики и
энергомассопереносаДнепропетровский национальный
университет им. Олеса Гончарапр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск,
Украина, 49010

E-mail.: brazaluk_jv@ukr.net

Метод граничних елементів застосовано для чисельного розв'язання задачі про обтікання ансамблю об'єктів плоским стаціонарним потоком надтекучої рідини. Досліджено залежність сил гідродинамічної взаємодії від відстані між обтічними об'єктами. Виявлена стійкість регулярно розташованого ансамблю об'єктів щодо поздовжніх збурень і нестійкість щодо поперечних

Ключові слова: надтекуча рідина, криогенна рідина, гідродинамічна взаємодія, метод граничних елементів

Метод граничных элементов применен для численного решения задачи об обтекании ансамбля объектов плоским стационарным потоком сверхтекучей жидкости. Исследована зависимость сил гидродинамического взаимодействия от расстояния между обтекаемыми объектами. Обнаружена устойчивость регулярно расположенного ансамбля объектов относительно продольных возмущений и неустойчивость относительно поперечных

Ключевые слова: сверхтекучая жидкость, криогенная жидкость, гидродинамическое взаимодействие, метод граничных элементов

1. Введение

Исследования в области физики низких температур, начавшиеся в первой четверти двадцатого века, породили достаточно широкий спектр уникальных технологий, связанных, прежде всего, со сверхтекучестью и сверхпроводимостью. Ограниченные возможности экспериментального исследования таких процессов заставляют при разработке соответствующих технологий прибегать к использованию методов математического и численного моделирования. Таким образом, развитие математических моделей и численных подходов для различных процессов, протекающих при температурах, близких к абсолютному нулю, является не просто актуальным, но и существенно необходимым. Настоящая работа посвящена анализу гидродинамических эффектов в сверхтекучей жидкости, то есть, безусловно, относится к рассматриваемой области, и сделанный выше вывод для нее также справедлив.

2. Постановка проблемы

Общая постановка задачи и ее актуальность. В ряде современных технологических решений и экспериментальных исследовательских установок, работающих при температурах, близких к абсолютному нулю, сверхтекучая жидкость движется в областях сложной геометрической формы. Другим малоизученным процессом в криогенных жидкостях является многофаз-

ное течение сверхтекучей жидкости. Изучение гидродинамических особенностей таких течений является предметом рассмотрения настоящей работы.

Общие физическая и математическая модели течения сверхтекучей жидкости были предложены Л. Д. Ландау [1] и в настоящее время хорошо известны. Согласно этой теории, движение сверхтекучей жидкости является суперпозицией двух течений, одно из которых является течением жидкости, полностью лишенной вязкости, а второе – течение обычной вязкой жидкости. В зависимости от характера течения и температуры жидкости в потоке доминирует тот или иной механизм, например, при поступательном движении жидкости или тел, в нее помещенных, течение может считаться невязким. В этом случае можно ожидать, что возникшее течение будет не только потенциальным, но и бесциркуляционным. Подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже. Условия невязкого, бесциркуляционного обтекания оказываются достаточно сильными, особенно в плоском случае, вследствие чего такое течение будет обладать целым рядом гидродинамических особенностей, например, доминирующим силовым эффектом будет сила гидродинамического взаимодействия.

Таким образом, в силу вышесказанного актуальной представляется задача разработки математической модели процессов гидродинамического взаимодействия в поступательных на бесконечности течениях сверхтекучей жидкости и развития соответствующих численных методов. Учитывая, что потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости описывается

уравнением Лапласа, а рассматриваемая задача предполагает области сложной геометрической формы, наиболее эффективными в данном случае представляются методы вычислительной теории потенциала, в частности, метод граничных элементов.

3. Литературный обзор

Как уже отмечалось выше, теория движения сверхтекучих жидкостей была разработана Л. Д. Ландау [1] и стимулировала обширные исследования в данной области. Наличие специализированных монографий [2, 3] избавляют от необходимости приводить здесь соответствующие обзоры. Задача гидродинамического взаимодействия в потенциальном потоке относится к классическим задачам теоретической гидромеханики, она была рассмотрена в многочисленных исследованиях, обзор которых можно найти в единственной монографии [4], посвященной данному вопросу. Проблема гидродинамического взаимодействия, как правило, связана с формулировкой задачи в областях сложной геометрической формы, с трудом поддающихся численному расчету даже в плоском случае. В предыдущих публикациях автора настоящей работы [5 – 8] была показана эффективность применения методов граничных элементов и комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения задач гидродинамического взаимодействия. Насколько известно автору, проблема гидродинамического взаимодействия в сверхтекучем потоке, а тем более в многофазном течении сверхтекучей жидкости ранее не рассматривалась.

Как очевидно следует из вышесказанного, плоское движение сверхтекучей жидкости в многосвязных областях обладает рядом гидродинамических особенностей, некоторые из них позволяют существенно упростить математическую модель рассматриваемого процесса, но часть таких особенностей в настоящее время изучена недостаточно. К последним следует отнести эффекты гидродинамического взаимодействия в подобных потоках. Кроме того, проведение подобного исследования требует разработки высокоэффективного алгоритма численного расчета.

Таким образом, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: развитие упрощенной математической модели движения сверхтекучей жидкости в плоской многосвязной области, разработка методов численного расчета, эффективно применимых к предложенной математической модели, и проведение численного исследования эффектов гидродинамического взаимодействия в заданном классе течений.

4. Основная часть. Применение метода граничных элементов для расчета движения сверхтекучей жидкости в областях сложной геометрической формы

Формулировка задачи. В классической гидромеханике течение, в котором несущественны вязкие эффекты, часто полагают потенциальным, поскольку многие механизмы генерации завихренности встречается достаточно редко. При этом в классической гидромеха-

нике потенциальных течений возникает несколько парадоксов, самый известный из которых парадокс Даламбера [9, 10]. Наиболее интересны парадоксы идеальной жидкости в плоском случае, где они связаны с понятием циркуляции. Согласно общепринятой трактовке, данной Людвигом Прандтлем, влияние вязкости при внешнем обтекании сосредоточено в тонком пограничном слое, толщиной которого можно пренебречь, однако в пограничном слое формируются вихри, и в плоском случае их мерой является циркуляция. То есть, циркуляция является интегральной мерой влияния вязкой жидкости на плоский поток. В рассматриваемом в настоящей работе случае течения сверхтекучей жидкости вязкость отсутствует совсем, поэтому обтекание следует считать бесциркуляционным. Это не означает отсутствия парадоксов, связанных с циркуляцией и генерацией завихренности. Рассмотрим крыловый профиль, обтекаемый в общем случае под ненулевым углом атаки плоским потоком сверхтекучей жидкости. При потенциальном обтекании крылового профиля с нулевой циркуляцией на острой задней кромке возникает тангенциальный разрыв скоростей, то есть, с нее сходит вихревая пелена. Но согласно известным теорем гидродинамики идеальной жидкости [9, 10] генерация завихренности приводит к изменению циркуляции по обтекаемому контуру. Таким образом, получили противоречие. Разрешение данного противоречия требует учета вязкой составляющей течения криогенной жидкости, то есть, выходит за рамки рассматриваемых здесь физической и математической моделей, и соответственно, за рамки данной работы. Ограничимся тем, что в этой работе, не будут рассмотрены случаи обтекания плоским потоком профилей с острой задней кромкой.

Учитывая сделанные выше замечания, сформулируем рассматриваемую задачу в терминах потенциала скоростей в плоском случае

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_b \cup \Gamma_i} = V_{ni}, \tag{2}$$

с дополнительным условием

$$\gamma_i = \int_{\Gamma_i} V_t ds = 0, \tag{3}$$

где ϕ – потенциал скоростей, связанный со скоростью соотношением; $V = \text{grad} \phi$; Γ_b – внешняя граница области течения; Γ_i – гладкие контуры обтекаемых тел; V_{ni} в (2) – заданная функция, соответствующая нормальным скоростям твердых границ; γ_i – циркуляция по i -ому обтекаемому контуру; V_t – касательная скорость.

Граничноинтегральный аналог уравнения (5) имеет вид:

$$c(x_0, y_0) \phi(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} g(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} ds(x, y) - \int_{\Gamma} \phi(x, y) \frac{\partial g}{\partial n}(x, y, x_0, y_0) ds(x, y), \tag{4}$$

где g – фундаментальное решение уравнения Лапласа;

$$g(x,y,x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right), \quad (5)$$

$$c(x_0,y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0,y_0) \in D, \\ \frac{1}{2}, & (x_0,y_0) \in \Gamma, \\ 0, & (x_0,y_0) \notin D, (x_0,y_0) \notin \Gamma. \end{cases} \quad (6)$$

Для численного решения граничноинтегрального уравнения (4) применялся классический алгоритм метода граничных элементов [11, 12].

Определим силу, действующую на контур следующим образом:

$$\vec{F}_i = \int_{\Gamma_i} p \vec{n} ds, \quad (7)$$

где p – нормаль к контуру; p – давление, определяемое из интеграла Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gy = \text{const.} \quad (8)$$

5. Апробация результатов исследования

Алгоритм решения задачи. Сформулированная выше краевая задача Неймана для уравнения Лапласа относится к классическим задачам математической физики, однако она не поддается аналитическому решению из-за сложной геометрической формы области. Поэтому данная задача решалась численно. Наиболее эффективным для численного решения линейных эллиптических задач в областях сложной формы является метод граничных элементов, описанный выше.

Были проанализированы полученные результаты расчетов, по значениям которых были построены следующие графики

На рис. 1 представлены результаты расчетов силы гидродинамического взаимодействия двух эллиптических цилиндров гидродинамической конфигурации, показанной на рис. 2.

На рис. 1 кривая, обозначенная индексом 1, соответствует случаю обтекания двух эллиптических цилиндров, с одинаковыми параметрами $a=0,5$ и $b=0,35$; 2 – два эллиптических цилиндра с параметрами $a=0,75$ и $b=0,5$ для первого и $a=0,5$ и $b=0,35$ для второго; 3 два эллиптических цилиндра с параметрами $a=0,75$ и $b=0,75$ для первого и $a=0,5$ и $b=0,5$ для второго. (Здесь и далее расстояния и силы безразмерны).

Аналогичные результаты для бипланового расположения двух эллиптических цилиндров представлены на рис. 3.

На рис. 3 кривая обозначенная индексом 1, соответствует случаю обтекания эллиптических цилиндров, с одинаковыми параметрами $a=0,5$ и $b=0,35$; 2 – два эллиптических цилиндра с параметрами $a=0,75$ и

$b=0,5$ для первого и $a=0,5$ и $b=0,35$ для второго; 3 – два эллиптических цилиндра с параметрами $a=0,75$ и $b=0,75$ для первого и $a=0,5$ и $b=0,5$ для второго.

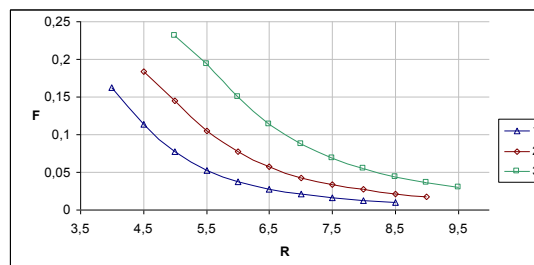


Рис. 1. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия F от расстояния между центрами двух эллиптических цилиндров R , в тандемном расположении

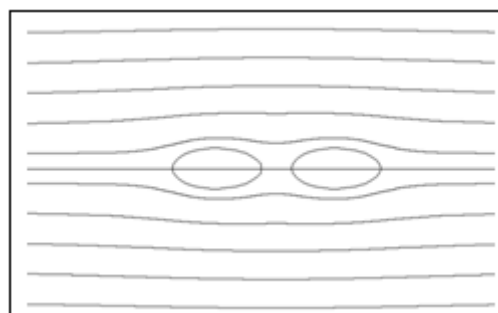


Рис. 2. Картина линий тока при обтекании пары эллиптических цилиндров в тандемном расположении. Соответствует графикам рис. 1

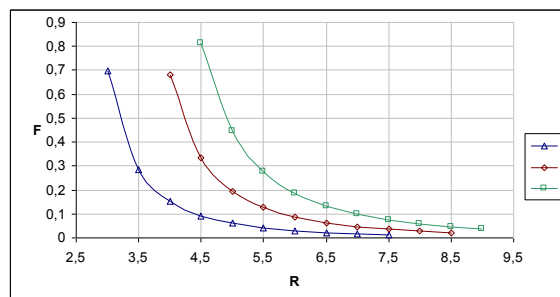


Рис. 3. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия F от расстояния между центрами двух эллиптических цилиндров R , расположенных в потоке по схеме биплан

Результаты расчетов силы гидродинамического взаимодействия для тандемного расположения двух круговых цилиндров представлены на рис. 4 и для бипланового расположения на рис. 5.

На рис. 4 кривая, обозначенная индексом 1, соответствует случаю обтекания двух круговых цилиндров, с одинаковыми радиусами $R=0,5$; 2 – два круговых цилиндра, с одинаковыми радиусами $R=1$; 3 – два круговых цилиндра с радиусами $R=1$ для первого $R=1,5$ для второго.

На рис. 5 кривая, обозначенная индексом 1, соответствует случаю обтекания круговых цилиндров, с одинаковыми радиусами $R=0,5$; 2 – два круговых цилиндра, с одинаковыми радиусами $R=1$; 3 – два

круговых цилиндра с радиусами $R=1$ для первого $R=1,5$ для второго.

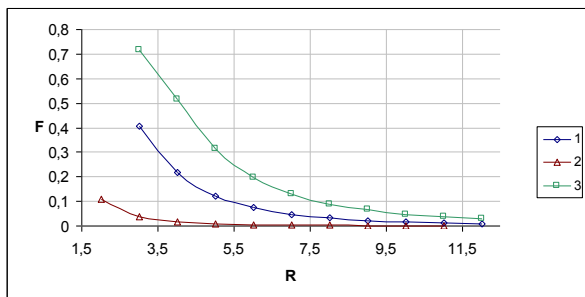


Рис. 4. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия F от расстояния между центрами двух круговых цилиндров R , в тандемном расположении

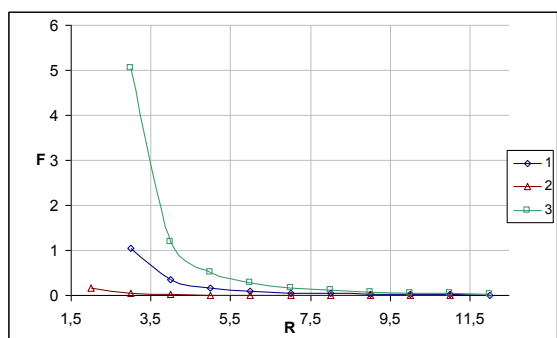


Рис. 5. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия F от расстояния между центрами двух круговых цилиндров R , расположенных в потоке по схеме биплан

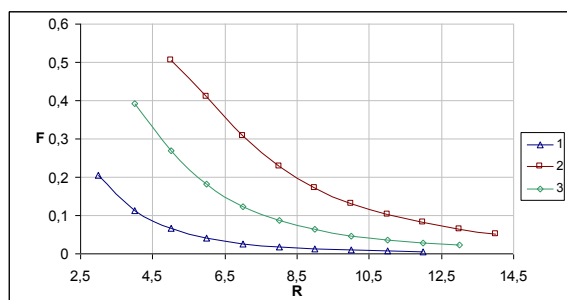
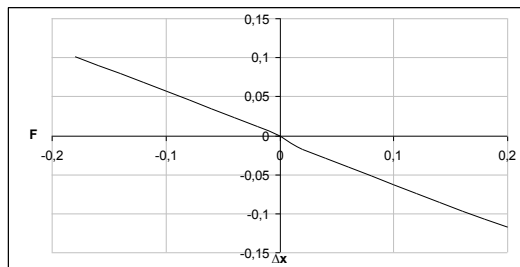


Рис. 6. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия от расстояния между центрами трех круговых цилиндров, в тандемном расположении

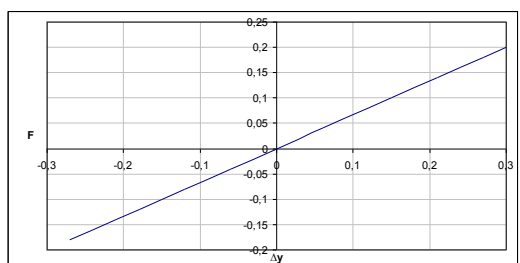
На рис. 6 кривая, обозначенная индексом 1, соответствует случаю обтекания трех круговых цилиндров, с одинаковыми радиусами $R=0,5$; 2 – три круговых цилиндра, с одинаковыми радиусами $R=1$; 3 – три круговых цилиндра с радиусами $R=1$ для первого и третьего тела $R=1,5$ для второго. (Расстояние между первым и вторым и вторым и третьим круговыми цилиндрами были одинаковыми).

Было рассмотрено обтекание регулярной структуры круговых цилиндров показанной на (рис. 8). В данном случае силы гидродинамического взаимодействия уравновешены. Была исследована устойчивость такой регулярной структуры круговых цилиндров относительно смещений центрального цилиндра в продоль-

ном (рис. 7, а) и поперечном (рис. 7, б) направлениях. Из приведенных графиков видно, что рассматриваемая система устойчива относительно продольных и неустойчива относительно поперечных возмущений.



а



б

Рис. 7. Зависимость силы гидродинамического взаимодействия F от смещения центрального цилиндра: а – в горизонтальном направлении Δx (система устойчива); б – в вертикальном направлении Δy (система неустойчива)

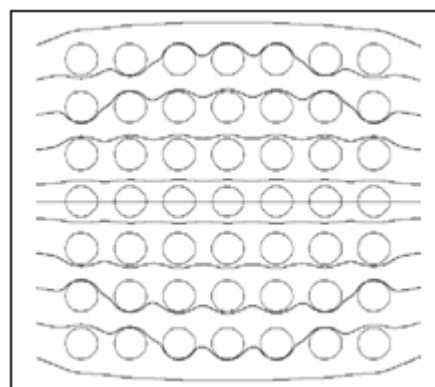


Рис. 8. Картина линий тока при обтекании регулярной структуры круговых цилиндров. Соответствует графикам на рисунке 7

6. Выводы

Выше отмечалась уникальность рассмотренной системы и её значение для понимания фундаментальных принципов гидродинамики сложных систем. Очевидно, что рассмотренные системы являются модельными для исследования гидродинамического взаимодействия. Другим принципиальным вопросом, рассмотренным выше, является устойчивость многофазных систем, под действи-

ем сил гидродинамического взаимодействия. Обнаружение устойчивых и неустойчивых режимов гидродинамического взаимодействия, объяснение механизма такой неустойчивости имеют принципиальное значение для гидромеханики многофазных течений.

Перспективы дальнейших исследований в данном направлении совершенно очевидны – это расширение множества проанализированных гидродинамических конфигураций и распространение приведенного выше подхода на случай пространственного гидродинамического взаимодействия.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Гидродинамика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Гидродинамика. – 3-е изд. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Паттерман, С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости [Текст] / С. Паттерман. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
3. Халатников, И. М. Введение в теорию сверхтекучести [Текст] / И. М. Халатников. – М.: Наука, 1965.
4. Костюков, А. А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости [Текст] / А. А. Костюков. – Л.: Судостроение, 1972. – 312 с.
5. Бразалук, Ю. В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Харк. нац. ун-та. – Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2005. – № 703. – Вып. 5. – С. 50-66.
6. Бразалук, Ю. В. Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Харьковского национального университета. – Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – № 590. – Вып. 1. – С. 55-60.
7. Бразалук, Ю. В. Численное определение присоединенных масс методами теории потенциала [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вісник ХНУ. – № 661. – Харків, 2005. – С. 24-36.
8. Бразалук, Ю. В. Применение метода граничных элементов для расчета присоединенных масс [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Труды междунар. симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков - Херсон, 2005. – С. 42-46.
9. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика [Текст]: монография / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Физматгиз, 1965. – Т. 1. – 758 с.
10. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика [Текст]: монография / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Физматгиз, 1965. – Т. 2. – 772 с.
11. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
12. Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.