

Література

1. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: [учебник для вузов] / Д.Н. Попов. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с.
2. Гудсон Р.Е. Обзор методов моделирования переходных процессов в гидравлических линиях / Р.Е. Гудсон, Р.Г. Леонард // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1972. – № 2. – С. 236 – 244.
3. Кузнецов В.Д. Специальные функции / В.Д. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1965. – 421с.
4. Кириллин В.А. Техническая термодинамика: [учебник] / В.А. Кириллин, В.В. Сычев, А.Е. Шейдлин. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
5. Могендович Е.М. Гидравлические импульсные системы / Е.М. Могендович. – Л.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
6. Джонсон Вэндлинг. Передаточные функции и входные импедансы систем трубопроводов, находящихся под давлением / Вэндлинг Джонсон // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1967. – № 2. – С. 231 – 236.
7. Andrenko P.N. Model matematyczny interferencyjnego przemiennika pulsacji cisnienia w ukladach hydraulicznych / P.N. Andrenko // Hydraulika i Pneumatyka. – 2001. – № 3. – S. 25 – 27.
8. Иванов М.І. Імітаційні дослідження хвильових процесів у довгих гідравлічних лініях гідросистем сільськогосподарських машин / М.І. Иванов, С.В. Дусанюк, С.В. Репінський // Вибрации в технике и технологиях. – 2003. – № 4. – С. 69 – 72.

УДК 624.072.3

# ОЦІНКА ПОХИБОК ПОКАЗАНЬ ДИНАМІЧНО- НАСТРОЮВАЛЬНИХ ГІРОСКОПІВ

**Ю. В. Киричук**

Кандидат технічних наук, доцент  
Кафедра приладобудування  
Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут»  
пр. Перемоги, 37, корп. 1, м. Київ, 25201  
Контактний тел.: (044) 275-94-52  
E-mail: kirichuky@mail.ru

*Отримано методіку і написана програма, а також отримані результати оцінки взаємного впливу динамічно-настроювальних гіроскопів, що встановлені на віброізолюваній платформі, один на одного з врахуванням системи віброзахисту*

*Ключові слова: гіроскоп, віброзахист*

*Получена методика и написана программа, а также получены результаты оценки взаимного влияния ДНГ, установленных на виброизолированной платформе друг на друга с учетом системы виброзащиты*

*Ключевые слова: гироскоп, виброзащита*

*Got method and written program, and also the got results of estimation of cross-coupling of DNG, that set on the vibroisolated platform, on each other taking into account the system of vibrodefence*

*Keywords: gyroscope, vibrodefence*

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Динамічно настроювальні гіроскопи в складі гіроскопічного вимірювача вектора кутових швидкостей (ГВВКШ) розташовані дуже близько один біля одного [1]. Тому вони чинять один на одного вібраційні впливи на «небезпечних» частотах, що породжуються статичним і динамічним дебалансами маховика і ротора електропривода, недосконалістю геометрії шарикопідшипників, силами електромагнітного тяжіння в електроприводі й іншими причинами.

Було встановлено, що точність характеристики ДНГ, що випробовувався автономно, у 1,5...2 рази краща, ніж у складі ГВВКШ.

Явище це виявилось надзвичайно складним як для експериментального дослідження, так і для теоретичного аналізу.

**Метою цієї статі** є оцінка обумовлених внутрішніми збуреннями похибок показань ДКШ-ДНГ (датчиків кутових швидкостей – динамічно настроювальних гіроскопів), що встановлені на віброізолюваній платформі, один на одного через систему віброзахисту.

Виходячи з цього, основними задачами статті є:

1. Отримати рівняння руху платформи (ГВВКШ), в якій припускається, що один з двох ДНГ генерує вплив на два інші за рахунок зсуву центрів мас, обумовленого статичною несбалансованістю.

2. Використовуючи результати отримані з рівняння руху платформи визначити похибки ДНГ: кінематичний відхід; неперетинність осей крутіння торсионів; пружна податливість опор ротора; статична незбалансованість. Також отримати залежність похибок ДНГ від точності монтажу віброзахисної системи і її параметрів.

**Прийняті позначення**

Позначимо системи координат (СК).

СК, зв'язана з основою:  $O_0\xi_0\eta_0\zeta_0$ . СК, зв'язана з платформою:  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$ . СК, зв'язана з корпусом гіроскопа:  $O_i x_i y_i z_i$ .

Точки закріплення віброізоляторів до платформи визначаються радіус-векторами  $\vec{r}_i = (r_{i\xi}, r_{i\eta}, r_{i\zeta})$ .

Прийняті системи координат зображені на рис. 1. Схема розташування ДНГ зображена на рис. 2.

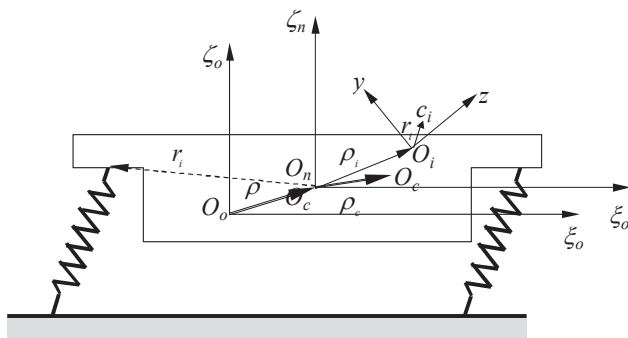


Рис. 1. Системи координат

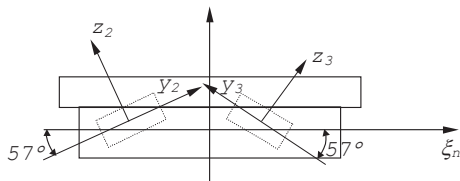
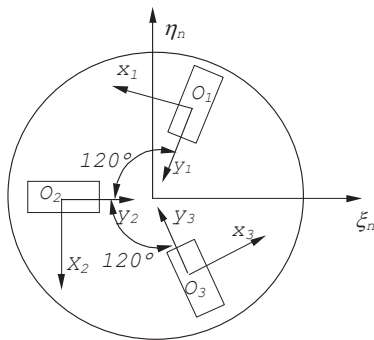


Рис. 2. Схема розташування гіроскопів

Переміщення полюса  $O_n$  щодо основи позначимо, як  $\vec{p} = (\xi, \eta, \zeta)$ .

Радіуси-вектори точок  $O_i$  у  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$ :  $\vec{p}_i = O_n O_i = (p_{i1}; p_{i2}; p_{i3}) = \text{const}$ .

Радіуси-вектори центру мас платформи в СК  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$ :  $\vec{p}_c = O_n C_n = (\xi_c; \eta_c; \zeta_c)$ .

Радіус-вектори центру мас гіроскопа  $C_i$  в СК  $O_i x_i y_i z_i$ :  $\vec{r}_{ci} = O_i C_i = (x_{ci}(t); 0; z_{ci}(t))$ , де  $x_{ci}(t); z_{ci}(t)$  задані функції часу.

Матриця переходу від СК  $O_0\xi_0\eta_0\zeta_0$  до СК  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$  при збігу точок  $O_0$  і  $O_n$  визначається послідовністю поворотів на кути  $\psi, \theta, \phi$  (рис. 3):

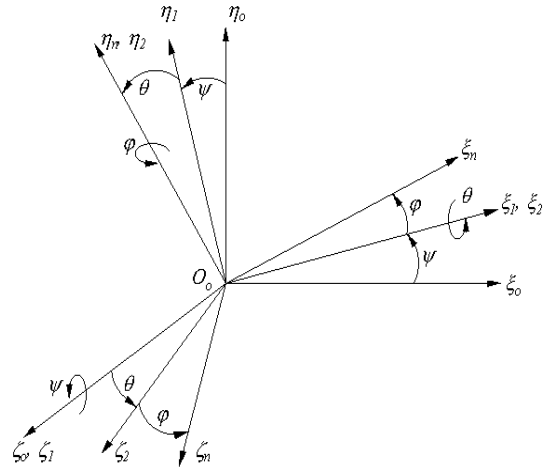


Рис. 3. Послідовність поворотів осей координат на кути  $\psi, \theta, \phi$

$$O_0\xi_0\eta_0\zeta_0 \xrightarrow[\text{O}_0\xi_0]{\Psi} O_0\xi_1\eta_1\zeta_1, A_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$O_0\xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow[\text{O}_0\xi_1]{\theta} O_0\xi_2\eta_2\zeta_2, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$O_0\xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow[\text{O}_0\eta_2]{\phi} O_0\xi_n\eta_n\zeta_n, A_3 = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix};$$

$$A = A_3 A_2 A_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \psi + \sin \phi \cdot \sin \theta \cdot (-\sin \psi) & \cos \phi \cdot \sin \psi + \sin \phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & -\sin \phi \cdot \cos \theta \\ \cos \theta \cdot (-\sin \psi) & \cos \theta \cdot \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \phi \cdot \cos \psi + \cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi & \sin \phi \cdot \sin \psi - \cos \phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Матриця направляючих косинусів координатних осей СК  $O_i x_i y_i z_i$  щодо СК  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$  має вигляд:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\cos \theta_i \cdot \sin \psi_i & \cos \theta_i \cdot \cos \psi_i & \sin \theta_i \\ \sin \psi_i \cdot \sin \theta_i & -\cos \psi_i \cdot \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від СК  $O_i x_i y_i z_i$  до СК  $O_i x'_i y'_i z'_i$ , зв'язаної з осями чутливості ДНГ має вигляд:

$$A_{gi} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i & \cos \beta_i \cdot \sin \alpha_i & \sin \beta_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ \sin \psi_e \cdot \sin \theta_e & \sin \beta_i \cdot \sin \alpha_i & \cos \beta_i \end{pmatrix}.$$

Визначимо кутові швидкості основи, платформи і гіроскопів.

Позначимо кутову швидкість платформи  $\vec{\omega}_n$  в СК  $O_n \xi_n \eta_n \zeta_n$  через  $\vec{\omega}_n$ .

$$\vec{\omega}_n = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}.$$

У проекціях на осі СК  $O_n \xi_n \eta_n \zeta_n$ .

$$\omega_{\xi_n} = \dot{\psi} \cos(\xi_n; \zeta_o) + \dot{\theta} \cos(\xi_n; \xi_1) + \dot{\phi} \cos(\xi_n; \eta_2);$$

$$\omega_{\eta_n} = \dot{\psi} \cos(\eta_n; \zeta_o) + \dot{\theta} \cos(\eta_n; \xi_1) + \dot{\phi} \cos(\eta_n; \eta_2);$$

$$\omega_{\zeta_n} = \dot{\psi} \cos(\zeta_n; \zeta_o) + \dot{\theta} \cos(\zeta_n; \xi_1) + \dot{\phi} \cos(\zeta_n; \eta_2).$$

або

$$\omega_{\xi_n} = \dot{\psi}(-\sin \phi \cos \theta) + \dot{\theta} \cos \phi; \quad \omega_{\eta_n} = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi};$$

$$\omega_{\zeta_n} = \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \phi.$$

У лінійному наближенні

$$\begin{cases} \omega_{\xi_n} = \dot{\theta}_e \\ \omega_{\eta_n} = \dot{\phi}_e; \\ \omega_{\zeta_n} = \dot{\psi}_e \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{\omega}_{\xi_n} = \ddot{\theta}_e \\ \dot{\omega}_{\eta_n} = \ddot{\phi}_e. \\ \dot{\omega}_{\zeta_n} = \ddot{\psi}_e \end{cases}.$$

Кутова швидкість гіроскопів у СК зв'язаної з осями чутливості визначається виразом:

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_n + \dot{\alpha}_i + \dot{\beta}_i; \quad \omega_{xi} = \omega_{nxi} + \dot{\alpha}_i \cos(x_i; z'_i) + \dot{\beta}_i \cos(x_n; y'_i);$$

$$\omega_{yi} = \omega_{nyi} + \dot{\alpha}_i \cos(y_i; z'_i) + \dot{\beta}_i \cos(y_i; y'_i);$$

$$\omega_{zi} = \omega_{nzi} + \dot{\alpha}_i \cos(z_i; z'_i) + \dot{\beta}_i \cos(y_i; y'_i),$$

де  $\omega_{nxi}, \omega_{nyi}, \omega_{nzi}$  – проекції кутової швидкості платформи  $\vec{\omega}_n$  на осі СК  $O_i x_i y_i z_i$ :

$$\omega_{xi} = \omega_{nxi} + \dot{\alpha}_i \sin \beta_i + \dot{\beta}_i \cos \beta_i \sin \alpha_i; \quad \omega_{yi} = \omega_{nyi} + \dot{\beta}_i \cos \alpha_i;$$

$$\omega_{zi} = \omega_{nzi} + \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \dot{\beta}_i (-\sin \beta_i) \sin \alpha_i.$$

У лінійному наближенні

$$\begin{cases} \omega_{xi} = \omega_{nxi} + \dot{\beta}_i; \\ \omega_{yi} = \omega_{nyi}; \\ \omega_{zi} = \omega_{nzi} + \dot{\alpha}_i \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{\omega}_{xi} = \dot{\omega}_{nxi} + \dot{\beta}_i, \\ \dot{\omega}_{yi} = \dot{\omega}_{nyi}, \\ \dot{\omega}_{zi} = \dot{\omega}_{nzi} + \dot{\alpha}_i \end{cases}.$$

### Рівняння руху платформи і гіроскопів

Рівняння поступального руху платформи на основі теореми про зміну кількості руху має вигляд:

$$\frac{d\vec{Q}_n}{dt} = \vec{G}_g + \vec{F}_a + \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i,$$

де  $\vec{G}_g$  – головний вектор сил тяжіння;  $\vec{F}_a$  – головний вектор сил, що прикладені з боку системи віброізоляторів;  $\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i$  – головний вектор сил, що прикладені з боку гіроскопів;  $Q = m_n \vec{V}_c$  – кількість руху платформи, причому  $m_n$  – маса платформи,  $\vec{V}_c$  – швидкість центру мас  $\vec{V}_c = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_c$ .

$$\text{Тоді } \frac{d\vec{Q}_n}{dt} = \frac{d}{dt}(m_n \vec{V}_c) = m_n \left[ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} + \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_c \right].$$

З огляду на те, що в СК  $O_n \xi_n \eta_n \zeta_n$   $\vec{r}_c = \text{const}$ , отримаємо

$$\frac{d}{dt} \vec{Q}_n = m \left( \ddot{\vec{r}} + \frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_c + \vec{\omega}_n \times (\vec{\omega}_n \times \vec{r}_c) \right).$$

Рівняння обертального руху платформи на основі теореми про зміну головного моменту кількості руху має вигляд:

$$\frac{d\vec{K}_{on}}{dt} = \vec{M}_{on}^g + \vec{M}_{on}^a + \sum_{i=1}^3 \vec{M}_{on}^i - m_n \vec{r}_c \times \vec{W}_{on},$$

де  $\vec{M}_{on}^g$  – головний момент сил тяжіння;  $\vec{M}_{on}^a$  – головний момент сил, що прикладені з боку системи віброзахисту;  $\sum_{i=1}^3 \vec{M}_{on}^i$  – головний момент сил, що прикладені з боку гіроскопів;  $m_n \vec{r}_c \times \vec{W}_{on}$  – момент, що з'являється через розбіжність центру мас платформи і полюса  $O_n$ ;  $\vec{W}_{on} = \ddot{\vec{r}}$  – прискорення початку СК  $O_n \xi_n \eta_n \zeta_n$ .

Рівняння обертального руху записуємо в СК, зв'язаною з платформою.

Для головного вектора моментів кількостей руху маємо

$$\vec{K}_{on} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}.$$

Припускаємо, що виконано кутові обмеження на відцентрові моменти інерції

$$J_\xi, J_\eta, J_\zeta \gg J_{\xi\eta}, J_{\eta\xi}, \quad \frac{d\vec{K}_{on}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_{on}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_{on},$$

де  $\frac{\tilde{d}\vec{K}_{on}}{dt}$  – відносна похідна в СК  $O_n \xi_n \eta_n \zeta_n$ .

Припускаючи, що гіроскопи – маховики, що швидко обертаються, для оцінки їхнього впливу на рух платформи запишемо рівняння в спрощеному вигляді. На підставі загальних теорем динаміки маємо

$$\frac{d\vec{Q}_i}{dt} = \vec{G}_i + \vec{F}_i^n, \quad \frac{d\vec{K}_{oi}}{dt} = \vec{M}_{oi}^g + \vec{M}_{oi}^n - m_i \vec{r}_{ci} \times \vec{\omega}_{oi},$$

Тут  $\vec{Q}_i, \vec{K}_{oi}$  – кількість руху і момент кількості руху і-го гіроскопу (центр приведення –  $O_i$ );  $\vec{G}_i$  і  $\vec{M}_{oi}^g$  – сили і моменти сил тяжіння;  $\vec{F}_i^n$  і  $\vec{M}_{oi}^n$  – сили і мо-

менти сил прикладених із боку підшипників, датчиків моментів, двигунів.

Для  $\frac{d\vec{Q}_i}{dt}$  і  $\frac{d\vec{K}_{oi}}{dt}$  маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}_i}{dt} &= m_i (\ddot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\omega}}_n \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega}_n \times \vec{\omega}_n \times \vec{\rho}_i + \ddot{\vec{r}}_{ci} + \\ &+ \dot{\vec{\omega}}_n \times \vec{r}_{ci} + \vec{\omega}_n \times \vec{\omega}_n \times \vec{r}_{ci} + 2\vec{\omega}_n \times \dot{\vec{r}}_{ci}) \\ \frac{d\vec{K}_{oi}}{dt} &= \frac{d\vec{K}_{oi}}{dt} + \vec{\omega}_i \times \vec{K}_i = J_i \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times J_i \vec{\omega}_i, \end{aligned}$$

де  $J_i$  – тензор інерції ротора гіроскопа. Прискорення точки  $O_i$ :  $\dot{\vec{\omega}}_i = \ddot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\omega}}_n \times \vec{\rho}_i + \vec{\omega}_n \times \vec{\omega}_n \times \vec{\rho}_i$ .

З огляду на, що  $\vec{F}_i = -\vec{F}_i^n$  і  $\vec{M}_{on}^i = -(\vec{M}_{on}^n + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^n)$  включимо з рівнянь руху платформи сили  $\vec{F}_i$  і моменти сил  $\vec{M}_{on}^i$ .

Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}_n}{dt} &= \vec{G}_g + \vec{G}_a - \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{d\vec{Q}_i}{dt} - \vec{G}_i \right], \\ \frac{d\vec{K}_{on}}{dt} &= \vec{M}_{on}^g + \vec{M}_{on}^a - m_n \vec{\rho}_c \times \vec{\omega}_{on} - \\ &- \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d\vec{K}_{oi}}{dt} - \vec{M}_{oi}^g + m_i \vec{r}_{ci} \times \vec{\omega}_{on} + \vec{\rho}_i \times \frac{d\vec{Q}_i}{dt} - \vec{\rho}_i \times \vec{G}_i \right) \end{aligned}$$

Моменти сил тяжіння записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{M}_{on}^g &= \vec{\rho}_c \times \vec{G}, \quad \vec{M}_{oi}^g = \vec{r}_{ci} \times \vec{G}_i, \\ \text{де } \vec{G} &= m\vec{g}, \quad \vec{G}_i = m_i\vec{g}. \end{aligned}$$

Вирази для сил  $\vec{F}_a$  і моментів  $\vec{M}_{on}^a$ , прикладених з боку СВЗ до платформи, визначаються як узагальнені сили на підставі відомої силової  $U$  і дисипативної  $\Phi$  функцій. Так як  $U = -\Pi$ , де  $\Pi$  – потенційна енергія, то

$$F_{a\xi} \approx -\frac{d\Pi}{d\xi} - \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad F_{a\eta} \approx -\frac{d\Pi}{d\eta} - \frac{d\Phi}{d\eta}, \quad F_{a\zeta} \approx -\frac{d\Pi}{d\zeta} - \frac{d\Phi}{d\zeta},$$

$$M_{\xi}^a \approx -\left( \frac{d\Pi}{d\theta} + \frac{d\Phi}{d\theta} \right) \cos\phi + \left( \frac{d\Pi}{d\psi} + \frac{d\Phi}{d\psi} \right) \cos\theta \sin\phi,$$

$$M_{\eta}^a \approx -\left( \frac{d\Pi}{d\phi} + \frac{d\Phi}{d\phi} \right) - \left( \frac{d\Pi}{d\psi} + \frac{d\Phi}{d\psi} \right) \sin\theta,$$

$$M_{\zeta}^a \approx -\left( \frac{d\Pi}{d\psi} + \frac{d\Phi}{d\psi} \right) \cos\phi \cos\theta - \left( \frac{d\Pi}{d\theta} + \frac{d\Phi}{d\theta} \right) \sin\phi.$$

Для потенційної енергії і дисипативної функції маємо

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^3 C_{i\xi} u_i^2 + \sum_{i=1}^3 C_{i\eta} v_i^2 + \sum_{i=1}^3 C_{i\zeta} \omega_i^2 \right];$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^3 h_{i\xi} \dot{u}_i^2 + \sum_{i=1}^3 h_{i\eta} \dot{v}_i^2 + \sum_{i=1}^3 h_{i\zeta} \dot{\omega}_i^2 \right].$$

Тут  $C_{i\xi}, C_{i\eta}, C_{i\zeta}$  – коефіцієнти жорсткості і-го віброізолятора в напрямку координатних осей,  $h_{i\xi}, h_{i\eta}, h_{i\zeta}$  – коефіцієнти демпфірування і-го віброізолятора в напрямку координатних осей. Деформації і-го віброізолятора  $u_i, V_i, W_i$  у відповідних напрямках приблизно визначаються виразами

$$u_i = \xi - \psi r_{i\eta} + \phi r_{i\xi}, \quad V_i = \eta + \psi r_{i\xi} - \theta r_{i\xi}, \quad W_i = \zeta - \psi r_{i\xi} + \phi r_{i\eta}.$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$F_{\xi}^a = -C_{\xi}\xi - C_{\xi\psi}\psi - C_{\xi\phi}\phi - h_{\xi}\dot{\xi} - h_{\xi\psi}\dot{\psi} - h_{\xi\phi}\dot{\phi},$$

$$F_{\eta}^a = -C_{\eta}\eta - C_{\eta\psi}\psi - C_{\eta\theta}\theta - h_{\eta}\dot{\eta} - h_{\eta\psi}\dot{\psi} - h_{\eta\theta}\dot{\theta},$$

$$F_{\zeta}^a = -C_{\zeta}\zeta - C_{\zeta\phi}\phi - C_{\zeta\theta}\theta - h_{\zeta}\dot{\zeta} - h_{\zeta\phi}\dot{\phi} - h_{\zeta\theta}\dot{\theta},$$

$$\begin{aligned} M_{\xi}^a &= -C_{\theta}\theta - C_{\theta\phi}\phi - C_{\theta\psi}\psi - C_{\theta\eta}\eta - \\ &- C_{\zeta\theta}\zeta - h_{\theta}\dot{\theta} - h_{\theta\phi}\dot{\phi} - h_{\theta\psi}\dot{\psi} - h_{\theta\eta}\dot{\eta} - h_{\zeta\theta}\dot{\zeta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\eta}^a &= -C_{\phi}\phi - C_{\phi\psi}\psi - C_{\phi\theta}\theta - C_{\xi\phi}\xi - \\ &- C_{\zeta\phi}\zeta - h_{\phi}\dot{\phi} - h_{\phi\psi}\dot{\psi} - h_{\phi\theta}\dot{\theta} - h_{\xi\phi}\dot{\xi} - h_{\zeta\phi}\dot{\zeta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\zeta}^a &= -C_{\psi}\psi - C_{\psi\phi}\phi - C_{\psi\theta}\theta - C_{\xi\psi}\xi - \\ &- C_{\eta\psi}\eta - h_{\psi}\dot{\psi} - h_{\psi\phi}\dot{\phi} - h_{\psi\theta}\dot{\theta} - h_{\xi\psi}\dot{\xi} - h_{\eta\psi}\dot{\eta}, \end{aligned}$$

Тут

$$C_{\xi} = \sum_{i=1}^3 C_{\xi i}; \quad C_{\zeta} = \sum_{i=1}^3 C_{\zeta i}; \quad C_{\eta} = \sum_{i=1}^3 C_{\eta i};$$

$$C_{\xi\phi} = \sum_{i=1}^3 C_{\xi i} r_{\zeta i}; \quad C_{\xi\psi} = -\sum_{i=1}^3 C_{\xi i} r_{\eta i}; \quad C_{\eta\psi} = \sum_{i=1}^3 C_{\eta i} r_{\xi i};$$

$$C_{\eta\theta} = -\sum_{i=1}^3 C_{\eta i} r_{\zeta i}; \quad C_{\zeta\theta} = \sum_{i=1}^3 C_{\zeta i} r_{\eta i}; \quad C_{\zeta\phi} = -\sum_{i=1}^3 C_{\zeta i} r_{\xi i};$$

$$C_{\theta} = \sum_{i=1}^3 \left[ C_{\zeta i} (r_{\eta i})^2 + C_{\eta i} (r_{\zeta i})^2 \right]; \quad C_{\psi\theta} = -\sum_{i=1}^3 C_{\eta i} r_{\xi i} r_{\zeta i};$$

$$C_{\psi} = \sum_{i=1}^3 \left[ C_{\eta i} (r_{\xi i})^2 + C_{\zeta i} (r_{\eta i})^2 \right]; \quad C_{\phi\psi} = -\sum_{i=1}^3 C_{\xi i} r_{\eta i} r_{\zeta i};$$

$$C_{\phi} = \sum_{i=1}^3 \left[ C_{\xi i} (r_{\zeta i})^2 + C_{\zeta i} (r_{\xi i})^2 \right]; \quad C_{\theta\phi} = -\sum_{i=1}^3 C_{\zeta i} r_{\xi i} r_{\eta i};$$

$$h_{\xi} = \sum_{i=1}^3 h_{\xi i}; \quad h_{\zeta} = \sum_{i=1}^3 h_{\zeta i}; \quad h_{\eta} = \sum_{i=1}^3 h_{\eta i};$$

$$h_{\xi\phi} = \sum_{i=1}^3 h_{\xi i} r_{\zeta i}; \quad h_{\xi\psi} = -\sum_{i=1}^3 h_{\xi i} r_{\eta i}; \quad h_{\eta\psi} = \sum_{i=1}^3 h_{\eta i} r_{\xi i};$$

$$h_{\eta\theta} = -\sum_{i=1}^3 h_{\eta i} r_{\zeta i}; \quad h_{\zeta\theta} = \sum_{i=1}^3 h_{\zeta i} r_{\eta i}; \quad h_{\zeta\phi} = -\sum_{i=1}^3 h_{\zeta i} r_{\xi i};$$

$$h_{\psi} = \sum_{i=1}^3 \left[ h_{\eta i} (r_{\xi i})^2 + h_{\zeta i} (r_{\eta i})^2 \right]; \quad h_{\psi\theta} = -\sum_{i=1}^3 h_{\eta i} r_{\xi i} r_{\zeta i};$$

$$h_{\theta} = \sum_{i=1}^3 \left[ h_{\eta i} (r_{\zeta i})^2 + h_{\zeta i} (r_{\eta i})^2 \right]; \quad h_{\phi\psi} = -\sum_{i=1}^3 h_{\xi i} r_{\eta i} r_{\zeta i};$$

$$h_\phi = \sum_{i=1}^3 \left[ h_{\xi_i} (r_{\xi_i})^2 + h_{\zeta_i} (r_{\zeta_i})^2 \right]; \quad h_{\theta_\phi} = - \sum_{i=1}^3 h_{\zeta_i} r_{\zeta_i} r_{\eta_i}.$$

Відкидаючи складові другого порядку малості рівняння поступального руху платформи в проєкціях на осі СК  $O_o \xi_o \eta_o \zeta_o$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} & M\ddot{\xi} + \left( m\zeta_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i3} + \sum_{i=3}^3 m_i z_{ci} \cos \theta_i \right) \ddot{\phi} - \\ & - \left( m\eta_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i2} + \sum_{i=3}^3 m_i (x_{ci} \sin \psi_i - z_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) \right) \ddot{\psi} + \\ & + 2 \sum_{i=3}^3 m_i \dot{z}_{ci} \cos \theta_i \dot{\phi} - 2 \sum_{i=3}^3 m_i (\dot{x}_{ci} \sin \psi_i - \dot{z}_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) \dot{\psi} + \\ & + C_\xi \ddot{\xi} + C_\psi \ddot{\psi} + C_{\xi\phi} \ddot{\phi} = - \sum_{i=3}^3 m_i (\ddot{x}_{ci} \cos \psi_i - \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i); \\ & M\ddot{\eta} + \left( m\dot{\xi}_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i1} + \sum_{i=3}^3 m_i (x_{ci} \cos \psi_i + z_{ci} \sin \psi_i \sin \theta_i) \right) \ddot{\psi} - \\ & - \left( m\zeta_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i3} + \sum_{i=3}^3 m_i z_{ci} \cos \theta_i \right) \ddot{\theta} - 2 \sum_{i=3}^3 m_i \dot{z}_{ci} \cos \theta_i \dot{\theta} + \\ & + 2 \sum_{i=3}^3 m_i (\dot{x}_{ci} \cos \psi_i + \dot{z}_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i) \dot{\psi} + C_\eta \ddot{\eta} + C_{\eta\psi} \ddot{\psi} + C_{\eta\theta} \ddot{\theta} = \\ & = - \sum_{i=3}^3 m_i (\ddot{x}_{ci} \sin \psi_i - \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i); \\ & M\ddot{\zeta} + \left( m\eta_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i2} + \sum_{i=3}^3 m_i (x_{ci} \sin \psi_i - z_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i) \right) \ddot{\theta} + \\ & + 2 \sum_{i=3}^3 m_i (\dot{x}_{ci} \sin \psi_i - \dot{z}_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) \dot{\theta} - \\ & - \left( m\dot{\xi}_c + \sum_{i=3}^3 m_i \rho_{i1} + \sum_{i=3}^3 m_i (x_{ci} \cos \psi_i + z_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i) \right) \ddot{\phi} - \\ & - 2 \sum_{i=3}^3 m_i (\dot{x}_{ci} \cos \psi_i + \dot{z}_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i) \dot{\phi} = - \sum_{i=3}^3 m_i \dot{z}_{ci} \cos \theta_i - Mg. \end{aligned}$$

Тут  $m$  – маса платформи,  $m_i$  – маси роторів гіроскопів,  $M$  – маса платформи з гіроскопами,  $x_{ci}, z_{ci}$  – відомі функції часу.

Рівняння обертального руху щодо осі  $O_n \xi_n$  з точністю до розміру другого порядку малості:

$$\begin{aligned} & J_{\xi n} \ddot{\theta} - J_{\xi \eta} \ddot{\phi} - J_{\xi \zeta} \ddot{\psi} = -m\eta_c \ddot{\zeta} + m\eta_c \ddot{\eta} - m\eta_c g + m\zeta_c g\theta - C_\theta \ddot{\theta} - \\ & - C_{\theta\phi} \ddot{\phi} - C_{\theta\psi} \ddot{\psi} - C_{\theta\zeta} \ddot{\zeta} - C_{\theta\eta} \ddot{\eta} - H_\theta \dot{\theta} - H_{\theta\phi} \dot{\phi} - H_{\theta\psi} \dot{\psi} - H_{\theta\zeta} \dot{\zeta} - H_{\theta\eta} \dot{\eta} + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left\{ m_i [-\rho_{i2} g + \rho_{i3} g\theta + g(-x_{ci} \sin \psi_i + z_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) - \right. \\ & - \rho_{i2} \ddot{\zeta} + \rho_{i3} \ddot{\eta} - I_i^2 \ddot{\theta} + (\ddot{\theta} \rho_{i1} + \ddot{\phi} \rho_{i2} + \ddot{\psi} \rho_{i3}) \rho_{i1} - \rho_{i2} \dot{z}_{ci} \cos \theta_i + \\ & + \rho_{i3} (\ddot{x}_{ci} \sin \psi_i - \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i)] - J_{\phi i} [(\cos^2 \psi_i + \sin^2 \psi_i \sin^2 \theta_i) \ddot{\theta} + \\ & + \sin \psi_i \cos \psi_i \cos^2 \theta_i \dot{\phi} + \cos \theta_i \sin \theta_i \sin \psi_i \dot{\psi}] + \\ & \left. + H_i (\dot{\psi} \cos \psi_i \cos \theta_i - \dot{\phi} \sin \theta_i) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & J_{\eta n} \ddot{\phi} - J_{\xi \eta} \ddot{\theta} - J_{\eta \zeta} \ddot{\psi} = -m\zeta_c \ddot{\xi} + m\zeta_c \ddot{\zeta} + m\zeta_c g\phi + m\zeta_c g - C_\phi \ddot{\phi} - \\ & - C_{\theta\phi} \ddot{\theta} - C_{\phi\psi} \ddot{\psi} - C_{\phi\zeta} \ddot{\zeta} - C_{\phi\eta} \ddot{\eta} - H_\phi \dot{\phi} - H_{\theta\phi} \dot{\theta} - H_{\phi\psi} \dot{\psi} - H_{\phi\zeta} \dot{\zeta} - \\ & - H_{\phi\eta} \dot{\eta} + \sum_{i=1}^3 \left\{ m_i [-\rho_{i3} g\phi + \rho_{i1} g + g(x_{ci} \cos \psi_i + z_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) - \right. \\ & - \rho_{i3} \ddot{\xi} + \rho_{i1} \ddot{\zeta} - I_i^2 \ddot{\phi} + (\ddot{\theta} \rho_{i1} + \ddot{\phi} \rho_{i2} + \ddot{\psi} \rho_{i3}) \rho_{i2} + \rho_{i1} \dot{z}_{ci} \cos \theta_i - \\ & - \rho_{i3} (\ddot{x}_{ci} \cos \psi_i + \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i)] - J_{\psi i} [\ddot{\theta} \cos^2 \theta_i \sin \psi_i \cos \psi_i + \\ & + (\sin^2 \psi_i + \sin^2 \theta_i \cos^2 \psi_i) \ddot{\phi} - \cos \theta_i \sin \theta_i \cos \psi_i \dot{\psi}] + \\ & \left. + H_i (\dot{\theta} \sin \theta_i + \dot{\psi} \cos \theta_i \sin \psi_i) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & J_\zeta \ddot{\psi} - J_{\zeta \xi} \ddot{\theta} - J_{\eta \zeta} \ddot{\phi} = -m\zeta_c g - m\eta_c g\phi - m\eta_c \ddot{\xi} - m\zeta_c \ddot{\eta} - \\ & - C_\psi \ddot{\psi} - C_{\psi\theta} \ddot{\theta} - C_{\psi\phi} \ddot{\phi} - C_{\psi\eta} \ddot{\eta} - C_{\psi\zeta} \ddot{\zeta} - H_\psi \dot{\psi} - H_{\psi\theta} \dot{\theta} - \\ & - H_{\psi\phi} \dot{\phi} - H_{\psi\eta} \dot{\eta} - H_{\psi\zeta} \dot{\zeta} + \sum_{i=1}^3 \left\{ m_i [-\rho_{i1} g\theta - \rho_{i2} g\phi + \right. \\ & + \rho_{i2} \ddot{\xi} - I_i^2 \ddot{\psi} + (\ddot{\theta} \rho_{i1} + \ddot{\phi} \rho_{i2} + \ddot{\psi} \rho_{i3}) \rho_{i3} - \\ & - \rho_{i1} (\ddot{x}_{ci} \sin \psi_i - \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \cos \psi_i) + \\ & \left. + \rho_{i2} (\ddot{x}_{ci} \cos \psi_i + \ddot{z}_{ci} \sin \theta_i \sin \psi_i)] - \right. \\ & - J_{\psi i} [\ddot{\theta} \sin \psi_i \sin \theta_i - \ddot{\phi} \cos \psi_i \sin \theta_i + \ddot{\psi} \cos \theta_i] \cos \theta_i - \\ & \left. - H_i (\dot{\theta} \cos \psi_i + \dot{\phi} \sin \psi_i) \cos \theta_i \right\}; \end{aligned}$$

де  $I_i^2 = \rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 + \rho_{i3}^2$ ,  $J_o$  і  $J_{\phi i}$  – екваторіальний і осевий моменти інерції маховика,  $H = J_o \dot{j}$  – власний кінетичний момент маховика.

Математичну модель ДНГ із врахуванням похибок було узято з літератури

$$\begin{aligned} & (A_i + a_i) \ddot{\alpha}_i + h_i \dot{\alpha}_i + B_o \alpha_i + W_{2i}(p) \alpha_i + H \dot{\beta}_i + \\ & + \frac{H}{T_{ni}} \beta_i + W_{1i}(p) \beta_i = -(A_i + a_i) \dot{\omega}_{xi}^{(1)} - H_{1i} \omega_{xi}^{(1)}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (A_i + a_i) \ddot{\beta}_i + h_i \dot{\beta}_i + B_o \beta_i + W_{2i}(p) \beta_i - H \dot{\alpha}_i - \\ & - \frac{H}{T_{ni}} \alpha_i + W_{1i}(p) \alpha_i = -(A_i + a_i) \dot{\omega}_{xi}^{(1)} + H_{1i} \omega_{xi}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\omega_{xi}^{(1)}$ ,  $\omega_{xi}^{(1)}$  – лінійні наближення кутових швидкостей;  $A_i$ ,  $a_i$  – екваторіальні моменти інерції обертання ротору і кілець;  $h_i$  – коефіцієнт в'язкого тертя;  $H_i$  – кінетичний момент;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  – відносні кути обертання ротору;  $W_{2i}(s)$ ,  $W_{1i}(s)$  – передаточні функції 1-го і 2-го зворотніх ланок ДНГ.

### Результати розрахунків

За допомогою методу комплексних амплітуд визначалися поодинокі рішення, що відповідають вимушеним коливанням системи. Отримані переносні

рухи платформи використовуються для обчислення необхідних похибок ДНГ.

Визначалися похибки ДНГ:

1. Кінематичний відхід визначався з виразів (1) і (2);

2. Швидкість відходу ДНГ в умовах поступальних прискорень, що повільно змінюються поступальних прискорень – нерівножорсткість підвісу

$$\omega_y = M_p j_z j_y \left\{ b \left[ (1+q)^2 - \frac{1}{2}q \right] c^{-1} - (1-q)^2 c_{\xi}^{-1} \right\} H^{-1};$$

3. Швидкість відходу ДНГ в умовах повільно змінюючихся поступальних прискорень – осьова розбалансованість і неперетинність осей

$$\omega_y = -M_p j_y a \left[ 2d_3 + q(d_1 + d_2) + (1+q) \left( l_o + \frac{1}{2} l_{23}^x \right) \right] (2H)^{-1};$$

4. Швидкість відходу ДНГ в умовах осьової вібрації на частоті  $\Omega$  – статичний дебаланс, неперетинність осей і недосконалість геометрії шарикоподшипників

$$\omega_z = -\Omega^2 (\tilde{A}_1 M_p) \left[ \left( \epsilon_{32} - \frac{1}{2} l_m^y \right) + \Omega^2 M_p \epsilon_{32} \frac{1}{c_{\eta}} \right] (H)^{-1};$$

$$\omega_y = \Omega^2 (\tilde{A}_1 M_p) \left[ \left( \epsilon_{33} - \frac{1}{2} l_n^z \right) + \Omega^2 M_p \epsilon_{33} \frac{1}{c_{\eta}} \right] (H)^{-1};$$

де  $c_{\xi}$  – лінійна жорсткість 1-ї пари торсіонів,  $c_{\xi} = 1,3 \cdot 10^7$  Н/м;  $c_{\eta}$  – лінійна жорсткість 3-ї пар торсіонів,  $c_{\eta} = 2c_{\xi}$ ;  $c$  – лінійні жорсткості торсіонів вздовж осі ОУ,  $c = 3,1 \cdot 10^7$  Н/м;

$\tilde{A}_1$  – амплітуда осьових коливань роторів,  $\tilde{A}_1 = \frac{\omega_{\xi}^2 \eta_o}{\left| \omega_{\xi}^2 - \Omega^2 \right|}$ ;

$\omega_{\xi}$  – частота радіальних коливань вздовж осі ОХ,

$$\omega_{\xi} = \Omega \sqrt{\frac{2,765}{2M_p} - 1};$$

$b = a + 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_{\xi}^2}$ ;  $l_o$  – зміщення осі крутіння 3-ї пари

торсіонів по відношенню до тої самої осі 2-ї пари торсіонів вздовж осі ОХ;

$j_z, j_y$  – проекції вектору абсолютного поступально-го прискорення  $j$  корпусу гіроскопу на осі  $OX_o, Y_o, Z_o$ ;

$\epsilon_{32}$  – зміщення центру мас 3-го ротору відносно 2-ї головної осі інерції;  $\epsilon_{33}$  – зміщення центру мас 3-го ротору відносно 3-ї головної осі інерції,  $\epsilon_{32} = \epsilon_{33} = 0,2 \cdot 10^{-3}$  м;

$q = \frac{M_k}{M_p}$  – відношення маси кільця до маси ротору;

$M_p$  – маса ротору ДНГ  $M_p = 6 \cdot 10^{-2}$  Н;

$M_k$  – маса кільця ДНГ  $M_k = 2 \cdot 10^{-2}$  Н;

$d_1, d_2, d_3$  – зміщення центру мас і-го ротору ( $i=1,2,3$ ) здовж головної осі інерції ОХ,  $d_1 = d_2 = d_3 = 10^{-7}$  м;

$\Omega$  – кутова швидкість власного обертання ротору,  $\Omega = 1000$  рад/с;

$l_m^y, l_n^z$  – радіальне зміщення колінарних торсіонів 2 і 3 (двох разом) вздовж осей ОУ' і ОZ' відповідно.

Розрахунки проводилися на основі наступних даних:

$$C_{\xi 1} = C_{\xi 2} = C_{\xi 3} = 20783 \text{ Н/м};$$

$$C_{\eta 1} = C_{\eta 2} = C_{\eta 3} = 20783 \text{ Н/м}; C_{\zeta 1} = C_{\zeta 3} = 18524 \text{ Н/м};$$

$$C_{\zeta 2} = 25301 \text{ Н/м}; r_{\zeta 1} = r_{\zeta 2} = r_{\zeta 3} = 0,02 \text{ м};$$

$$r_{\xi 1} = r_{\xi 3} = 0,052 \text{ м}; r_{\xi 2} = -0,108 \text{ м}; r_{\eta 1} = 0,088 \text{ м};$$

$$r_{\eta 2} = 0 \text{ м}; r_{\eta 3} = -0,088 \text{ м}.$$

У результаті досліджень були отримані власні частоти системи віброзахисту (табл. 1), похибки ДНГ (табл. 2) при наявності переносного руху платформи за рахунок зсуву центру мас платформи на 1 мм, розкиду жорсткостей віброізоляторів на 10%, неточності встановлення віброізоляторів 2 мм.

**Таблиця 1**

Таблиця власних частот системи віброзахисту

$\xi(X)$	$\eta(Y)$	$\zeta(Z)$
$\pm 52,57i$	$\pm 53,96i$	$\pm 47,72i$
$\pm 3,819i$	$\pm 5,758i$	0

**Таблиця 2**

Таблиця похибок з урахуванням змін параметрів

		Ідеальний випадок	Зміщення центру мас платформи (1 мм)	Розкид жорсткостей ВІ по осі $\zeta$ (10%)	Неточність встановлення ВІ по осі $\zeta$ (2 мм)
Кутові швидкості відходу гіроскопу, град/год	$\alpha$	1,59934e-3	1,59915e-3	1,59926e-3	1,59936e-3
	$\beta$	-2,48235e-3	-2,48262e-3	-2,48223e-3	-2,48238e-3
Нерівножорсткість підвісу, град/год		-2,48704e-6	-3,60237e-6	-2,48636e-6	-2,48685e-6
Неперетинність осей і осьова розбалансованість, град/год		-0,0571268	-0,059253	-0,0571259	-0,0571274
Статична несбалансованість, град/год		0,03483085	0,035552	0,03483085	0,0348299

**Висновки**

На основі отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

Отримана методика і написана програма, а також отримані результати оцінки взаємного впливу ДНГ один на одного з врахуванням системи віброзахисту.

Аналіз отриманих результатів показав, що найбільше істотний вплив роблять моменти, обумовлені жорсткістю пружного підвісу і неперетинність осей, і залежать крім інших причин, від лінійних прискорень платформи в місці установки ДНГ. Для реальних статичних зсувів центру мас ДНГ – джерела збурень, досліджуваний ДНГ може мати похибку до 1 град/год.

**Література**

1. Павловский М.А., Петренко В.Е. Виброустойчивость гироскопов. Киев, «Виша школа», 1982,-171 с.