

*Розглядається процес розповсюдження нестационарних згинних хвиль у балці на основі уточнених рівнянь [1]; раптово прикладена сила, що перерізує. На відміну від [2], швидкості розповсюдження фронтів позадвжніх та поперечних хвиль відповідають швидкостям теорії пружності*

*Ключові слова: асимптотико-груповий, квазіфронт, сила що перерізує, хвиля що згинає*

*Рассматривается процесс распространения нестационарных изгибных волн в балке на основе уточненных уравнений [1]; внезапно приложена перерезывающая сила. В отличие от [2], скорости распространения фронтов продольных и поперечных волн соответствуют скоростям теории упругости*

*Ключевые слова: асимптотико-групповой, квазифронт, перерезывающая сила, изгибная волна*

*The process of distribution of non-stationary waves in the bending beam is examined on the basis of the specified equalizations [1]; the crosscutting power is suddenly attached. Unlike to the [2], the speeds of the longitudinal and transversal waves fronts distribution coincide with speeds in the elasticity theory*

*Key words: asymptotic-group, quasifront, the crosscutting power, flexural wave*

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ

**А.Д. Шамровский**

Доктор технических наук, профессор\*

Контактный тел.: (06 12) 223-82-16

E-mail: adshamr@rambler.ru

**Л.Н. Егармина**

Аспирант, младший научный сотрудник\*

\*Кафедра программного обеспечения

автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия

пр. Ленина, 226, г. Запорожье, 69006

Контактный тел.: (06 12)96-14-39, 068-449-13-31

E-mail: neverojatnonofakt@rambler.ru

## 1. Введение

Уравнения динамики стержней получаются обычно на основе каких-то предположений о характере распределения искомым величин – напряжений и деформаций по поперечному сечению стержня [3]. В случае свободных колебаний все величины считаются постоянными по сечению стержня. Ранее в работе [4] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получаются из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа, не требующего использования каких-либо гипотез. Однако в динамических задачах существенную роль могут играть некоторые факторы, которые не учитываются классическими уравнениями, например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны. В [1] аналогично производится поиск уточненных одномерных динамических уравнений изгиба стержня на основе трехмерных уравнений теории упругости. Таким образом, получаются асимптотически обоснованные уточненные уравнения, позволяющие учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые. В данной работе показано решение этих уравнений, а также проанализирован

процесс распространения нестационарных волн по стержню прямоугольного сечения при его изгибе на основе полученных решений.

## 2. Решение найденных уточненных динамических уравнений изгиба балки прямоугольного поперечного сечения для случая внезапно приложенной перерезывающей силы

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений изгиба балки на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, неминимальное упрощение трехмерных уравнений, приводящее к одномерным уравнениям.

Перепишем полученные в [1] уравнения в однородном случае, отвечающем отсутствию нагрузок на боковых поверхностях балки:

$$\partial_x^2 \phi + c \partial_x W + c \partial_x V - 8a_s^2 (\partial_x w + \phi) - \partial_t^2 \phi = 0;$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \phi + W + cV - \partial_t^2 w = 0;$$

$$\begin{aligned} 8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi + 24(W + cV) + \partial_t^2 W &= 0; \\ 8(V + c \partial_x \varphi + cW) + \varepsilon \partial_t^2 V &= 0; \quad Q = \partial_x w + \varphi; \\ M = \partial_x \varphi + cW + cV; \quad N = W + c \partial_x \varphi + cV; \quad K &= V + c \partial_x \varphi + cW \end{aligned}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \quad \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \quad \varphi = \delta^{\alpha_3} \varphi^*, \quad w = \delta^{\alpha_4} w^*, \quad W = \delta^{\alpha_5} W^*, \\ V &= \delta^{\alpha_6} V^*, \quad Q = \delta^{\alpha_7} Q^*, \quad M = \delta^{\alpha_8} M^*, \quad N = \delta^{\alpha_9} N^*, \quad K = K^*, \end{aligned}$$

приводящие к соотношениям:

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1, \quad \varphi^* \sim w^* \sim W^* \sim V^* \sim Q^* \sim M^* \sim N^* \sim K^*$$

Соответствующая таблица показателей степени будет:

$$2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3; \quad (1)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_4;$$

$$2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_5;$$

$$\alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, 2\alpha_2 + \alpha_6; \quad \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3;$$

$$\alpha_8, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6; \quad \alpha_9, \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_6;$$

$$0, \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5$$

Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0,$$

$$\alpha_6 = 2, \alpha_7 = -1, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0$$

Таблица (1):

$$\begin{aligned} -1, -1, 1, -1, 1, -1; \\ -2, 0, 0, 2, -2; \\ -2, 0, 0, 2, -2; \\ 2, 0, 0, 0; \quad -1, -1, 1; \\ 0, 0, 0, 2; \quad 0, 0, 0, 2; \quad 0, 2, 0, 0 \end{aligned}$$

Упрощенные уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varphi + c \partial_x W - 8a_s^2 \partial_x w - \partial_t^2 \varphi &= 0; \\ a_s^2 \partial_x^2 w - \partial_t^2 w &= 0; \quad 8a_s^2 \partial_x^2 w + \partial_t^2 W = 0; \\ 8(c \partial_x \varphi + cW) + \varepsilon \partial_t^2 V &= 0; \quad Q = \partial_x w; \\ M = \partial_x \varphi + cW; \quad N = W + c \partial_x \varphi; \quad k = c \partial_x \varphi + cW \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к более подробному изучению полученного варианта упрощения. Он отвечает быстрым изменениям по  $x$  и по  $t$ , что отвечает отрицательным значениям параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и, соответственно, большим значениям дифференциальных операторов  $\partial_x$  и  $\partial_t$ . В этих условиях результаты, получаемые в первом приближении, нуждаются в уточнениях, достигаемых путем построения процедур последовательных приближений.

Представим искомые функции в виде рядов:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i; \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i; \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i; \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i; \\ Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i; \quad M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i; \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i; \quad K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \end{aligned} \quad (3)$$

Упрощенные уравнения (2) порождают бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\partial_x^2 \varphi_i + c \partial_x W_i + c \partial_x V_{i-1} - 8a_s^2 (\partial_x w_i + \varphi_{i-1}) - \partial_t^2 \varphi_i = 0; \quad (4)$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w_i + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi_{i-1} + W_{i-1} + cV_{i-2} - \partial_t^2 w_i = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w_i + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi_{i-1} + 24(W_{i-1} + cV_{i-2}) + \partial_t^2 W_i = 0;$$

$$8(V_{i-1} + c \partial_x \varphi_i + cW_i) + \varepsilon \partial_t^2 V_i = 0; \quad Q_i = \partial_x w_i + \varphi_{i-1};$$

$$M_i = \partial_x \varphi_i + c(W_i + V_{i-1}); \quad N_i = W_i + c(\partial_x \varphi_i + V_{i-1});$$

$$K_i = V_{i-1} + c(\partial_x \varphi_i + W_i), \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Решение этих уравнений разыскиваем в виде:

$$w_i = \sum_{j=2}^i w_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i w_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \quad (5)$$

$$W_i = \sum_{j=2}^i W_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i W_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^i \varphi_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i \varphi_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i V_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j+1} + \sum_{j=1}^i V_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j+1}$$

$$Q_i = \sum_{j=2}^i Q_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=1}^i Q_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}$$

$$M_i = \sum_{j=1}^i M_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i M_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^i N_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i N_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}$$

$$K_i = \sum_{j=1}^i K_{ij}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i K_{ij}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}$$

Выражения вида  $t-x$  определены при  $x \leq t$  и равны нулю при  $x > t$ ; выражения вида  $a_s t-x$  определены при  $x \leq a_s t$  и равны нулю при  $x > a_s t$ . Коэффициенты сумм (4) определены при значениях  $j$ , заданных в записях соответствующих сумм. Если индекс выходит за указанные пределы, то коэффициенты считаются равными нулю.

После подстановки решений (5) в рекуррентные уравнения (4), а также применения к получившемуся результату некоторых несложных математических преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} w_{ij}^1 &= \frac{1}{(1-a_s^2)(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)} \times \\ &\times \{ a_s^2 (i-j+2)(i-j+1) w_{i,j-2}^1 - \\ &- 2a_s^2 (i-j+1)(\gamma+i+j-2) w_{i,j-1}^1 + (a_s^2 + c) \times \\ &\times [(i-j+1) \varphi_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2) \varphi_{i-1,j-1}^1] + \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 &+W_{i-1,j-1}^1+cV_{i-2,j-2}^1\}, \quad (i=2,3,\dots;j=2,\dots,i); \\
 w_{i,j-1}^2 &= \frac{1}{2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)}\{a_s^2(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2- \\
 &+(a_s^2+c)\times \\
 &\times[(i-j+1)\varphi_{i-1,j-2}^2-(\gamma+i+j-2)\varphi_{i-1,j-1}^2]+W_{i-1,j-1}^2+cV_{i-2,j-2}^2\}, \\
 &(i=2,3,\dots;j=2,\dots,i); \\
 W_{ij}^1 &= -\frac{1}{(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)}\times \\
 &\times\{8a_s^2[(i-j+1)(w_{i,j-2}^1(i-j+2)-2w_{i,j-1}^1(\gamma+i+j-2))+ \\
 &+w_{i,j}^1(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)]+ \\
 &+(8a_s^2+24c)(\varphi_{i-1,j-2}^1(i-j+1)-(\gamma+i+j-2)\varphi_{i-1,j-1}^1)+ \\
 &+24(W_{i-1,j-1}^1+cV_{i-2,j-2}^1)\}, \quad (j=2,\dots,i); \\
 W_{ij}^2 &= -\frac{1}{(\gamma+i+j-1)(a_s)^2(\gamma+i+j-2)}\times \\
 &\times\{8a_s^2[(i-j+1)(w_{i,j-2}^2(i-j+2)-2w_{i,j-1}^2(\gamma+i+j-2))+ \\
 &+w_{i,j}^2(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)]+ \\
 &+(8a_s^2+24c)(\varphi_{i-1,j-2}^2(i-j+1)-\varphi_{i-1,j-1}^2(\gamma+i+j-2))+ \\
 &+24W_{i-1,j-1}^2+24cV_{i-2,j-2}^2\}, \quad (j=1,\dots,i); \\
 \varphi_{i,j-1}^1 &= \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)}\times \\
 &\times\{(i-j+2)(i-j+1)\varphi_{i,j-2}^2+c[(i-j+1)W_{i,j-1}^1- \\
 &-(\gamma+i+j-1)W_{ij}^1+(i-j+1)V_{i-1,j-2}^1- \\
 &-(\gamma+i+j-1)V_{i-1,j-1}^1]-8a_s^2[(i-j+1)w_{i,j-1}^1- \\
 &-(\gamma+i+j-1)w_{ij}^1+\varphi_{i-1,j-1}^1]\}, \quad (i=2,3,\dots;j=2,\dots,i); \\
 \varphi_{ij}^2 &= -\frac{1}{(1-a_s^2)(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)}\times \\
 &\times\{(i-j+1)[(i-j+2)\varphi_{i,j-2}^1-2(\gamma+i+j-1)\varphi_{i,j-1}^2]+ \\
 &+c[(i-j+1)W_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j-1)W_{ij}^2+ \\
 &+(i-j+1)V_{i-1,j-2}^2-(\gamma+i+j-1)V_{i-1,j-1}^2]- \\
 &-8a_s^2[(i-j+1)w_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j-1)w_{ij}^2+\varphi_{i-1,j-1}^2]\}, \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^1 &= -\frac{8}{\varepsilon(\gamma+i+j+1)(\gamma+i+j)}\times \\
 &\times\{V_{i-1,j-1}^1+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^1+W_{ij}^1]\}, \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 V_{ij}^2 &= -\frac{8}{\varepsilon a_s^2(\gamma+i+j+1)(\gamma+i+j)}\times \\
 &\times\{V_{i-1,j-1}^2+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^2+W_{ij}^2]\}, \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 Q_{ij}^1 &= (i-j+1)w_{i,j-1}^1-(\gamma+i+j-1)w_{ij}^1+\varphi_{i-1,j-1}^1, \\
 &(i=2,3,\dots;j=2,\dots,i); \\
 Q_{ij}^2 &= (i-j+1)w_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j-1)w_{ij}^2+\varphi_{i-1,j-1}^2, \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 M_{ij}^1 &= (i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^1+c(W_{ij}^1+V_{i-1,j-1}^1), \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 M_{ij}^2 &= (i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^2+c(W_{ij}^2+V_{i-1,j-1}^2), \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 N_{ij}^1 &= W_{ij}^1+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^1+V_{i-1,j-1}^1], \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 N_{ij}^2 &= W_{ij}^2+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^2+V_{i-1,j-1}^2], \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 K_{ij}^1 &= V_{i-1,j-1}^1+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^1+W_{ij}^1], \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i); \\
 K_{ij}^2 &= V_{i-1,j-1}^2+c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2-(\gamma+i+j)\varphi_{ij}^2+W_{ij}^2], \\
 &(i=1,2,\dots;j=1,\dots,i).
 \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения (6) не позволяют находить коэффициенты вида  $\varphi_{ii}^1$  и  $w_{ii}^2$ . Эти коэффициенты находятся при помощи граничных условий. При задании этих условий учтем, что решение вида (5) описывает распространение упругой волны в положительном направлении из точки  $x=0$ , т.е. от торца полубесконечной балки  $x\geq 0$ .

Основной нагрузкой здесь является перерезывающая сила, заданная при  $x=0$ . В соответствии с (3) и (6) имеем:

$$Q(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (Q_{ii}^1 + Q_{ii}^2 a_s^{\gamma+2(i-1)}) t^{\gamma+2(i-1)} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{\gamma+2(i-1)} \quad (7)$$

Отсюда, с учетом (6), будет:

$$w_{ii}^2 = \frac{1}{\gamma + 2i - 1} \left\{ \frac{1}{a_s^{\gamma+2(i-1)}} [w_{i,i-1}^1 - (\gamma + 2i - 1)w_{ii}^1 + \varphi_{i-1,i-1}^1 - f_i] + w_{i,i-1}^2 + \varphi_{i-1,i-1}^2 \right\}, (i = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

В случае внезапно приложенной единичной постоянной силы задаем:

$$\gamma = 0, \quad f_i = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

Кроме того, на конце балки задаем нулевой изгибающий момент:

$$M(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_{ii}^1 + M_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i-1}) t^{\gamma+2i-1} = 0 \quad (9)$$

Отсюда, с учетом (6), получаем:

$$\varphi_{ii}^1 = \frac{1}{\gamma + 2i} \left\{ \varphi_{i,i-1}^1 + c(W_{ii}^1 + V_{i-1,i-1}^1) + a_s^{\gamma+2i-1} [\varphi_{i,i-1}^2 - (\gamma + 2i)\varphi_{ii}^2 + c(W_{ii}^2 + V_{i-1,i-1}^2)] \right\}, (i = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

В точке  $x = 0$  может быть также задано кинематическое условие:

$$\varphi(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{ii}^1 + \varphi_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i}) t^{\gamma+2i} = 0 \quad (11)$$

Отсюда:

$$\varphi_{ii}^1 = -\varphi_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

Таким образом, задавая (7), (9) или (11) мы имеем возможность находить все коэффициенты сумм (5) по решениям (6), (8) и (10) или (12), т.е. доводить решение до конца.

Остановимся коротко на вопросе о сходимости построенных рядов. Эти ряды носят название так называемой прифронтной асимптотики. Это означает, что они в первую очередь предназначены для описания зоны вблизи фронта волны. В каждый член ряда входит величина  $t - x$  и  $a_s t - x$ . При малых значениях этих величин общий член ряда стремится к нулю. Т.е. выполняется необходимое условие сходимости. Ранее было показано [5, 6], что удержание только слагаемых, преобладающих вблизи фронта, приводит к рядам для функции Бесселя, для которых сходимость доказана.

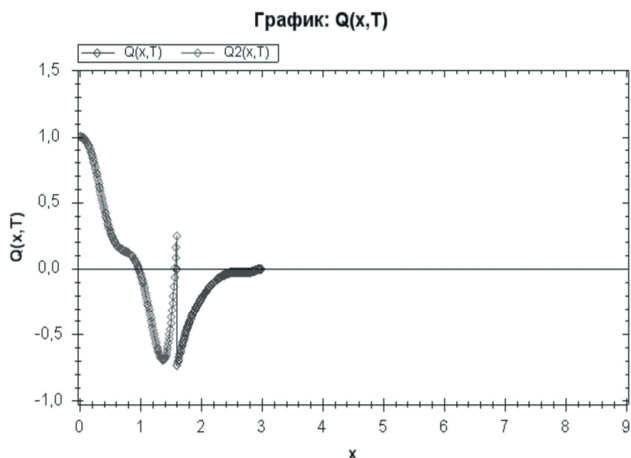


Рис. 1. Распространение волны  $Q(x, \tau)$  в стержне квадратного сечения  $\tau = 3$

На рис. 1, 2 приведены соответствующие графические результаты. Изображены графики перерезывающей силы, как функции  $x$  для моментов времени  $\tau = 3$  и  $\tau = 8$ . Мы видим, что в отличие от картины, получаемой при помощи известных уравнений изгиба стержня, картина вблизи фронта распространяющейся волны выглядит значительно сложнее. Вблизи трехмерного фронта волны наблюдаются интенсивные поперечные колебания стержня, которые приводят к быстроизменяющемуся напряженно-деформированному состоянию. В дальнейшем происходит переход к классическому решению в виде так называемого квазифронта, то есть не ступенчатого, а быстроизменяющегося роста продольного усилия. С удалением от фронта, картина переходит в классическую. Таким образом, классическое решение для продольной волны в стержне – это медленноизменяющаяся асимптотика по отношению к более точному решению.

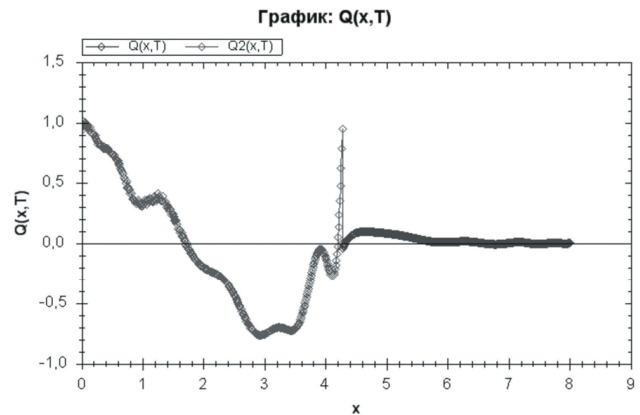


Рис. 2. Распространение волны  $Q(x, \tau)$  в стержне квадратного сечения  $\tau = 8$

### 3. Выводы

Исследование распространения нестационарного волнового возмущения в балке при воздействии внезапно приложенной перерезывающей силы на основе предлагаемых уточненных уравнений показало, что картина возмущения хорошо соответствует трехмерным уравнениям теории упругости. В частности, возмущение имеет два фронта – продольных и поперечных волн, причем скорости этих фронтов совпадают со скоростями таких же фронтов в теории упругости.

### Литература

1. Егармина Л. Н. Уточненные динамические уравнения изгиба балки с учетом трехмерной картины напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении балки [Текст] / Егармина Л. Н., Шамровский А. Д. // Сб. науч. тр. «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2010». Том 5. – Одесса: Черноморье, 2010. – С. 28–37.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко – М., «Наука», 1967. 444 с.

3. Бабаков И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков – М., «Наука», 1968. 559 с.
4. Егармина Л. Н. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости [Текст] / Л. Н. Егармина, А. Д. Шамровский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні 2009. – №2. – С. 111 – 115.
5. Шамровский А. Д. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое [Текст] / А. Д. Шамровский, И. А. Скрыпник // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства – Запорожье, 1995. – С. 43–50.
6. Шамровский А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровский – Запорожье, Издательство ЗГИА, 1997 – 169 с.

УДК 621.9.048

# ФОРМИРОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ ЗОН В РАБОЧЕЙ СРЕДЕ ПРИ КОНТЕЙНЕРНОЙ ВИБРООБРАБОТКЕ

**М. А. Калмыков**

Кандидат технических наук  
Кафедра конструирования станков и машин  
Механико-машиностроительный институт  
Национальный технический университет «Киевский  
политехнический институт»  
пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056  
Контактный тел.: (044) 454-94-61

*Розглянуто геометричні питання теорії віброобробки, пов'язані з вибором найбільш прийнятної конфігурації контейнера у випадках впливу зовнішнього силового поля збудження. Приведено аналітичну схему рішення зворотної задачі*

*Ключові слова: віброобробка, консервативна зона, поле збудження, вихресток*

*Рассмотрены геометрические вопросы теории виброобработки, связанные с выбором наиболее приемлемой конфигурации контейнера в случаях воздействия внешнего силового поля возбуждения. Приведена аналитическая схема решения обратной задачи*

*Ключевые слова: виброобработка, консервативная зона, поле возбуждения, вихресток*

*The geometrical questions of theory of vibrotreatment, related to the choice of the most acceptable configurations of container in cases trivial-parallel the external power field of excitation are considered. The analytical chart of decision of reverse task is resulted*

*Keywords: vibrotreatment, conservative area, field of excitation, vortex drain*

## Введение

В работах [1],[2] был сформулирован полуфеноменологический подход к созданию теории контейнеров виброобработки, который предполагает зависимость макропараметров рабочей среды от ее микропараметров на уровне отдельных частиц абразива. При этом влияние «кинетических» процессов, связанных с рассеянием массы при многочастичных столкновениях структурных элементов рабочей среды, на формирование макропараметров обусловлено только действием внешнего силового поля возбуждения (1) из [1]  $\vec{F}(N,t)$  (здесь также как и в работе [2] используются обозна-

чения работы [1]). Заметим, что динамическое поле имеет вид

$$\vec{F}(N,t) = \vec{F}_{s.p.}(N,t) + \vec{F}_{r.p.}(N,t), \tag{1}$$

где  $\vec{F}_{s.p.}(N,t)$  – соленоидально-потенциальное поле, а случайная вектор-функция  $\vec{F}_{r.p.}(N,t)$  отвечает за вихреобразование в обрабатывающей среде. Таким образом, математический аппарат предлагаемой теории виброобработки носит наиболее общий характер с возможностями конкретных практических приложений. Полуфеноменологическая трактовка движения массовых потоков в рабочей среде и их