УДК 512.643.8:531.3

ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АССОЦИАТИВНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра автомобилей
Национальная горная академия
пр. К. Маркса, 19, г. Днепропетровск, Украина, 49027
Контактный тел.: 067-72-607-72

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 050-321-14-60

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретична механика»*
Контактный тел.: 067-921-10-67; (056) 713-58-03
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна
ул. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Методом математичної індукції будується процедура векторного представлення асоціативних добутків спряжених кватерніоних матриць. Знаходяться розгорнуті символьні формули, які встановлюють еквівалентні відповідності асоціативних добутків кватерніоних матриць та мультиплікативних композицій векторної алгебри

Ключові слова: кватерніоні матриці, мультиплікативні композиції, асоціативні добутки, векторне представлення

Методом математической индукции строится процедура векторного представления ассоциативных произведений сопряженных кватернионных матриц. Находятся развернутые символические формулы, устанавливающие эквивалентные соответствия ассоциативных произведений кватернионных матриц и мультипликативных композиций векторной алгебры

Ключевые слова: кватернионные матрицы, мультипликативные композиции, ассоциативные произведения, векторное представление

Using mathematical induction the procedure of vector representation of adjoint quaternionic matrices' associative products were built. Some symbolic formulas that shows an equivalence of associative products of quaternionic matrices and multiplicative compositions of vector algebra

Key words: quaternionic matrices, multiplicative compositions, associative products, vector presentation

Введение

Как было показано в [3], исчисление введенных кватернионных матриц изоморфно алгебре кватернионов, обобщает алгебру комплексных чисел, векторную алгебру на плоскости и в трехмерном пространстве [1, 8], а также удобно представляет операции конечного поворота в пространстве, если в качестве элементов кватернионных матриц использовать параметры Родрига-Гамильтона[2]. Задача по представлению кватернионными матрицами сложных векторно-скалярных произведений нескольких векторов решалась в [5, 6]. В данной статье рассматривается обратная задача по представлению ассоциативных произведений кватернионных матриц в векторной форме. Приводятся подробные процедуры и устанавливаются развернутые символические формулы, отражающие эквивалентные соответствия множества ассоциативных произведений рассматриваемых кватернионных матриц мультипликативным композициям векторной алгебры, содержащим сложные векторно-скалярные произведения нескольких векторов.

Постановка задачи

Рассматриваются два $\bar{a},\bar{b}$, три $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, четыре $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ и более векторов, которым сопоставляются по две сопряженные кватернионные матрицы вида A_0, A_0^t при равной нулю скалярной части ($a_0 = 0$). Требуется построить множества ассоциативных произведений исходных сопряженных кватернионных матриц, соответствующих двум, трем, четырем и более векторам и найти соответствующие им векторные представления.

Решение задачи

Введем обозначения

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\bar a\cdot\bar b,\ \text{т.е.}\ \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}=\bar a\cdot\bar b$$

$$a_2b_3-a_3b_2=\left(\bar a\times\bar b\right)_1$$

$$a_3b_1-a_1b_3=\left(\bar a\times\bar b\right)_2$$

$$a_1b_2-a_2b_1=\left(\bar a\times\bar b\right)_3,$$

$$\text{т.е.[7]}\ \begin{Vmatrix} 0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\left(\bar a\times\bar b\right)_1\\ \left(\bar a\times\bar b\right)_2\\ \left(\bar a\times\bar b\right)_3\end{Vmatrix}=\bar a\times\bar b$$

Тогда имеют место эквивалентные соотношения:

$$A_0\cdot b_0\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\bar b\\ \hline \left(\bar a\times\bar b\right)_1\\ \left(\bar a\times\bar b\right)_2\\ \left(\bar a\times\bar b\right)_3\end{Vmatrix},\quad A_0^t\cdot b_0\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\bar b\\ \hline -\left(\bar a\times\bar b\right)_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_2\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3\end{Vmatrix},$$

или [5]

$$A_0\cdot b_0\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\bar b\\ \hline \bar a\times\bar b\end{Vmatrix},\quad A_0^t\cdot b_0\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\bar b\\ \hline -\left(\bar a\times\bar b\right)\end{Vmatrix},$$

где A_0, A_0^t - кватернионные матрицы при $a_0=0$:

$$A_0=\begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1\\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix},\quad A_0^t=\begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & a_3 & -a_2\\ -a_2 & -a_3 & 0 & a_1\\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Для мультипликативных композиций трех векторов $\bar a,\bar b,\bar c$ могут быть построены два варианта ассоциативного умножения рассматриваемых кватернионных матриц [5]:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

Здесь в развернутом виде получим:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1\\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\bar b\cdot\bar c\\ \hline \left(\bar b\times\bar c\right)_1\\ \left(\bar b\times\bar c\right)_2\\ \left(\bar b\times\bar c\right)_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1+a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3\\ \hline -a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2+a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_3\\ -a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_1-a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3\\ -a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1+a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_2\end{Vmatrix}$$

или в эквивалентной записи:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\\ \hline -\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\end{Vmatrix}.$$

Аналогично получим[5]:

$$A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\leftrightarrow\begin{Vmatrix}-\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\\ \hline -\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\\ \hline -\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\leftrightarrow\begin{Vmatrix}-\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\\ \hline -\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\end{Vmatrix}.$$

При рассмотрении ассоциативного произведения вида $\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0$ воспользуемся результатами [4], где с точностью до обозначений получим в развернутом виде:

$$A_0\cdot B_0=\begin{Vmatrix} -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & \left(\bar a\times\bar b\right)_1 & \left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_3\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_1 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3 & \left(\bar a\times\bar b\right)_2\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_3 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_1 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)\end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0=\begin{Vmatrix}\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3\\ \hline -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3\\ -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3\\ -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2\end{Vmatrix}$$

или в символической записи

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0\leftrightarrow\begin{Vmatrix}\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\\ \hline -\left(\bar a\cdot\bar b\right)\bar c+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\end{Vmatrix}.$$

Для ассоциативного произведения вида $\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0$ также воспользуемся результатами [4], где

$$A_0\cdot B_0^t=\begin{Vmatrix} -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_1 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)-2a_1b_1 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3-2a_2b_1 & \left(\bar a\times\bar b\right)_2-2a_3b_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_3-2a_1b_2 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)-2a_2b_2 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1-2a_3b_2\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2-2a_1b_3 & \left(\bar a\times\bar b\right)_1-2a_2b_3 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)-2a_3b_3\end{Vmatrix}$$

тогда:

$$\left(A_0 \cdot B_0^t\right)\cdot c_0 = \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_1 - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_2 - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_3 \\ \hline \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_1 - 2\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}_1 - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_2 - 2\bar{a}_2\bar{b}_1\bar{c}_2 + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_3 - 2\bar{a}_3\bar{b}_1\bar{c}_3 \\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_2 - 2\bar{a}_2\bar{b}_2\bar{c}_2 + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_1 - 2\bar{a}_1\bar{b}_2\bar{c}_1 - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_3 - 2\bar{a}_3\bar{b}_2\bar{c}_3 \\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_3 - 2\bar{a}_3\bar{b}_3\bar{c}_3 - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_1 - 2\bar{a}_1\bar{b}_3\bar{c}_1 + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_2 - 2\bar{a}_2\bar{b}_3\bar{c}_2 \end{array} \right\|$$

или, упорядочив выражение, получим:

$$\left(A_0 \cdot B_0^t\right)\cdot c_0 = \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} \\ \hline \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_1 - 2\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_1 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_1 \\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_2 - 2\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_2 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_2 \\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_3 - 2\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_3 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_3 \end{array} \right\|$$

т.е. в символической записи:

$$\left(A_0 \cdot B_0^t\right)\cdot c_0 \leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} \\ \hline \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c} - 2\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\bar{b} + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c} \end{array} \right\|.$$

Аналогично устанавливаем:

$$\left(A_0^t \cdot B_0\right)\cdot c_0 \leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} \\ \hline \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c} - 2\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\bar{b} + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c} \end{array} \right\|,$$

$$\left(A_0^t \cdot B_0^t\right)\cdot c_0 \leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} \\ \hline -\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) + \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c} \end{array} \right\|.$$

Мультипликативным композициям четырех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ соответствуют пять вариантов ассоциативных произведений рассматриваемых кватернионных матриц [5, 6]:

1. $$\begin{gathered} A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\cdot d_0\right)\right] = A_0\cdot\left[\left(B_0\cdot C_0\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot C_0\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0\cdot\left(B_0\cdot C_0\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0\cdot B_0\right)\cdot\left(C_0\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

2. $$\begin{gathered} A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right)\right] = A_0\cdot\left[\left(B_0\cdot C_0^t\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0\cdot\left(B_0\cdot C_0^t\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0\cdot B_0\right)\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

3. $$\begin{gathered} A_0\cdot\left[B_0^t\cdot\left(C_0\cdot d_0\right)\right] = A_0\cdot\left[\left(B_0^t\cdot C_0\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot C_0\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0\cdot\left(B_0^t\cdot C_0\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot\left(C_0\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

4. $$\begin{gathered} A_0\cdot\left[B_0^t\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right)\right] = A_0\cdot\left[\left(B_0^t\cdot C_0^t\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0\cdot\left(B_0^t\cdot C_0^t\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

5. $$\begin{gathered} A_0^t\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\cdot d_0\right)\right] = A_0^t\cdot\left[\left(B_0\cdot C_0\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot C_0\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0^t\cdot\left(B_0\cdot C_0\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot\left(C_0\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

6. $$\begin{gathered} A_0^t\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right)\right] = A_0^t\cdot\left[\left(B_0\cdot C_0^t\right)\cdot d_0\right] = \left[\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0 = \\ = \left[A_0^t\cdot\left(B_0\cdot C_0^t\right)\right]\cdot d_0 = \left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

7. $$\begin{gathered} A_0^t\cdot\left[B_0^t\cdot\left(C_0\cdot d_0\right)\right] = A_0^t\cdot\left[\left(B_0^t\cdot C_0\right)\cdot d_0\right] = \\ = \left[\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot C_0\right]\cdot d_0 = \left[A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot C_0\right)\right]\cdot d_0 = \\ = \left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot\left(C_0\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

8. $$\begin{gathered} A_0^t\cdot\left[B_0^t\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right)\right] = A_0^t\cdot\left[\left(B_0^t\cdot C_0^t\right)\cdot d_0\right] = \\ = \left[\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0 = \left[A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot C_0^t\right)\right]\cdot d_0 = \\ = \left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot\left(C_0^t\cdot d_0\right), \end{gathered}$$

Представим приведенные ассоциативные произведения кватернионных матриц мультипликативными композициями четырех векторов, содержащими скалярные и векторные произведения. Рассматривая ассоциативное произведение вида $A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\odot d_0\right)\right]$, воспользуемся ранее полученными результатами в координатной форме:

$$A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\odot d_0\right)\right] =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 + b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 + b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 \\ \hline -b_1\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 + b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 \\ -b_2\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 - b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 \\ -b_3\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 + b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 \end{array} \right\|$$

или в развернутой записи:

$$A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\odot d_0\right)\right] =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} -a_1b_1\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + a_1\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_1 - a_2b_2\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + \\ +a_2\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_2 - a_3b_3\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + a_3\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_3 \\ \\ -a_1b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 - a_1b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 - a_1b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 + a_3b_2\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \\ -a_3\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_2 - a_2b_3\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + a_2\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_3 \\ \\ -a_2b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 - a_2b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 - a_2b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 - a_3b_1\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + \\ +a_3\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_1 + a_1b_3\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - a_1\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_3 \\ \\ -a_3b_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1 - a_3b_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2 - a_3b_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3 + a_2b_1\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \\ -a_2\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_1 - a_1b_2\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + a_1\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]_2 \end{array} \right\|$$

Свернув запись, получим эквивалентную, символическую формулу:

$$A_0\left[B_0\left(C_0\odot d_0\right)\right] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + \bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right] \\ \hline -\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right] - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) + \bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right] \end{array} \right\|;$$

Аналогично получим:

$$A_0\left[\left(B_0\odot C_0\right)d_0\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\\ \hline -\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\end{array}\right\|;$$

$$\left[\left(A_0\odot B_0\right)C_0\right]d_0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}\\ \hline -\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}\end{array}\right\|;$$

$$\left[A_0\left(B_0\odot C_0\right)\right]d_0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}\\ \hline -\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}\end{array}\right\|;$$

$$A_0\left[B_0\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline \bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0\left[B_0^t\left(C_0\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline -\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0\left[B_0^t\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline \bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0\left[\left(B_0^t\odot C_0^t\right)d_0\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\\ \hline \bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[B_0\left(C_0\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline -\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[\left(B_0\odot C_0\right)d_0\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\\ \hline -\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[B_0\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline \bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[B_0^t\left(C_0\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline -\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\\ \hline \bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\end{array}\right\|;$$

$$A_0^t\left[\left(B_0^t\odot C_0^t\right)d_0\right]\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\\ \hline \bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]\end{array}\right\|;$$

$$\left[\left(A_0^t\odot B_0^t\right)C_0^t\right]d_0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}\\ \hline \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}\end{array}\right\|;$$

$$\left[A_0^t\left(B_0^t\odot C_0^t\right)\right]d_0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}\\ \hline \left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}\end{array}\right\|;$$

При рассмотрении ассоциативного произведения вида $\left(A_0\cdot B_0\right)\left(C_0\cdot d_0\right)$ использованы приведенные формулы:

$$\left(A_0\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)=$$

$$=\left\|\begin{array}{cccc}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3\\ -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 & -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) & -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2\\ -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 & -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) & -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1\\ -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 & -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 & \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 & -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\end{array}\right\|\left\|\begin{array}{c}\bar{c}\cdot\bar{d}\\ \left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1\\ \left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2\\ \left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3\end{array}\right\|.$$

Тогда:

$$\left(A_0\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3\\ \hline -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3\\ -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3\\ -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_3-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_1+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)_2\end{array}\right\|$$

или в символической записи:

$$\left(A_0\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\begin{array}{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\\ \hline -\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\end{array}\right\|;$$

а также[6]:

$$\left(A_0 \odot B_0\right)\left(C_0^t \odot d_0\right) \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)} \right\|;$$

$$\left(A_0^t \odot B_0^t\right)\left(C_0 \odot d_0\right) \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)} \right\|;$$

$$\left(A_0^t \odot B_0^t\right)\left(C_0^t \odot d_0\right) \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)} \right\|;$$

При рассмотрении ассоциативного произведения вида $A_0\left[\left(B_0 \odot C_0^t\right)d_0\right]$ используется структура ранее приведенной формулы:

$$A_0\left[\left(B_0 \odot C_0^t\right)d_0\right] = \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d} \\ \hline \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\bar{d}_1-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)\bar{c}_1+\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_1 \\ \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\bar{d}_2-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)\bar{c}_2+\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_2 \\ \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\bar{d}_3-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)\bar{c}_3+\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_3 \end{Vmatrix}$$

откуда

$$A_0\left[\left(B_0 \odot C_0^t\right)d_0\right] = \begin{Vmatrix} \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_1d_1-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_1c_1+a_1\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_1+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_2d_2-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_2c_2+ \\ +a_2\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_2+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_3d_3-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_3c_3+a_3\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_3 \\ \\ a_1\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_3d_2+2\left(\bar{b}\cdot d\right)a_3c_2-a_3\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_2+ \\ +\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_2d_3-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_2c_3+a_2\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_3 \\ \\ a_2\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_3d_1+2\left(\bar{b}\cdot d\right)a_3c_1-a_3\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_1+ \\ +\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_1d_3-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_1c_3+a_1\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_3 \\ \\ a_3\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_2d_1+2\left(\bar{b}\cdot d\right)a_2c_1-a_2\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_1+ \\ +\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)a_1d_2-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)a_1c_2+a_1\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]_2 \end{Vmatrix}$$

или, сгруппировав соответствующие слагаемые, получим следующую символическую запись:

$$A_0\left[\left(B_0 \odot C_0^t\right)d_0\right] \leftrightarrow \left\| \frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-2(\bar{a}\times\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]} \right\|.$$

Аналогично получим[6]:

$$\left[A_0\left(B_0^t \odot C_0\right)\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}-2\left(b\cdot\bar{d}\right)(\bar{a}\times\bar{c})+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

$$A_0^t\left[\left(B_0 \odot C_0^t\right)d_0\right] \leftrightarrow \left\| \frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+2(\bar{a}\times\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]} \right\|;$$

$$\left[A_0^t\left(B_0\odot C_0^t\right)\right]d_0\leftrightarrow\left\|\frac{\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d}{\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d+2\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\times\bar d\right)}\right\|;$$

$$A_0^t\left[\left(B_0^t\odot C_0\right)d_0\right]\leftrightarrow\left\|\frac{\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)+\bar a\cdot\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]}{-\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]-\left(\bar a\times\bar d\right)\left(\bar b\cdot\bar c\right)+2\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\bar a\times\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]}\right\|;$$

При рассмотрении ассоциативного произведения вида $\left[\left(A_0\odot B_0\right)C_0^t\right]d_0$ воспользуемся ранее полученной формулой и найдем:

$$\left(A_0\odot B_0\right)C_0^t=\begin{Vmatrix}-\left(\bar a\cdot\bar b\right) & \left(\bar a\times\bar b\right)_1 & \left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_3\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_1 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3 & \left(\bar a\times\bar b\right)_2\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_3 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right) & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2 & \left(\bar a\times\bar b\right)_1 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0 & c_1 & c_2 & c_3\\ -c_1 & 0 & c_3 & -c_2\\ -c_2 & -c_3 & 0 & c_1\\ -c_3 & c_2 & -c_1 & 0\end{Vmatrix};$$

т.е.

$$\left(A_0\odot B_0\right)C_0^t=\left\|\begin{matrix}-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2-\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2\\ \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1+\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1+\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2\\ \left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2+\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3-\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}-\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2-\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3+\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2-\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2+\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3-\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2-\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1\\ -\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2-\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3+\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1 & -\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3+\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1+\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2\end{matrix}\right\|$$

или

$$\left(A_0\odot B_0\right)C_0^t=\left\|\begin{matrix}-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right] & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_1\\ \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_1 & \left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]-2\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_1\\ \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_2 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_3-2\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_2\\ \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_3 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_2-2\left(\bar a\times\bar b\right)_1c_3\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}-\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_2 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_3\\ -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_3-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_3-2\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_1 & \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_2+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_2-2\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_1\\ \left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]-2\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_2 & -\left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_1-2\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_2\\ \left(\bar a\cdot\bar b\right)c_1+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times c\right]_1-2\left(\bar a\times\bar b\right)_2c_3 & \left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]-2\left(\bar a\times\bar b\right)_3c_3\end{matrix}\right\|$$

Откуда получаем:

$$\left[\left(A_0 \odot B_0\right)C_0^t\right]d_0 = \left\| \begin{array}{c} -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_1d_1 - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_1 d_1 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_2d_2 - \\ -\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_2 d_2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_3d_3 - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_3 d_3 \\ \hline \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]d_1 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_1d_1 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_3d_2 - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_3 d_2 - \\ -2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_1d_2 + \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_2d_3 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_2 d_3 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_1d_3 \\ \\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_3d_1 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_3 d_1 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_2d_1 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]d_2 - \\ -2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_2d_2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_1d_3 - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_1 d_3 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_2d_3 \\ \\ -\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_2d_1 - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_2 d_1 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_1 c_3d_1 + \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)c_1d_2 + \\ +\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]_1 d_2 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_2 c_3d_2 + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]d_3 - 2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 c_3d_3 \end{array} \right\|$$

Свернув развернутую координатную запись к векторной форме, получим символическое тождество:

$$\left[\left(A_0 \odot B_0\right)C_0^t\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d} - 2\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c} + \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right) + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}} \right\|.$$

Аналогично получим[6]:

$$\left[\left(A_0 \odot B_0^t\right)C_0\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d} - 2\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{b} + \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right) + \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

$$\left[A_0\left(B_0^t \odot C_0^t\right)\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right) + \left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d} + 2\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right] - \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right) + \left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

$$\left[A_0^t\left(B_0 \odot C_0\right)\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right) + \left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d} - 2\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right] + \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right) - \left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

$$\left[\left(A_0^t \odot B_0\right)C_0^t\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d} + 2\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{b} - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

$$\left[\left(A_0^t \odot B_0^t\right)C_0\right]d_0 \leftrightarrow \left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d} + 2\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c} - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right) - \left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}} \right\|;$$

Для ассоциативного произведения вида $\left[A_0\left(B_0 \cdot C_0^t\right)\right]d_0$ предварительно найдем:

$$A_0\left(B_0 \odot C_0^t\right) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} -\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right) & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_1 & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_2 & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_3 \\ -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_1 & \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right) - 2b_1c_1 & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_3 - 2b_2c_1 & \left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_2 - 2b_3c_1 \\ -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_2 & \left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_3 - 2b_1c_2 & \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right) - 2b_2c_2 & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_1 - 2b_3c_2 \\ -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_3 & -\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_2 - 2b_1c_3 & \left(\bar{b}\times\bar{c}\right)_1 - 2b_2c_3 & \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right) - 2b_3c_3 \end{array} \right\|$$

т.е.

$$A_0\left(B_0\odot C_0^t\right)=\left\|\begin{matrix} -a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3 & a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_1b_1c_1+a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2a_2b_1c_2-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2a_3b_1c_3 \\ a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_3 & a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3+2a_3b_1c_2-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2a_2b_1c_3 \\ a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_1+a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3 & a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1+a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_3b_1c_1+a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_2+2a_1b_1c_3 \\ a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1+a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_2 & a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_1-a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)+2a_2b_1c_1+a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2a_1b_1c_2 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2a_1b_2c_1+a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_2b_2c_2+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2a_3b_2c_3 & a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2a_1b_3c_1-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2a_2b_3c_2+a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_3b_3c_3 \\ a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_2-a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)+2a_3b_2c_2+a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2a_2b_2c_3 & a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_1+2a_3b_3c_2+a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_2b_3c_3 \\ a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2a_3b_2c_1-a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1+2a_1b_2c_3 & a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_3+a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2a_3b_3c_1-a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)+2a_1b_3c_3 \\ a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2+a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_3+2a_2b_2c_1+a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2a_1b_2c_2 & a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3-a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2+2a_2b_3c_1-a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2a_1b_3c_2 \end{matrix}\right\|$$

или

$$A_0\left(B_0\odot C_0^t\right)=\left\|\begin{matrix} -\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right] & a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_1\left(\bar a\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1 \\ a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1 & 2a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]-2b_1\left(\bar a\times\bar c\right)_1 \\ a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2 & a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3+2a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2b_1\left(\bar a\times\bar c\right)_2 \\ a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3 & -a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2+2a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2b_1\left(\bar a\times\bar c\right)_3 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_2\left(\bar a\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2 & a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_3\left(\bar a\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3 \\ -a_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3+2a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2b_2\left(\bar a\times\bar c\right)_1 & a_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2+2a_1\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2b_3\left(\bar a\times\bar c\right)_1 \\ 2a_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]-2b_2\left(\bar a\times\bar c\right)_2 & -a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1+2a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2b_3\left(\bar a\times\bar c\right)_2 \\ a_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1+2a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2b_2\left(\bar a\times\bar c\right)_3 & -\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]+2a_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2b_3\left(\bar a\times\bar c\right)_3 \end{matrix}\right\|$$

Откуда получаем:

$$\left[A_0\left(B_0\odot C_0^t\right)\right]d_0=\left\|\begin{matrix} a_1d_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_1d_1\left(\bar a\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1d_1+a_2d_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_2d_2\left(\bar a\cdot\bar c\right)+ \\ +\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2d_2+a_3d_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-2b_3d_3\left(\bar a\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3d_3 \\ 2a_1d_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]d_1-2b_1d_1\left(\bar a\times\bar c\right)_1-a_3d_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3d_2+ \\ +2a_1d_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2b_2d_2\left(\bar a\times\bar c\right)_1+a_2d_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2d_3+2a_1d_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2b_3d_3\left(\bar a\times\bar c\right)_1 \\ a_3d_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_3d_1+2a_2d_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2b_1d_1\left(\bar a\times\bar c\right)_2+2a_2d_2\left(\bar b\times A\right)_2- \\ -\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]d_2-2b_2d_2\left(\bar a\times\bar c\right)_2-a_1d_3\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1d_3+2a_2d_3\left(\bar b\times\bar c\right)_3-2b_3d_3\left(\bar a\times\bar c\right)_2 \\ -a_2d_1\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_2d_1+2a_3d_1\left(\bar b\times\bar c\right)_1-2b_1d_1\left(\bar a\times\bar c\right)_3+a_1d_2\left(\bar b\cdot\bar c\right)+ \\ +\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]_1d_2+2a_3d_2\left(\bar b\times\bar c\right)_2-2b_2d_2\left(\bar a\times\bar c\right)_3-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]d_3+2a_3d_3\left(\bar b\times A\right)_3-2b_3d_3\left(\bar a\times\bar c\right)_3 \end{matrix}\right\|$$

Свернув координатную запись к векторной форме, получим символическое тождество:

$$\left[A_0\left(B_0\odot C_0^t\right)\right]d_0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\|\frac{\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d}{-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d+2\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]-2\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d+\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\times\bar d\right)}\right\|$$

Аналогично находим[6]:

$$\left[A_0^t\left(B_0^t\odot C_0\right)\right]d_0\leftrightarrow\left\|\frac{\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d}{\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d-2\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]+2\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)-\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\times\bar d\right)}\right\|;$$

а также

$$\left(A_0\odot B_0^t\right)\left(C_0\odot d_0\right)\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)-2\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|;$$

$$\left(A_0\odot B_0^t\right)\left(C_0^t\odot d_0\right)\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)+2\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b-\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|;$$

$$\left(A_0^t\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)-2\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|;$$

$$\left(A_0^t\odot B_0\right)\left(C_0^t\odot d_0\right)\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)+2\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b-\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|;$$

и т.д.

$$\left[\left(A_0\odot B_0^t\right)C_0^t\right]d_0\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d+2\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-2\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$\left[\left(A_0^t\odot B_0\right)C_0\right]d_0\leftrightarrow\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d-2\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b+2\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c+\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

Выводы

Методом математической индукции найдено векторное представление ассоциативных произведений сопряженных кватернионных матриц, соответствующих двум, трем, четырем векторам. Обобщение на большее число векторов громоздко, но очевидно. Полученные результаты использованы в двух направлениях:

• получение тождеств векторной алгебры,

• матричное представление операций векторной алгебры.

Литература

1. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский – М.: Наука, 1973. – 320с.
2. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. / В.Н. Кошляков – М.: Наука, 1985. – 288с.
3. Кравец В.В. Установление базиса кватернионных матриц. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 5/4 (41) – с.18-23.
4. Кравец В.В. Метод матричного представления мультипликативных композицій векторной алгебры. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 3/6 (45) – с.12-17.
5. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных не равным и противоположным векторам. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 2/9 (44) – с.56-61.
6. Кравец В.В. Представление кватернионными матрицами мультипликативных композиций четырех векторов. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 5/4 (47) – с.15-29.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье – М.: Физматгиз, 1961. – 824с.
8. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.