УДК 629.783

ДО ПИТАННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ ОРІЄНТАЦІЇ

В статті запропоновано метод визначення окремих елементів матриці орієнтації, які необхідні для отримання кутів орієнтації, а також застосування процедури ортогоналізації до розв'язку матричного методу оцінювання орієнтації. Проаналізовано вплив похибок окремих векторів в зв'язаній системі координат на точність отримуваних оцінок. Проведено порівняння з вже існуючими методами за точністю

Ключові слова: задача оцінювання орієнтації, ортогоналізація, критерій найменших квадратів, модель вимірювань

В статье предложен метод определения отдельных элементов матрицы ориентации, которые необходимы для получения углов ориентации, а также применение процедуры ортогонализации к решению матричного метода оценивания ориентации. Проанализировано влияние погрешностей отдельных векторов в связанной системе координат на точность получаемых оценок. Проведено сравнение с уже существующими методами по точности

Ключевые слова: задача оценивания ориентации, ортогонализация, критерий наименьших квадратов, модель измерений

Л. М. Рижков
Доктор технічних наук, профессор*
E-mail: lev_ryzhkov@rambler.ru
Д. І. Степуренко
Здобувач*
E-mail: d_stepurenko@ukr.net
*Кафедра приладів та систем керування літальними апаратами
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

1. Вступ

Детерміновані методи визначення орієнтації, що спочатку застосовувались на космічних апаратах (КА), останнім часом також широко застосовуються і на безпілотних літальних апаратах (БПЛА). Особливістю таких методів є використання інформації про певні зовнішні орієнтири або напрямки, що існують у просторі.

Особливістю приладів, що використовуються на малих літальних апаратах є їх невеликі розміри і маса, а також невисока точність. Тому важливим є питання оцінки точності, з якою може бути визначене кутове положення апарату, що в свою чергу передбачає аналіз впливу окремих складових похибок вимірювачів на підсумкову точність.

2. Аналіз літературних джерел

Необхідність оцінювання кутового положення космічних апаратів виникла майже одночасно з появою цих апаратів. Задача оцінювання орієнтації з використанням критерію найменших квадратів була сформульована Грейс Вахба в 1965 році [1]. В англомовній літературі дана задача відома як задача Вахба (Wahba's problem). В той же час були отримані і перші розв'язки даної задачі [2]. Оскільки ця задача була сформульована для матриці орієнтації, то і розв'язки також були отримані для матриці. Однак на час появи зазначені розв'язки мали певні обмеження, що не дозволили реалізувати їх на практиці. Як наслідок були розроблені більш ефективні методи, що використовували кватерніонне представлення орієнтації, зокрема q-метод та QUEST [3, 4]. Також були розроблені ефективні методи для визначення орієнтації, що використовують матрицю орієнтації, такі як SVD та FOAM [5, 6], а також параметри Родріга-Гамільтона [7].

3. Постановка задачі

Більшість відомих методів визначення орієнтації (МВО) визначають або матрицю або кватерніон орієнтації, яка характеризує взаємне кутове положення опорної та зв'язаної систем координат (ОСК та ЗСК відповідно). Однак при аналізі зручно користуватися кутами орієнтації, оскільки вони мають просту геометричну інтерпретацію. Крім того, в усталеному режимі польоту ці кути мають невеликі значення і не виникає ситуації, коли ці кути неможливо обчислити через особливості. В роботі пропонується визначати кути орієнтації, обчислюючи для цього лише ті елементи матриці орієнтації, які необхідні, виходячи з прийнятої послідовності поворотів.

4. Матричний метод розв'язку задачі оцінювання орієнтації

В ідеальному випадку при відсутності похибок вимірювань та обчислень виконується рівність

$$\vec{b}_i = A\vec{r}_i , \tag{1}$$

де $\vec{r}_i$ та $\vec{b}_i$ одиничні вектори базових напрямків в ОСК та ЗСК відповідно, A - матриця орієнтації, що переводить ОСК в ЗСК. Співвідношення (1) може бути записане матричній формі

$$M = AM_0, \tag{2}$$

де $M = \left[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right]$ та $M_0 = \left[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n\right]$ матриці розміром 3xn (n – кількість базових напрямків), побудовані з одиничних векторів. Оскільки вказані матриці в загальному випадку є прямокутними, то матриця орієнтації визначається так

$$A = MM_0^T\left(M_0M_0^T\right)^{-1}. \tag{3}$$

Вираз (2) при транспонуванні набуває вигляду

$$A^T = \left(M_0M_0^T\right)^{-1}M_0M^T, \tag{4}$$

який відповідає формі запису пакетного методу найменших квадратів (МНК). Слід зауважити, що для існування розв'язку в формі (3) чи (4) необхідна наявність мінімум трьох векторів напрямків. В протилежному випадку $M_0M_0^T$ буде сингулярною матрицею.

Внаслідок наявності похибок вимірювань векторів $\vec{b}_i$ в ЗСК матриця орієнтації, обчислена за (3) чи (4), не буде ортогональною. До отриманої оцінки матриці можна застосувати процедуру ортогоналізації. Це може бути виконано за допомогою наступного ітеративного співвідношення [8]

$$A_{n+1} = \frac{3}{2}A_n - \frac{1}{2}A_nA_n^TA_n. \tag{5}$$

В якості початкового значення використовується оцінка матриці, отримана за (3) чи (4). В якості критерію ортогональності використовується така величина

$$\eta = \left\|A\hat{A}^T - I_3\right\|_F^2, \tag{6}$$

де $\| \ \|_F$ - норма Фробеніуса (або норма Евкліда) для матриці.

5. Визначення окремих елементів матриці орієнтації

Відповідно до виразу (4) рядки матриці орієнтації визначаються рівняннями

$$\vec{p}_i = \left(M_0M_0^T\right)^{-1}M_0\vec{q}_i, \tag{7}$$

де $\vec{q}_1^* = \left[\vec{b}_{1x}^*, \vec{b}_{2x}^*, \ldots, \vec{b}_{nx}^*\right]^T$;

$\vec{q}_2^* = \left[\vec{b}_{1y}^*, \vec{b}_{2y}^*, \ldots, \vec{b}_{ny}^*\right]^T$;

$\vec{q}_3^* = \left[\vec{b}_{1z}^*, \vec{b}_{2z}^*, \ldots, \vec{b}_{nz}^*\right]^T$ - вектори-стовпчики, що відповідають окремим рядкам матриці M, а $\vec{p}_1 = \left[a_{11}, a_{12}, a_{13}\right]^T$,

$\vec{p}_2 = \left[a_{21}, a_{22}, a_{23}\right]^T$,

$\vec{p}_3 = \left[a_{31}, a_{32}, a_{33}\right]^T$ - вектори-стовпчики, що відповідають окремим рядкам матриці орієнтації A. Тут і надалі * позначає збурені значення векторів.

Як зазначалося для визначення кутів орієнтації необхідними є лише п'ять елементів матриці орієнтації. Взагалі достатньо лише трьох, однак задача визначення кутів при цьому значно ускладнюється. В роботі прийнята така послідовність кутів переходу від ОСК до ЗСК 3-2-1 (кути рискання ψ, тангажу ϑ та крену φ відповідно). За прийнятої послідовності кутів необхідними для їх визначення елементами матриці орієнтації є елементи першого рядка та третього стовпчика. Тоді

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right), \ \vartheta = \arcsin\left(-a_{13}\right), \ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right). \tag{8}$$

Як бачимо з (8) для визначення кутів необхідно мати цілий вектор $\vec{p}_1$ та треті елементи векторів $\vec{p}_2$ та $\vec{p}_3$. Останні отримуємо за формулами:

$$a_{23} = H^{(3)}\vec{q}_2, \ a_{33} = H^{(3)}\vec{q}_3 \tag{9}$$

де

$$H = \left(M_0M_0^T\right)^{-1}M_0, \tag{10}$$

а символами (3) позначений 3-й рядок матриці. Для випадку малих кутів вирази (8) можуть бути спрощені.

Запишемо вирази для тих елементів матриці орієнтації, які нам необхідні, в розгорнутому виді:

$$a_{11} = h_{11}b_{1x} + h_{12}b_{2x} + \ldots + h_{1n}b_{nx} \tag{11}$$

$$a_{12} = h_{21}b_{1x} + h_{22}b_{2x} + \ldots + h_{2n}b_{nx} \tag{12}$$

$$a_{13} = h_{31}b_{1x} + h_{32}b_{2x} + \ldots + h_{3n}b_{nx} \tag{13}$$

$$a_{23} = h_{31}b_{1y} + h_{32}b_{2y} + \ldots + h_{3n}b_{ny} \tag{14}$$

$$a_{33} = h_{31}b_{1z} + h_{32}b_{2z} + \ldots + h_{3n}b_{nz} \tag{15}$$

З виразів (11)-(15) можемо зробити висновок, що в ідеальному випадку кути рискання та тангажу визначаються лише x - проекціями базових векторів в ЗСК, а кут крену залежить від y-проекцій та z - проекцій цих векторів. Однак, зважаючи на те що при дії збурень зміна однієї з проекцій одиничного вектора змінює і дві інші, кожен з елементів матриці орієнтації залежить від всіх трьох проекцій кожного з базових векторів.

Матриця H може вважатися незмінною протягом певного часу. Елементи цієї матриці цілком залежать від складових базових векторів в ОСК. В роботі [9] показано, що похибки базових векторів в ОСК, викликані неточністю визначення орбітального положення космічного апарату, мають незначний вплив на точність оцінок параметрів орієнтації, і тому ними в більшості випадків можна знехтувати.

Незмінність величини H протягом певного часу може розглядатися як похибка визначення цієї величини порівняно з поточним значенням, і, як наслідок наведеного вище, нею можна знехтувати. Час, протягом якого матрицю H можна вважати незмінною, залежить від швидкості зміни положення КА або БПЛА в опорній системі координат. Незмінність матриці H дозволяє зменшити кількість обчислень, необхідних для визначення оцінок кутів орієнтації.

6. Тестування методів

При відсутності похибок вимірювань всі методи визначення орієнтації дають однаковий результат. Однак різні методи мають різну чутливість до похибок вимірювань базових векторів. Тому важливим є визначення впливу вказаних похибок на точність визначення параметрів орієнтації. В даній роботі вектори похибок вимірювань моделюються у відповідності до моделі вимірювань QUEST (QUEST measurement model) [4, 10]. Згідно з нею вектори вимірювань в ЗСК визначаються на основі співвідношення

$$\vec{b}_i^* = A\vec{r}_i + \Delta\vec{b}_i , \tag{16}$$

де $\Delta\vec{b}_i$ - вектор похибки вимірювання, який вважається таким, що має нормальний розподіл за величиною з нульовим м.о. та с.к.в. σ_i та рівномірний розподіл за кутом α (фазою) в площині, що перпендикулярна до істинного вектору; σ_i вимірюються в радіанах.

На рис. 1 зображене взаємне положення базових векторів в ЗСК, яке використовується в роботі. Вважається, що ЗСК співпадає з ОСК, тобто кути орієнтації є нульовими. Вектори в ЗСК мають такі координати: $\vec{b}_1 = [1,0,0]^T$, $\vec{b}_2 = [0,1,0]^T$, $\vec{b}_3 = [0,0,1]^T$.

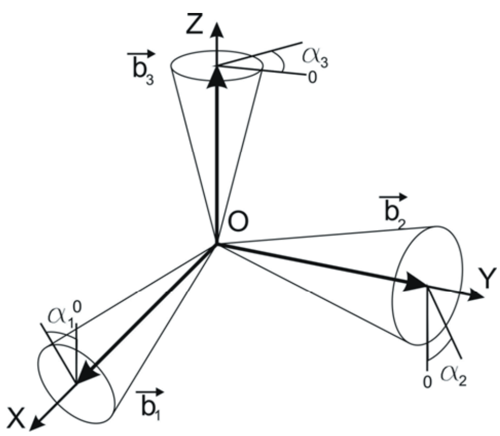


Рис. 1. Взаємне положення базових векторів, початкові напрямки та напрямки відліку кутів α_i для випадку детермінованих похибок

В роботі вектори $\Delta\vec{b}_i$ моделювалися двома способами. В першому випадку величина і напрямок вектора похибки задаються детермінованим чином. При цьому величина вектора є незмінною і визначається фіксованим значенням σ_i, а напрямок визначається кутом α_i, який змінюється від $0°$ до $360°$. На рис. 1 зображено початкові напрямки та напрямки відліку кутів α_i для кожного з векторів похибок. Вважається, що перший та третій вектори вимірюються більш точно ніж другий. Тому використовуються такі значення для $\sigma_i : \sigma_1 = 0,002$, $\sigma_2 = 0,02$, $\sigma_3 = 0,002$ рад.

Похибка оцінювання характеризується кутом плоского повороту, що переводить ЗСК з положення, яке описується оцінкою матриці, в істинне положення:

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\hat{A}^T A\right) - 1\right)\right), \tag{17}$$

Моделювання було виконане для методів, що описуються рівняннями (4), (4) з урахуванням ортогоналізації (5), та (11)-(15). Також для порівняння були розглянутий метод, запропонований Весснером і Броком [2] незалежно один від одного, який позначається в даній роботі як SR(square root), а також TRIAD [4] та SVD [5]. Для TRIAD використовувалися пари векторів $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ і $(\vec{b}_1, \vec{b}_3)$, оскільки цей метод може оперувати тільки з двома векторами. Результати для детермінованого випадку формування векторів $\Delta\vec{b}_i$ представлені на рис. 2 – 4. Результати для перерахованих вище методів позначені як LS, LS_Ortho, A5, SR, Tsb (Tse) (TRIAD, Sun-Mag, Sun-Earth) та SVD відповідно.

Як бачимо з наведених графіків похибки оцінювання орієнтації за методом A5 залежать від напрямку вектора похибки, в той час як для методу LS_Ortho не залежать від нього. Оцінки, що отримуються за цими методами, є чутливими до похибок найменш точного вимірювача. Хоча при оцінюванні використовуються три опорні вектори A5 та LS_Ortho дають гірші результати порівняно з методами SR та SVD.

Це пояснюється тим, що точність, з якою вимірюються вектори базових напрямків, фактично не враховується при оцінці матриці орієнтації. Це погіршує точність отримуваних оцінок.

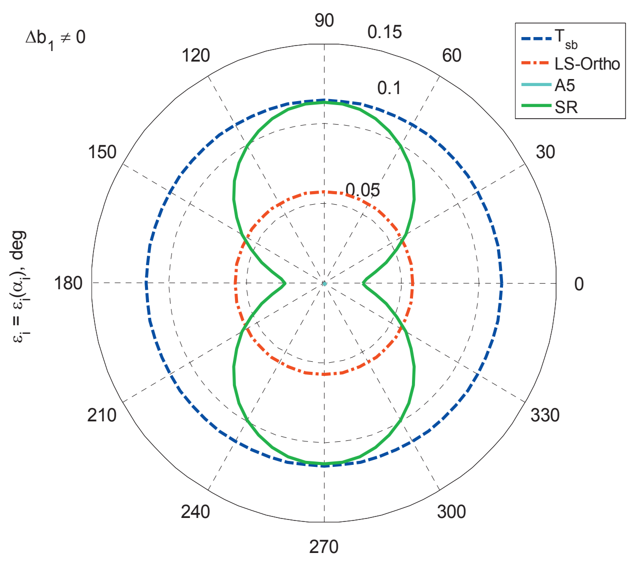


Рис. 2. Похибки оцінювання орієнтації для випадку $\sigma_1 = 0,002$ рад

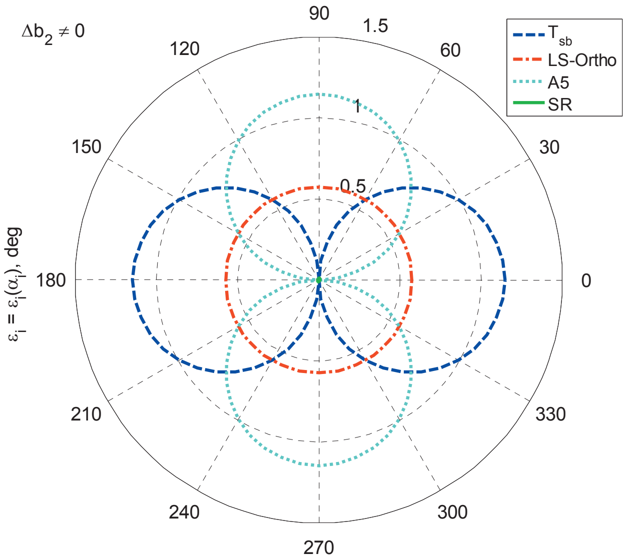


Рис. 3. Похибки оцінювання орієнтації для випадку $\sigma_2 = 0{,}02$ рад

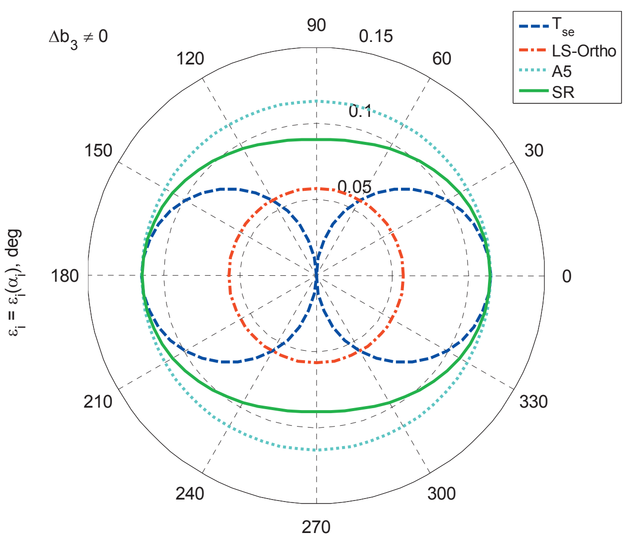


Рис. 4. Похибки оцінювання орієнтації для випадку $\sigma_3 = 0{,}002$ рад

В реальному випадку всі три похибки діють одночасно. Табл. 1 містить характеристики похибки оцінювання орієнтації (17) для випадку, коли величина і напрямок векторів похибок $\Delta\vec{b}_i$ генерувалася випадковим чином у відповідності до моделі вимірювань (16). Для σ_i використовувалися наступні значення: $\sigma_1 = 0{,}0017, \sigma_2 = 0{,}0175, \sigma_3 = 0{,}0009$ рад. Кількість тестів дорівнювала $N = 1000$.

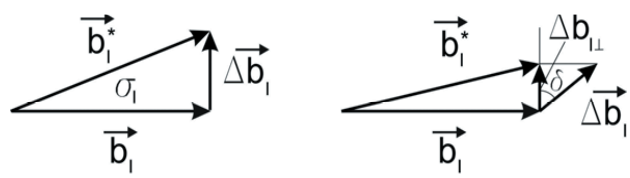
Як бачимо з наведених даних, використання ортогоналізації до оцінки матриці (3) чи (4) дозволяє підвищити точність оцінювання. Розглянуті методи LS_Ortho та A5 є менш точними, але більш простішими і відповідно швидшими порівняно з існуючими методами SR та SVD. На відміну від TRIAD вони дозволяють враховувати довільну кількість базових напрямків при оцінюванні орієнтації.

Таблиця 1

Результати оцінювання для випадкових похибок при різних значеннях с.к.в вектора похибки

Характеристика	Метод					
	LS	LS_Ortho	A5	SR	TRIAD $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$	SVD
м.о., °	0,578	0,407	0,532	0,069	0,517	0,071
макс., °	2,637	1,926	3,502	0,322	3,031	0,356
с.к.в., °	0,436	0,311	0,525	0,044	0,472	0,049

При використанні моделі вимірювань (16) похибка визначення орієнтації не залежить від самої орієнтації. Це пояснюється тим, що вектор похибки $\Delta\vec{b}_i$ завжди є перпендикулярним до істинного вектора $\vec{b}_i$ при будь-якій орієнтації ЗСК (рис. 5, а). Якщо ж вектор похибки задається своїми проекціями на вісі ЗСК, тобто використовується модель вимірювача, величина перпендикулярної складової $\Delta\vec{b}_{i\perp}$ залежить від взаємного положення істинного вектора і вектора похибки (рис. 5, б). Останнє в свою чергу залежить від орієнтації ЗСК відносно ОСК. Більшість робіт, що присвячена аналізу впливу МВО, використовують модель вимірювань. Однак на практиці необхідно пов'язати характеристики конкретного приладу з параметрами цієї моделі [11].



а б

Рис. 5. Формування вектора похибки при різних підходах: а — модель вимірювань; б — модель вимірювача

7. Висновки

Запропоновані методи визначення параметрів орієнтації є менш точними ніж існуючи аналоги, однак більш простими в реалізації і відповідно більш швидшими. Вони дозволяють враховувати три або більше вектори базових напрямків.

Оскільки всі вектори враховуються з однаковими ваговими коефіцієнтами, то найменш точний вимірювач погіршує підсумкову оцінку матриці орієнтації. Якщо всі вимірювачі достатньо точні, розглянуті методи дають кращі результати.

Література

1. Wahba, G., Problem 65-1: A least squares estimate of spacecraft attitude [Text] // SIAM Review.-1965.- Vol. 7,№3. -p. 409.
2. Farrell, J. L. A least squares estimate of spacecraft attitude [Text] / J. L. Farrell, J.Stuelpnagel // SIAM Review. –1966. – Vol. 8, № 3. – p. 384–386.

3. Markley, F. L. Quaternion attitude estimation using vector measurements [Text] / F. L. Markley, D. Mortari // The Journal of the Astronautical Sciences. – 2000. – Vol. 48, № 2–3. – p. 359–380.
4. Shuster, M. D. Three-axis attitude determination from vector observations[Text] / M. D. Shuster, S. D. Oh //Journal of Guidance and Control. –1981. – Vol. 4, №1.– p. 70–77.
5. Markley, F. L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition[Text] / F. L. Markley // The Journal of the Astronautical Sciences. – 1988. – Vol. 36, № 3. – p. 245–258.
6. Markley, F. L. Attitude determination using vector observations: a fast optimal matrix algorithm[Text] / F. L. Markley // The Journal of the Astronautical Sciences. – 1993. – Vol. 41, № 2. – p. 261–280.
7. Bruccoleri, C. Single-point optimal attitude determination using modified Rodrigues parameters [Text] / C. Bruccoleri, Deok-Jin Lee, D. Mortari : Proceedings of the University at Buffalo, State University of New York / AAS Malcolm D. Shuster Astronautics Symposium, June 12-15, 2005, Grand Island, New York. – p.137–148.
8. Rogers Robert M., Applied mathematics in integrated navigation systems, 2-nd ed.- 2003. - 330p.
9. Рижков, Л. М. Вплив похибки навігаційної системи мікросупутника га точність визначення орієнтації [Текст] / Л. М. Рижков, І. В. Дорошенко, Д. І. Степуренко // Інформаційні системи, механіка та керування. 2012. Випуск 8. – С.34–40.
10. Mortari, D. Multiplicative measurement model [Text] / D. Mortari, Majji Manoranjan // Journal of the Astronautical Sciences. – 2009. – Vol. 57, №1–2. – p. 47–60.
11. Рижков, Л. М. Порівняння похибок алгоритму TRIAD обчислених на основі моделі вимірювань та моделі вимірювачів [Текст] / Л. М. Рижков, Д. І. Степуренко, А. В. Семешко : матеріали IX міжнар. наук.-техн. конф. “Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки”,17-18 квітня 2013р. Київ. – Київ, 2013. – С.300–302.

УДК 629.05

КОМПЛЕКСНА СИСТЕМА ВИМІРЮВАННЯ НАВІГАЦІЙНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ДЛЯ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ПОЛЬОТОМ

К. В. Пономаренко
Аспірант*
E-mail: kostantino@ukr.net
Л. М. Рижков
Доктор технічних наук, професор*
*Кафедра приладів та систем керування літальними апаратами
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
пр-т Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
E-mail: lev_ryzhkov@rambler.ru

Викладені основні результати дослідження роботи сильно зв’язаної комплексної БІНС-GPS навігаційної системи в умовах прийому сигналів від одного, двох та трьох супутників. При дослідженні аналізувалася похибка визначення горизонтальних координат. Визначено умови, що впливають на точність системи, та проаналізовано характер їх впливу

Ключові слова: БІНС, СНС, сильно зв’язана комплексна навігаційна система, математична модель

Изложены основные результаты исследования работы сильно связанной комплексной БИНС-GPS навигационной системы в условиях приема сигналов от одного, двух и трех спутников. Во время исследования анализировалась погрешность определения горизонтальных координат. Определены условия, влияющие на точность системы, проанализирован характер их влияния

Ключевые слова: БИНС, СНС, сильно связанная комплексная навигационная система, математическая модель

1. Вступ

У авіаційній промисловості все більшого розвитку та розповсюдження набувають безпілотні літальні апарати (БпЛА). Сьогодні більшість з них уже не потребують дистанційного керування, а здатні виконувати досить складні польотні завдання, наприклад летіти по заданому маршруту та одночасно здійснювати фотографування, радіозондування, зрошення території, розвідку тощо. Для забезпечення польоту по заданому маршруту бортова система керування повинна отримувати інформацію про параметри руху, такі як координати, швидкість, кутова орієнтація. Від точності вимірювання цих параметрів залежить величина відхилення БпЛА від заданого маршруту та якість виконання поставленого польотного завдання.